ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

THIERRY MEYRE

# Étude asymptotique du temps passé par le mouvement brownien dans un cône

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 27, nº 1 (1991), p. 107-124

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_1_107_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 27, n° 1, 1991, p. 107-124. *Probabilités et Statistiques*

# Étude asymptotique du temps passé par le mouvement brownien dans un cône

par

**Thierry MEYRE**

Laboratoire de Probabilités,
Université Paris-VI,
Tour 56-66, 3[e] étage,
4, Place Jussieu,
75252 PARIS Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Soit $\mathscr{T}(t)$ le temps passé avant l'instant $t$ par un mouvement brownien issu de 0 dans un cône fermé de $\mathbb{R}^d$ de sommet 0, basé sur un sous-ensemble quelconque de la sphère. Nous déterminons, selon la valeur du paramètre $q>0$, le comportement asymptotique, en $t=0$ et en $t=+\infty$, du processus $\left(|\log t|^q \dfrac{\mathscr{T}(t)}{t}, t>0\right)$. La démonstration utilise certaines estimations de la fonction de répartition du temps d'atteinte du cône par un mouvement brownien issu de $a \in \mathbb{R}^d - \{0\}$.

ABSTRACT. — Let $\mathscr{T}(t)$ be the total time spent, before time $t$, by a $d$-dimensional Brownian motion started at 0 in a closed cone of $\mathbb{R}^d$ with vertex 0, based on an arbitrary subset of the sphere. We discuss the asymptotic behavior, at $t=0$ and $t=+\infty$, of the process $\left(|\log t|^q \dfrac{\mathscr{T}(t)}{t}, t>0\right)$, according to the value of the parameter $q>0$. The proof uses certain estimates for the distribution function of the hitting time of a cone for a Brownian motion started at $a \in \mathbb{R}^d - \{0\}$.

## 1. INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique, lorsque $t$ tend vers l'infini, du temps passé dans un cône avant l'instant $t$ par un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.

Plus précisément, si $S^{d-1}$ désigne la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$, nous considérons un sous-ensemble fermé $\mathscr{F}$ de $S^{d-1}$, tel que $\mathscr{F} \neq S^{d-1}$. On note Int$(\mathscr{F})$ l'intérieur de $\mathscr{F}$. Nous définissons le cône fermé :

$$\mathscr{C}_{\mathscr{F}} = \{rx\,;\, r \geqq 0, x \in \mathscr{F}\}.$$

Soit $(B_t,\, t \geqq 0)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de 0; avant l'instant $t$, il passe dans le cône $\mathscr{C}_{\mathscr{F}}$ le temps :

$$\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t) = \int_0^t 1\,(B_s \in \mathscr{C}_{\mathscr{F}})\, ds$$

Trouver la loi exacte de $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t)$ est un problème difficile; par exemple, la détermination de la loi du temps passé par un mouvement brownien plan dans un quadrant avant l'instant 1 est un vieux problème toujours ouvert actuellement. Par contre, on dispose de résultats asymptotiques sur $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$; ainsi, la loi du tout ou rien conduit facilement à :

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t)}{t} = 0 \quad \text{p. s.}$$

et, si Int$(\mathscr{F}) \neq \varnothing$, $\limsup\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t)}{t} = 1$ p. s.

C'est le premier de ces résultats que nous voulons améliorer ici. Nous cherchons à savoir si $\mathscr{T}(t)$ peut-être « très petit » devant $t$ lorsque $t$ est grand.

Nous introduisons l'hypothèse suivante :

(H) Int$(\mathscr{F}) \neq \varnothing$ et, à un ensemble polaire près, tout point de $\partial\mathscr{F}$ est régulier pour Int$(\mathscr{F})$.

Les notions d'ensemble polaire et de point régulier se rapportent ici au mouvement brownien sur la sphère. L'hypothèse (H) est vérifiée par exemple si $\mathscr{F}$ a une frontière régulière. En termes probabilistes, (H) signifie que le mouvement brownien sur la sphère partant d'un point de $\partial\mathscr{F}$ rencontre immédiatement Int$(\mathscr{F})$.

Sous cette hypothèse, nous montrons qu'il existe une certaine valeur critique $\xi > 0$ telle que l'on ait p. s. :

(i) $\liminf_{t \to +\infty} (\log t)^q \dfrac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t)}{t} = 0$ si $q \leqq \xi$ ;

(ii) $\liminf_{t \to +\infty} (\log t)^q \dfrac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t)}{t} = \infty$ *si* $q > \xi$.

L'assertion (i) est établie dans la partie 2 (il suffit bien sûr de traiter le cas $q = \xi$). La preuve de cette assertion ne nécessite pas l'hypothèse (H). En revanche, cette hypothèse joue un rôle important dans la preuve de (ii) donnée dans la partie 3.

La valeur critique $\xi$ s'obtient à partir de la plus petite valeur propre $\lambda_1$ de l'opérateur $-\frac{1}{2}\triangle$ (où $\triangle$ désigne le laplacien sur $S^{d-1}$) sur l'ouvert $\mathcal{F}^c$ (*i. e.* le complémentaire de $\mathcal{F}$ dans $S^{d-1}$) avec conditions de Dirichlet au bord. On a la relation :

$$\xi = \frac{(\upsilon^2 + 2\lambda_1)^{1/2} + \upsilon}{\lambda_1}, \qquad \text{où} \quad \upsilon = \frac{d}{2} - 1$$

Il est intéressant d'observer que la constante $\xi$ ne dépend que de la première valeur propre du laplacien sphérique dans l'ouvert $\mathcal{F}^c$. En particulier, on obtient le même $\xi$ lorsque $\mathcal{F}^c$ est un disque ouvert de rayon $r$ ou la réunion d'un nombre fini quelconque de tels disques, pourvu qu'ils soient disjoints. Ce résultat paradoxal se comprend mieux à la lecture des démonstrations qui suivent. Le cas $q \leqq \xi$ se traite en construisant de longs intervalles de temps sur lesquels le mouvement brownien ne visite pas $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, donc sa partie angulaire reste dans une seule composante connexe de $\mathcal{F}^c$. D'autre part, pour le cas $q > \xi$, il suffit de construire des temps aléatoires auxquels le mouvement brownien est dans un cône « un peu plus petit » que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ : il passera alors automatiquement suffisamment de temps dans $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ après l'instant aléatoire construit.

Un outil fondamental de notre démonstration est la décomposition en produit semi-direct d'un mouvement brownien $(X_t,\ t \geqq 0)$ dans $\mathbb{R}^d$ issu de $a \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ ; on peut écrire un tel mouvement brownien sous la forme (*cf.* par exemple, Rogers et Williams, [8], p. 73) :

$$X_t = R_t x_{H_t}$$

où $(R_t,\ t \geqq 0)$ est un processus de Bessel de dimension $d$ issu de $|a|$,

$$H_t = \int_0^t \frac{ds}{R_s^2},$$

*et* $(x_s,\ s \geqq 0)$ est un mouvement brownien sur la sphère $S^{d-1}$ issu de $\frac{a}{|a|}$ et indépendant du processus $(R_t,\ t \geqq 0)$. La décomposition en produit semi-direct nous est utile pour faire des estimations sur le temps d'entréee dans le cône $\mathscr{C}_{\mathscr{F}}$ du mouvement brownien $(X_t)$, car elle permet de relier ce temps d'entrée au temps de sortie de l'ouvert $\mathscr{F}^c$ pour $(x_s)$; or la distribution de ce temps de sortie peut être estimée par des méthodes classiques. *Voir* notamment De Blassie [2], Corollaire 1.3, [3], qui obtient des estimations voisines des nôtres pour le temps d'entrée dans $\mathscr{C}_{\mathscr{F}}$.

Enfin, en modifiant légèrement notre démonstration, nous obtenons des résultats asymptotiques sur le processus $\left(|\log t|^q \frac{\mathscr{T}(t)}{t},\ t>0\right)$ au voisinage de $t=0$ : ce sera l'objet de la partie 4.

Ces derniers résultats généralisent une étude faite par Mountford [5] en dimension 2, qui laissait cependant ouvert le cas critique $q=\xi$. Certains arguments des démonstrations qui suivent sont inspirés de cette étude, plus particulièrement dans le paragraphe (2.4). Cependant, l'approche développée dans la partie 3 du présent travail est nouvelle et, même dans le cas $d=2$, constitue à notre avis une simplification des arguments de Mountford.

REMERCIEMENTS

Je remercie Jean-François Le Gall qui m'a proposé ce travail et qui, par sa disponibilité et ses conseils judicieux, m'a apporté une aide précieuse dans l'élaboration de cet article.

## 2. LE CAS CRITIQUE

Nous commençons par traiter le cas critique $q=\xi$ : cela sera pour nous l'occasion d'introduire, dans les paragraphes (2.2) et (2.3), deux propositions qui nous seront utiles dans toute la suite.

(2.1) Dans toute cette partie, $\mathscr{F}$ est un sous-ensemble fermé de $S^{d-1}$, distinct de $S^{d-1}$, et qui ne satisfait pas nécessairement l'hypothèse (H). Nous conservons les notations de l'introduction. Quand il sera nécessaire de mettre l'accent sur la dépendance par rapport au fermé $\mathscr{F}$, nous noterons $\lambda_1(\mathscr{F}^c)$, $\xi(\mathscr{F}^c)$ les constantes introduites ci-dessus.

THÉORÈME 2.1. — *On a :*

$$p.s., \quad \liminf_{t \to +\infty} (\log t)^{\xi} \frac{\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t)}{t} = 0$$

La démonstration du théorème est donnée dans le paragraphe (2.4). Nous commençons par établir certains résultats préliminaires.

(2.2) Dans ce paragraphe, nous voulons estimer la fonction de répartition du temps d'entrée d'un mouvement brownien $(x_s, s \geqq 0)$ sur la sphère $S^{d-1}$ issu de $x_0 \in S^{d-1}$ dans un fermé F de $S^{d-1}$ tel que $F \neq S^{d-1}$. Ce temps d'entrée est défini par :

$$E_F = \inf\{s \geqq 0, x_s \in F\}.$$

PROPOSITION 2.2. — *Il existe un ouvert non vide* $0 \subset F^c$ *et une constante* $K>0$ *tels que, si* $x_0 \in 0$, *on a, pour tout* $t>0$ :

$$P[E_F > t] \geqq K e^{-\lambda_1 (F^c) t}$$

*D'autre part, il existe une constante* $K'>0$ *telle que, pour tout* $x_0 \in S^{d-1}$, *on a, pour tout* $t>0$ :

$$P[E_F > t] \leqq K' e^{-\lambda_1 (F^c) t}.$$

*Preuve* . Nous renvoyons le lecteur à la démonstration du théorème 7.2 de Port et Stone [7], p. 126, dont nous reprenons les notations et dans laquelle nous faisons les deux modifications suivantes :

(i) Au lieu de considérer un ouvert D de $\mathbb{R}^d$, nous considérons l'ouvert $F^c$ de $S^{d-1}$, ce qui nous amène simplement à travailler dans l'espace de Hilbert $\mathscr{L}^2(F^c)$ au lieu de $\mathscr{L}^2(D)$.

(ii) Nous remarquons que la convergence donnée par la formule (11) de [7], p. 126 :

$$e^{\lambda_1 t} P_x(T_D > t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \int_D \left( \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(y) \right) dy \tag{2 a}$$

est en fait uniforme en $x \in D$. En effet, la différence entre le membre de gauche et le membre de droite, qui est calculée au début de la preuve, vaut :

$$\int_D \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-(\lambda_n - \lambda_1) t} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \, dy.$$

Or, un calcul similaire au calcul (8) de [7], p. 123, nous donne :

$$\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-(\lambda_n-\lambda_1)t}\varphi_n(x)\varphi_n(y)\right)^2 \leqq p^2(\varepsilon, 0)\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-(\lambda_n-\lambda_1)t}e^{\lambda_n\varepsilon}\right)^2.$$

On conclut alors grâce à la formule (5) de la même page.

Le théorème 7.2 de [7] nous dit que le membre de droite de $(2a)$ est strictement positif pour un certain $x \in \mathrm{D}$ ; il est donc minoré par $k>0$ sur un ouvert non vide $0 \subset \mathrm{D}$, puisque les $\varphi_n$ sont continues. Par conséquent, il existe $t_0>0$ tel que :

$$\forall x \in 0, \quad \forall t \geqq t_0, \qquad P_x(\mathrm{T_D}>t) \geqq \frac{k}{2}e^{-\lambda_1 t}.$$

En posant alors $\mathrm{K}=\frac{k}{2}e^{-\lambda_1 t_0}$, on vérifie facilement qu'on a bien la minoration annoncée, au changement de notations près.

D'autre part, le membre de droite de $(2a)$ est borné puisque les $\varphi_n$ le sont ; on en déduit sans peine la majoration annoncée. □

(2.3) La décomposition en produit semi-direct d'un mouvement brownien $(\mathrm{X}_t,\ t \geqq 0)$ dans $\mathbb{R}^d$ issu de $a \in \mathbb{R}^d-\{0\}$ va nous permettre de passer de la proposition 2.2 à une proposition concernant le temps d'entrée du mouvement brownien $(\mathrm{X}_t,\ t \geqq 0)$ dans le cône $\mathscr{C}_\mathrm{F}$.

Ce temps d'entrée est défini par :

$$\mathrm{E}'_{\mathscr{C}_\mathrm{F}}=\inf\{t \geqq 0,\ \mathrm{X}_t \in \mathscr{C}_\mathrm{F}\}.$$

PROPOSITION 2.3. — *Il existe un ouvert non vide* $0 \subset \mathrm{F}^c$ *et une constante* $\mathrm{C}>0$ *tels que, si* $\frac{a}{|a|} \in 0$, *on a pour tout* $t \geqq |a|^2$ :

$$\mathrm{P}[\mathrm{E}'_{\mathscr{C}_\mathrm{F}}>t] \geqq \mathrm{C}\left(\frac{t}{|a|^2}\right)^{-1/\xi(\mathrm{F}^c)}.$$

*D'autre part, il existe une constante* $\mathrm{C}'>0$ *telle que, si* $a \neq 0$, *on a pour tout* $t>0$ :

$$\mathrm{P}[\mathrm{E}'_{\mathscr{C}_\mathrm{F}}>t] \leqq \mathrm{C}'\left(\frac{t}{|a|^2}\right)^{-1/\xi(\mathrm{F}^c)}.$$

*Preuve* . On commence par établir la minoration annoncée.

On peut supposer $|a|=1$ car on passe alors au cas général par changement d'échelle. Écrivons alors la décomposition en produit semi-direct :

$$\mathrm{X}_t=\mathrm{R}_t\, x_{\mathrm{H}_t}$$

de telle sorte que :

$$\{E'_{\mathscr{C}_F} > t\} = \{H_{E'_{\mathscr{C}_F}} > H_t\} = \{E_F > H_t\}.$$

Utilisant l'indépendance de $E_F$ et $H_t = \int_0^t \frac{ds}{R_s^2}$, nous en déduisons par la proposition 2.2 :

$$P[E'_{\mathscr{C}_F} > t] \geqq K\, E[e^{-\lambda_1 (F^c) H_t}] \tag{2b}$$

Si nous notons $Q_1^d$ la loi d'un carré de processus de Bessel de dimension $d$ issu de 1 et $(Y_t)_{t \geqq 0}$ le processus canonique sur l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, nous avons :

$$E[e^{-\lambda_1 (F^c) H_t}] = Q_1^d [\exp\{-\lambda_1 (F^c) \int_0^t \frac{ds}{Y_s}\}].$$

Le lemme 4.5 de [10] entraîne que :

$$E[e^{-\lambda_1 (F^c) H_t}] = Q_1^2 [Y_t^{\upsilon/2} \exp\{-(\frac{v^2}{2} + \lambda_1 (F^c)) \int_0^t \frac{ds}{Y_s}\}]$$

On sait d'après le théorème 4.7 de Yor [10] que, en notant $I_\alpha(.)$ la fonction de Bessel modifiée d'ordre $\alpha$ :

$$Q_1^2 \left[ \exp\left\{ -\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \lambda_1 (F^c)\right) \int_0^t \frac{ds}{Y_s} \right\} \middle| Y_t = b \right] = \frac{I_\beta(\sqrt{b}/t)}{I_0(\sqrt{b}/t)}$$

où $\beta = \sqrt{\upsilon^2 + 2\lambda_1 (F^c)}$.

Pitman-Yor [6], p. 431, , nous donne la densité de transition d'un carré de processus de Bessel de dimension 2 :

$$q^2(t, a, b) = \frac{1}{2t} e^{-(a+b)/2t} I_0\left(\frac{\sqrt{ab}}{t}\right).$$

D'où l'expression

$$E[e^{-\lambda_1 (F^c) H_t}] = \int_0^\infty \frac{db}{2t} e^{-(1+b)/2t} b^{\nu/2} I_\beta\left(\frac{\sqrt{b}}{t}\right).$$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{b/t}$ pour obtenir :

$$E[e^{-\lambda_1 (F^c) H_t}] = t^{\upsilon/2} e^{-1/2t} \int_0^\infty du\, u^{\upsilon+1} e^{-u^2/2} I_\beta\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right). \tag{2c}$$

On utilise alors la propriété suivante des fonctions de Bessel :

$$\exists\, m>0, \quad \forall\, x\in[0,1], \qquad \frac{I_\alpha(x)}{x^\alpha}\geqq m \tag{2d}$$

qui résulte de l'expression intégrale donnée par Watson [9], p. 79.

Nous obtenons ainsi la minoration, valable pour tout $t\geqq 1$ :

$$\int_0^\infty du\, u^{\upsilon+1}\, e^{-u^2/2}\, I_\beta\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\geqq \int_0^{\sqrt{t}} du\, u^{\upsilon+1}\, e^{-u^2/2}\, m\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^\beta \geqq m'\, t^{-\beta/2}$$

($m'$ est une constante strictement positive).

(2 $c$) nous donne alors :

$$\forall\, t\geqq 1, \quad E\left[e^{-\lambda_1\,(F^c) H_t}\right]\geqq m'\, e^{-1/2}\, t^{(\upsilon-\beta)/2}$$

Notons que $\dfrac{\upsilon-\beta}{2}=-\dfrac{1}{\xi}$. Revenant alors à (2 $b$) et posant $C=Km'\,e^{-1/2}$, on a

$$P[E'_{\mathscr{C}_F}>t]\geqq C\, t^{-1/\xi} \quad \text{pour tout } t\geqq 1.$$

C'est bien la minoration annoncée, dans le cas $|a|=1$.

Pour obtenir la majoration annoncée, nous allons procéder de façon similaire; la proposition 2.2 nous donne :

$$P[E'_{\mathscr{C}_F}>t]\leqq K'\, E\left[e^{-\lambda_1\,(F^c) H_t}\right] \tag{2b'}$$

On applique alors au membre de droite de (2 $c$) la propriété suivante des fonctions de Bessel :

$$\forall\, u\geqq 0, \quad \forall\, t\geqq 1, \qquad I_\alpha\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\leqq t^{-\alpha/2}\, I_\alpha(u) \tag{2d'}$$

qui résulte du développement en série donnée par Watson [9], p. 77.

On obtient la majoration, valable pour tout $t\geqq 1$ :

$$\int_0^\infty du\, u^{\upsilon+1}\, e^{-u^2/2}\, I_\beta\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\leqq M'\, t^{-\beta/2}$$

($M'$ est une constante strictement positive).

Revenant à (2 $b'$) et posant $C'=K'M'$, on obtient :

$$\forall\, t\geqq 1, \quad P[E'_{\mathscr{C}_F}>t]\leqq C'\, t^{-1/\xi}. \quad \square$$

(2.4) Nous nous donnons maintenant un réel $p>\xi(\mathscr{F}^c)+4$ et nous définissons la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} u_1>1 \\ u_{n+1}=u_n+p\log u_n \end{cases}$$

Une étude élémentaire de cette suite montre que :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} p\,n\log n \tag{2e}$$

Posons $v_n=e^{u_n}$ de telle sorte que :

$$v_{n+1}=v_n\log^p v_n \tag{2f}$$

D'autre part, nous définissons pour $\varepsilon>0$ arbitrairement fixé, la fonction : $\varphi(t)=\dfrac{1}{\varepsilon}t(\log t)^{\xi(\mathscr{F}^c)}$ (pour tout $t>1$).

LEMME 2.4. — *Considérons les événements :*

$$E_n=\{|B_{v_n}|\in]v_n^{1/2},\, 2v_n^{1/2}[,\ E'_{\mathscr{C}_{\mathscr{F}}}(B_{v_n+\cdot})\geqq\varphi(v_n)-v_n,\ |B_{\varphi(v_n)}|\leqq\sqrt{\varphi(v_n)}\log^2 v_n\}$$

*Alors* $P(\limsup E_n)=1$.

*Preuve*. D'après la forme du lemme de Borell-Cantelli donnée dans Chung [1], p. 77, il nous suffit de montrer que l'on a :

(i) $\displaystyle\lim_{\substack{m,n\to\infty\\ m\neq n}}\frac{P(E_n\cap E_m)}{P(E_n)P(E_m)}=1$ ;

(ii) $\Sigma_n P(E_n)=\infty$

Pour prouver (i), on introduit la filtration canonique $(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$ du mouvement brownien B et l'on remarque que l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad E_n\in\mathscr{F}_{\varphi(v_n)}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall m>n,\quad P(E_n\cap E_m)=E[1_{E_n}P(E_m\mid\mathscr{F}_{\varphi(v_n)})].$$

Mais $(2f)$ implique que $v_{n+1}>\varphi(v_n)$ à partir d'un certain rang $n_0$, si bien que l'on peut appliquer la propriété de Markov simple au mouvement brownien B pour obtenir :

$$\forall m>n>n_0,\quad P(E_n\cap E_m)=E[1_{E_n}P(E_m\mid B_{\varphi(v_n)})] \tag{2g}$$

Nous allons maintenant comparer, sur l'ensemble $E_n$, la variable aléatoire $P(E_m \mid B_{\varphi(v_n)})$ et la constante $P(E_m)$. Si nous posons :

$$p(t,x)=(2\pi t)^{-d/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$$

nous avons :

$$P(E_m)=\int da\, p(v_m,a)\,1(v_m^{1/2}<|a|<2v_m^{1/2})$$
$$\times P_a[E'_{\mathscr{C}_{\mathscr{F}}}(X)\geqq\varphi(v_m)-v_m,\ |X_{\varphi(v_m)-v_m}|\leqq\sqrt{\varphi(v_m)}\log^2 v_m]$$

où $P_a$ désigne la loi d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ issu de $a$ et $(X_s,\ s\geqq 0)$ le processus canonique sur l'espace $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$.

On a aussi :

$$P(E_m \mid B_{\varphi(v_n)}=x)=\int da\, p(v_m-\varphi(v_n),a-x)\,1(v_m^{1/2}<|a|<2v_m^{1/2})\,P_a[\ldots].$$

Or :

$$\frac{p(v_m-\varphi(v_n),a-x)}{p(v_m,a)}$$
$$=\left(\frac{v_m-\varphi(v_n)}{v_m}\right)^{-d/2}\exp\left(-\frac{\varphi(v_n)}{2v_m(v_m-\varphi(v_n))}|a|^2\right)$$
$$\times\exp\left(\frac{a.x}{v_m-\varphi(v_n)}\right)\exp\left(-\frac{|x|^2}{2(v_m-\varphi(v_n))}\right)$$

En utilisant (2f), on constate que cette quantité converge vers 1 lorsque $m,n\to\infty$ uniformément en $|x|\in[0,\sqrt{\varphi(v_n)}\log^2 v_n]$ et $|a|\in]v_m^{1/2},2v_m^{1/2}[$, si bien que :

$$\forall\alpha>0,\quad \exists A>0,$$

$$m>n>A \quad\Rightarrow\quad (1-\alpha)\,1_{E_n}P(E_m)\leqq 1_{E_n}P(E_m\mid B_{\varphi(v_n)})\leqq(1+\alpha)\,1_{E_n}P(E_m).$$

En reportant cet encadrement dans (2g), on obtient (i).

Montrons maintenant (ii).

D'après la proposition 2.3, il existe un ouvert $\mathcal{O}\subset\mathscr{F}^c$ et une constante $C>0$ tels que, si $\dfrac{a}{|a|}\in\mathcal{O}$ et $|a|^2\leqq\varphi(v_n)-v_n$, on a :

$$P[E'_{\mathscr{C}_{\mathscr{F}}}(B_{v_n+\cdot})\geqq\varphi(v_n)-v_n\mid B_{v_n}=a]\geqq C\left(\frac{\varphi(v_n)-v_n}{|a|^2}\right)^{-1/\xi(\mathscr{F}^c)}$$

D'où, pour $n$ assez grand :

$$P\left[\,|B_{v_n}|\in]v_n^{1/2},2v_n^{1/2}[,\frac{B_{v_n}}{|B_{v_n}|}\in\mathcal{O},E'_{\mathscr{C}_{\mathscr{F}}}(B_{v_n+\cdot})\geqq\varphi(v_n)-v_n\right]$$
$$\geqq C\left(\frac{\varphi(v_n)-v_n}{v_n}\right)^{-1/\xi(\mathscr{F}^c)}P\left[\,|B_{v_n}|\in]v_n^{1/2},2v_n^{1/2}[,\frac{B_{v_n}}{|B_{v_n}|}\in\mathcal{O}\right].$$

Par changement d'échelle, on constate que le dernier facteur est indépendant de $n$ et strictement positif. Utilisant alors ($2e$), nous obtenons l'existence d'une constante $C_1>0$ telle que :

$$P[\,|B_{v_n}|\in]v_n^{1/2},2v_n^{1/2}[,E'_{\mathscr{C}_{\mathscr{F}}}(B_{v_n+\cdot})\geqq\varphi(v_n)-v_n]\geqq\frac{C_1}{n\log n}\qquad(2h)$$

à partir d'un certain rang.

D'autre part, toujours par changement d'échelle, on a, grâce à ($2e$), l'existence d'une constante $C_2>0$ telle que :

$$P[\,|B_{\varphi(v_n)}|>\sqrt{\varphi(v_n)}\log^2 v_n]=P[\,|B_1|>\log^2 v_n]\leqq\frac{C_2}{n^2}\qquad(2i)$$

Il est maintenant immédiat que ($2h$) et ($2i$) impliquent (ii). □

*Remarque*. La démonstration qui précède est très proche des arguments de Mountford [5], p. 17.

Le lemme 2.4 montre que p. s., il existe une sous-suite $(v_{n_k(\omega)})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(v_n)$ telle que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad E'_{\mathscr{C}_{\mathscr{F}}}(B_{v_{n_k}+\cdot})\geqq\varphi(v_{n_k})-v_{n_k}$$

Posant $t_k(\omega)=v_{n_k(\omega)}$, nous obtenons :

$$\text{p. s.},\quad \forall k\in\mathbb{N},\quad \forall s\in]t_k,\varphi(t_k)[.\qquad B_s\notin\mathscr{C}_{\mathscr{F}}\qquad(2j)$$

Notant $\xi$ au lieu de $\xi(\mathscr{F}^c)$ pour alléger, nous avons alors p. s. :

$$\log^\xi[\varphi(t_k)]\frac{\mathscr{T}_{\mathscr{F}}[\varphi(t_k)]}{\varphi(t_k)}\leqq\log^\xi[\varphi(t_k)]\frac{t_k}{\varphi(t_k)}\leqq 2\varepsilon$$

dès que $k$ est assez grand.

Il en résulte :

$$\text{p. s.},\quad \liminf_{t\to+\infty}\log^\xi t\,\frac{\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t)}{t}\leqq 2\varepsilon.$$

Le théorème 2.1 est alors démontré puisque $\varepsilon$ était arbitraire.

*Remarque*. Il était commode bans la démonstration précédente de travailler avec un mouvement brownien B issu de 0. Cependant, il est immédiat que le théorème 2.1 reste vrai pour un mouvement brownien partant avec une loi initiale quelconque. La même remarque s'applique au théorème 3.1 ci-dessous.

## 3. LE CAS $q>\xi$

(3.1) Il reste à étudier le cas $q>\xi$, ce que nous faisons en nous plaçant désormais sous l'hypothèse (H).

THÉORÈME 3.1. — *On a p.s., pour tout* $q>\xi(\mathscr{F}^c)$ :

$$\liminf_{t\to+\infty} (\log t)^q \frac{\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t)}{t}=\infty.$$

On vérifie aisément que le théorème 3.1 découle de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — *Si nous posons, pour* $n\in\mathbb{N}$, $t_n=2^n$, *on a, pour tout* $q>\xi(\mathscr{F}^c)$ :

$$p.s.,\quad \liminf_{n\to\infty} \log^q t_n \frac{\mathscr{T}_{\mathscr{F}}(t_n)}{t_n}\geqq 1.$$

Pour prouver cette proposition, nous allons mettre en évidence une suite d'intervalles aléatoires $[\tau_n, \sigma_n]$ « bien choisis » tels que :

$$\text{p.s.},\quad \forall s\in[\tau_n,\sigma_n],\qquad B_s\in\mathscr{C}_{\mathscr{F}} \tag{3 a}$$

Commençons par fixer $q$, $q_1$, $q_2\in\mathbb{R}_+$ tels que :

$$\xi(\mathscr{F}^c)<q_2<q_1<q$$

et définissons, en notant $d$ la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathscr{F}_\delta=\{x\in S^{d-1}, d(x,\mathscr{F}^c)\geqq\delta\}$$

$\mathscr{F}_\delta$ est un fermé, non vide dès que $\delta$ est assez petit; l'hypothèse (H) nous permet alors d'appliquer le lemme 7.1 de Le Gall [4], p. 619, pour obtenir :

$$\lim_{\delta\to 0}\xi(\mathscr{F}_\delta^c)=\xi(\mathscr{F}^c).$$

Ceci nous permet de fixer $\delta>0$ tel que :

$$\xi(\mathscr{F}_\delta^c)<q_2 \tag{3 b}$$

On imposera les trois conditions suivantes sur $\tau_n$ :

(C1) $\tau_n \geqq t_n$ ;

(C2) $B_{\tau_n} \in \mathscr{C}_{\mathscr{F}\delta}$ ;

(C3) $|B_{\tau_n}| \geqq t_n^{1/2}$.

L'idée intuitive qui mène à ces conditions est que, si à l'instant $\tau_n$, le mouvement brownien est à l'intérieur du cône $\mathscr{C}_{\mathscr{F}\delta}$ (strictement inclus dans $\mathscr{C}_{\mathscr{F}}$) et à distance suffisante de l'origine, il ne sortira pas trop tôt du cône $\mathscr{C}_{\mathscr{F}}$.

Le temps $\sigma_n$ est simplement défini par :

$$\sigma_n = \inf\{s > \tau_n, B_s \notin \mathscr{C}_{\mathscr{F}}\}.$$

Nous montrerons au paragraphe (3.3) que le choix de $\tau_n$ implique que l'intervalle $[\tau_n, \sigma_n]$ est « assez grand ».

La construction de $\tau_n$ est détaillée au paragraphe suivant.

(3.2) On définit par récurrence les temps d'arrêt suivants :

$$\begin{aligned} & T_n^0 = t_n \\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad & U_n^p = \inf\{t \geqq T_n^{p-1}, |B_t| \geqq t_n^{1/2}\} \\ & T_n^p = \inf\{t \geqq U_n^p, B_t \in \mathscr{C}_{\mathscr{F}\delta}\}. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant l'indice aléatoire :

$$N_n = \inf\{p \in \mathbb{N}^*, |B_{T_n^p}| \geqq t_n^{1/2}\}.$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\text{p. s.,} \quad \exists\, n_0(\omega), \qquad n > n_0 \;\Rightarrow\; N_n < c \log n \tag{3 c}$$

Constatant alors que la suite $(T_n^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire à partir du rang $N_n$, nous prendrons :

$$\tau_n = T_n^{[c \log n]}$$

(où $[\alpha]$ désigne la partie entière de $\alpha$).

Il est clair que $\tau_n$ ainsi défini vérifie bien (C1), (C2), (C3), pour tout $n > n_0(\omega)$.

Montrons donc (3 $c$) :

Reprenant les notations $P_a$ et $(X_s, s \geqq 0)$ de la preuve du lemme 2.4, nous définissons la quantité :

$$\rho = \sup_{|a| \geqq t_n^{1/2}} P_a(|X(E'_{\mathscr{C}_\delta})| < t_n^{1/2}) = \sup_{|a| \geqq 1} P_a(|X(E'_{\mathscr{C}_\delta})| < 1) \tag{3 d}$$

(on a noté $\mathscr{C}_\delta$ au lieu de $\mathscr{C}_{\mathscr{F}\delta}$ pour alléger).

Un petit calcul utilisant la décomposition en produit semi-direct montre que : $\rho \leqq \frac{1}{2}$.

En appliquant alors la propriété de Markov forte au mouvement brownien B, nous obtenons :

$$P[N_n > k] \leqq \rho^k.$$

Le lemme de Borel-Cantelli entraîne alors facilement ($3c$).

Voyons maintenant comment ($3c$) nous permet de majorer $\tau_n$.

LEMME 3.3. — *On a* :

$$p.s., \quad \exists n_1(\omega), \qquad n > n_1(\omega) \quad \Rightarrow \quad \tau_n \leqq t_n \log^{q_1} t_n.$$

*Preuve* . Nous allons d'abord montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqq N_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \\ P[U_n^p - T_n^{p-1} \geqq t_n (\log\log t_n)^2] \leqq \frac{1}{(\log t_n)^2} \tag{3e}$$

Il est bien connu que, si $\tau$ désigne le temps de sortie de l'intervalle $[-1,1]$ par un mouvement brownien issu de 0, il existe $K > 0$ et $\lambda > 0$ tels que :

$$(\forall t > 0), \quad P[\tau > t] \leqq K e^{-\lambda t}.$$

On peut aussi voir ce résultat comme un cas particulier de la majoration de la proposition 2.2, en prenant $d = 2$.

Or tout point de la boule fermée de centre 0 et de rayon $t_n^{1/2}$ est le centre d'un $d$-cube de côté $4 t_n^{1/2}$ incluant toute cette boule; il en résulte par changement d'échelle :

$$P[U_n^p - T_n^{p-1} \geqq t_n (\log\log t_n)^2] \leqq \left(P\left[\tau > \frac{1}{4} (\log\log t_n)^2\right]\right)^d$$

($3e$) s'obtient alors facilement.

D'autre part, la proposition 2.3 implique, pour tout $p > 1$ :

$$P[T_n^p - U_n^p \geqq t_n \log^{q_2} t_n] \leqq C' (\log t_n)^{-q_2/\xi(\mathscr{F}\S)} \tag{3f}$$

et, pour $p = 1$ :

$$P[T_n^1 - U_n^1 \geqq t_n \log^{q_2} t_n] \leqq C' (1 + E[|B_1|^{2/\xi(\mathscr{F}\S)}]) (\log t_n)^{-q_2/\xi(\mathscr{F}\S)} \tag{3f'}$$

[on distingue les cas $|B_{t_n}| < t_n^{1/2}$ et $|B_{t_n}| \geqq t_n^{1/2}$ pour obtenir ($3f'$)].

En utilisant (3 *b*), (3 *e*), (3 *f*) et (3 *f'*), nous obtenons par le lemme de Borel-Cantelli, le résultat suivant :

$$\text{p.s.} \quad \exists n'_1(\omega), \quad \forall n \geqq n'_1(\omega)$$
$$1 \leqq p \leqq [c \log n] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_n^p - T_n^{p-1} \leqq t_n (\log\log t_n)^2 \\ T_n^p - U_n^p \leqq t_n \log^{q_2} t_n \end{cases}$$

Mais alors :

$$n \geqq n'_1(\omega) \quad \Rightarrow \quad \tau_n \leqq t_n + [c \log n](t_n (\log\log t_n)^2 + t_n \log^{q_2} t_n).$$

On conclut facilement puisque : $q_2 < q_1$. □

(3.3) Le temps passé par le mouvement brownien B dans le cône $\mathscr{C}_{\mathscr{F}}$ avant l'instant $\sigma_n$ est minoré par $\sigma_n - \tau_n$, qu'on estime au moyen du lemme suivant :

LEMME 3.4. – *On a :*

$$p.s., \quad \exists n_2(\omega), \qquad n > n_2(\omega) \quad \Rightarrow \quad \sigma_n - \tau_n \geqq \frac{t_n}{(\log\log t_n)^2}.$$

*Preuve.* – Grâce à (C3), il suffit de montrer :

$$n > n_2(\omega) \quad \Rightarrow \quad \sigma_n - \tau_n \geqq \frac{|B_{\tau_n}|^2}{(\log\log t_n)^2}.$$

Si $\tau$ désigne encore le temps de sortie $[-1,1]$ par un mouvement brownien issu de 0, on a le résultat classique suivant :

$$\exists k > 0, \quad \forall t \leqq 1, \qquad P[\tau < t] \leqq k e^{-1/2t} \tag{3g}$$

Or il existe $k' > 0$ tel que tout point $x$ du cône $\mathscr{C}_{\mathscr{F}_\delta}$ est le centre d'un $d$-cube de côté $k'|x|$ inclus dans le cône $\mathscr{C}_{\mathscr{F}}$ ; il en résulte par changement d'échelle :

$$P\left[\sigma_n - \tau_n \leqq \frac{|B_{\tau_n}|^2}{(\log\log t_n)^2} \middle| B_{\tau_n} = x\right]$$
$$\leqq d P\left[\sup_{[\tau_n, \tau_n + (|x|^2/(\log\log t_n)^2)]} |B_s^1 - B_{\tau_n}^1| > \frac{k'|x|}{2}\right]$$
$$\leqq d P\left[\tau \leqq \frac{4}{k'^2 (\log\log t_n)^2}\right]$$

Grâce à (3 *g*), on en déduit qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqq N_1, \quad P\left[\sigma_n - \tau_n \leqq \frac{|B_{\tau_n}|^2}{(\log\log t_n)^2}\right] \leqq \frac{1}{(\log t_n)^2}.$$

Le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure. □

(3.4) Voyons maintenant comment les lemmes 3.3 et 3.4 nous permettent de démontrer la proposition 3.2

A tout $n \in \mathbb{N}$, on associe l'unique entier $m(n)$ tel que :

$$t_{m(n)} \leqq \frac{t_n}{2 \log^{q_1} t_n} < 2\, t_{m(n)} \tag{3 h}$$

Le lemme 3.3 et $(3\,h)$ impliquent :

$$\text{p.s.,} \quad \exists\, n_3(\omega), \qquad n > n_3(\omega) \quad \Rightarrow \quad \tau_{m(n)} \leqq \frac{t_n}{2} \tag{3 i}$$

Grâce à $(3\,a)$, on a alors :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t_n) \geqq \sigma_{m(n)} \wedge t_n - \tau_{m(n)} \tag{3 j}$$

Deux cas se présentent :

(i) Si $\sigma_{m(n)} > t_n$, $(3\,i)$ et $(3\,j)$ nous donnent :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t_n) \geqq \frac{t_n}{2}.$$

(ii) Si $\sigma_{m(n)} \leqq t_n$, le lemme 3.4 et $(3\,j)$ nous donnent :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t_n) \geqq \frac{t_{m(n)}}{(\log \log t_{m(n)})^2}.$$

En regroupant les deux cas, et en utilisant $(3\,h)$ dans le second, on voit que :

$$\text{p.s.,} \quad \exists\, n_4(\omega), \qquad n > n_4(\omega) \quad \Rightarrow \quad (\log t_n)^q \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t_n)}{t_n} \geqq 1.$$

La conclusion en résulte immédiatement. □

## 4. ÉTUDE EN TEMPS PETIT

Il est facile d'obtenir, à $t > 1$ fixé, l'égalité en loi suivante :

$$(\log t)^q \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t)}{t} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left| \log \frac{1}{t} \right|^q \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(1/t)}{1/t}.$$

Cette égalité en loi ne suffit pas pour déduire des résultats précédents le comportement en temps petit de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t)$. Cependant, il est assez facile de déduire de l'étude précédentes les théorèmes 4.1 et 4.2 ci-dessous, qui sont les analogues en temps petit des théorèmes 2.1 et 3.1.

THÉORÈME 4.1. — *On a p.s. :*

$$\liminf_{t \to 0} |\log t|^{\xi} \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t)}{t} = 0.$$

*Preuve.* — Nous introduisons le mouvement brownien $(\beta_s, s \geqq 0)$ issu de 0, défini par :

$$\beta_s = s B_{1/s} \quad \text{si} \quad s \neq 0$$
$$\beta_0 = 0.$$

On a alors :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t) = \int_0^t 1(B_s \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}})\, ds = \int_{1/t}^{\infty} 1(\beta_s \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}) \frac{ds}{s^2} \tag{4a}$$

$\beta$ étant un mouvement brownien issu de 0, nous pouvons appliquer $(2j)$ de la façon suivante : p.s., il existe une suite aléatoire $(t_k(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers $\infty$ et telle que, si $\varphi(t) = \frac{1}{\varepsilon} t \log^{\xi} t$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall s \in ]t_k, \varphi(t_k)[, \qquad \beta_s \notin \mathcal{C}_{\mathcal{F}}.$$

Mais alors $(4a)$ nous donne :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{t_k}\right) \leqq \int_{\varphi(t_k)}^{\infty} \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{\varphi(t_k)}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\left|\log \frac{1}{t_k}\right|^{\xi} \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(1/t_k)}{1/t_k} \leqq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\liminf_{t \to 0} |\log t|^{\xi} \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t)}{t} \leqq \varepsilon$$

ce qui permet de conclure puisque $\varepsilon > 0$ était arbitraire. □

THÉORÈME 4.2. — *On a p.s., pour tout* $q > \xi(\mathcal{F}^c)$ :

$$\liminf_{t \to 0} |\log t|^{q} \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(t)}{t} = \infty.$$