

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

X. FERNIQUE

Sur la régularité de certaines fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, n° 3 (1990), p. 399-417

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_3_399_0>

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur la régularité de certaines fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck

par

X. FERNIQUE

Université Louis Pasteur, Département de Mathématique,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on se propose de préciser les conditions de régularité des fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck partant de l'origine quand elles sont définies par des opérateurs simultanément diagonalisables. On étudie en particulier le cas où X est une fonction aléatoire séparable sur $[0, T] \subset \mathbb{R}^+$ à valeurs dans un espace l_p , $p \in [2, \infty[$ vérifiant l'équation :

$$dX = -\Lambda X dt + \Sigma dW, X(0) = 0,$$

où Λ est un opérateur diagonal, Σ est un opérateur diagonal non négatif et W est un processus de Wiener à composantes indépendantes normalisées : les trajectoires de X dans l_p sont continues si et seulement si elles sont dans cet espace et l'intégrale $\int_{x>0} [x \log^+(\sup\{\lambda_k : \sigma_k^2 > \lambda_k x\})]^{p/2} \frac{dx}{x}$ est finie. En appendice et en liaison avec le résultat précédent, on étudie un problème de calcul des variations dans l_p .

ABSTRACT. — We precise the regularity of the Ornstein-Uhlenbeck functions starting of the origin and defined by diagonalisable operators. We characterise the regularity of the paths of l_p -valued separable solutions

Mots clés : Ornstein-Uhlenbeck functions, regularity of paths.

Classification A.M.S : 60 G 15, 60 B 11, 49 A 27.

of the diagonal Langevin equation $dX = -\Lambda X dt + \Sigma dW$, $X(0) = 0$, $X(t) \in l_p$, $t \in \mathbb{R}^+$, where p belongs to $[2, \infty[$, Λ is diagonal, Σ is diagonal non-negative and W is a Wiener process with independent and normalized components : the paths in l_p of such random function are continuous if and only if the integral $\int [x \log^+(\sup\{\lambda_k = \sigma_k^2 > \lambda_k x\})]^{p/2} \frac{dx}{x}$ is finite. In the appendix, we study a problem of variations in l_p associated with the previous result.

0. INTRODUCTION

0.1. Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe lunisien et quasi-complet ; on note E' son dual topologique et F un sous-espace vectoriel de E' séparant les points de E ; K est un espace de Hilbert contenant F et $T = [0, T]$ est un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}^+$; on pose $T' = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$; $r = \{r(u), u \geq 0\}$ est un semi-groupe d'opérateurs (non nécessairement bornés) sur K dont le domaine contient F ; on suppose que pour tout $y \in F$, l'application : $u \rightarrow (\|r(u) \cdot y\|_K)^2$ de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable et Lebesgue-intégrable. A toutes ces données, nous associons sur $(T \times F)^2$ la fonction Γ définie par :

$$0.1.1 \quad \Gamma(t, y; s, z) = \int_0^\infty \langle I_{\{u \leq t\}} r(t-u)y, I_{\{u \leq s\}} r(s-u)z \rangle_K du;$$

c'est une covariance puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(t_k, y_k; 1 \leq k \leq n) \in (T \times F)^n$, on a :

$$\sum \Gamma(t_k, y_k; t_m, y_m) = \int_0^\infty \left\| \sum I_{u \leq t_k} r(t_k - u) y_k \right\|_K^2 du \geq 0.$$

Une fonction aléatoire gaussienne centrée X sur T à valeurs dans E est dite d'Ornstein-Uhlenbeck partant de l'origine si elle a sur $T \times F$ cette covariance Γ .

On se propose d'étudier la régularité des trajectoires d'une telle fonction aléatoire X : on donnera des conditions suffisantes pour leur continuité dans le cas où le semi-groupe r peut être diagonalisé et on montrera que dans des situations suffisamment générales, ces conditions sont aussi nécessaires (Théorème 1.0). De plus, si E est un espace l_p , $p \geq 2$, on exprimera ces conditions nécessaires et suffisantes sous forme simple (Théorème 2.1) ;

Ces résultats, basés sur ceux de [2], ont été partiellement annoncés dans [3]; ils fournissent une solution complète à un problème introduit dans [4] et étudié précédemment dans [5]. En appendice, nous étudions les varia-

tions dans l_p des fonctions du type : $y \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \right]^{1/2}$ où s_m est une suite positive.

0.2. Soit K_0 un espace de Hilbert contenant F , inclus algébriquement et topologiquement dans K de sorte que pour tout $y \in K_0$, $\|y\|_K \leq \|y\|_{K_0}$; nous dirons que la situation est K_0 -diagonalisable si le semi-groupe r a dans K_0 un générateur infinitésimal autoadjoint au sens suivant : il existe un opérateur autoadjoint non nécessairement borné L sur K_0 tel que :

$$0.2.1 \quad \forall u \geq 0, r(u) = \exp\{-uL\},$$

de sorte qu'en notant $\pi = \{\pi_{y,z}; y, z \in F\}$ la famille des mesures spectrales de L , on ait :

$$0.2.2 \quad \forall y \in F, \forall t \in T, \|r(t)y\|_K^2 \leq \|r(t)y\|_{K_0}^2 = \int \exp\{-2\lambda t\} \pi_{y,y}(d\lambda).$$

Un cas particulier important sera celui des situations K -diagonalisables.

0.3. Dans toute la suite, nous supposons la situation K_0 -diagonalisable. On sait ([2], 6.3.2) que l'existence des fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck X sur T à valeurs dans E partant de l'origine est déterminée par la condition :

0.3.1 l'application $y \rightarrow \int_0^T \|r(u)y\|_K^2 du$ est la covariance d'un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans E .

Les propriétés spectrales du semi-groupe autoadjoint r montrent qu'il suffit pour cela que, indépendamment de $a > 0$, la condition suivante soit vérifiée :

0.3.2 $\int_{\lambda < -a} |\lambda|^{-1} \exp\{2|\lambda|T\} \pi_{y,y}(d\lambda), \int_{\lambda > a} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda), \int_{|\lambda| \leq a} \pi_{y,y}(d\lambda)$ sont les covariances de vecteurs gaussiens G^-, G^+, G^0 à valeurs dans E .

On notera qu'alors ces trois covariances sont continues sur F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de E .

Bien entendu, les propriétés 0.3.1 et 0.3.2 sont équivalentes si la situation est K -diagonalisable.

0.4. On a énoncé précédemment et sans hypothèse de diagonalisabilité ([2], théorèmes 6.3.5 et 6.3.8) des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que les fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck

X sur T à valeurs dans E partant de l'origine aient des modifications à trajectoires continues ou bornées dans E ; plus précisément :

THÉOREME : Soit $T \in \mathbb{R}^+$; on suppose la propriété 0.3.1 vérifiée. Dans ces conditions, supposons de plus que :

0.4.1. Il existe une modification X' de X ayant ses trajectoires continues (resp. bornées) sur $[0, T]$, dans E .

Nous avons alors aussi :

0.4.2. Il existe une partie compacte (resp. bornée) C de E telle que :

$$\forall y \in F, \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} \langle X(t), y \rangle \leq \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle;$$

Inversement, si la propriété 0.4.2 est vérifiée, alors nous avons aussi :

0.4.3. X a une modification X' ayant ses trajectoires continues (resp. localement bornées) sur $[0, T[$.

Le théorème rappelé ci-dessus fournit un léger décalage temporel entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes de régularité. Dans le premier paragraphe de cet article et sous l'hypothèse de K -diagonalisabilité, nous allons montrer que ce décalage peut être éliminé.

I. LES CONDITIONS DE LA RÉGULARITÉ DANS LE CAS DIAGONALISABLE

1.0. Nous supposons la condition 0.3.2 réalisée; nous fixons un nombre $a > 0$ et nous décomposons le semi-groupe r suivant les parties $\Lambda^- = \{\lambda < -a\}$, $\Lambda^0 = \{|\lambda| \leq a\}$, $\Lambda^+ = \{\lambda > a\}$ du spectre; nous notons respectivement r^-, r^0, r^+ , les semi-groupes définis par :

$$1.0.1 \quad \forall y, z \in F, \forall i \in J = \{-, 0, +\}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \langle r^i(t)y, z \rangle_{K_0} = \int_{\Lambda^i} \exp(-\lambda t) \pi_{y,z}(d\lambda),$$

et nous leur associons les covariances respectives :

$$\Gamma^i(t, y; s, z) = \int_0^\infty \langle I_{u \leq t} r^i(t-u)y, I_{u \leq s} r^i(s-u)z \rangle_{K_0} du,$$

de sorte que les distances associées vérifient :

$$1.0.2 \quad (d^i(t, y; s, y))^2 = \int_{\Lambda^i} \left\{ \frac{\exp(2\lambda s) - 1}{2\lambda} [\exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda s)]^2 + \frac{1 - \exp(-2\lambda(t-s))}{2\lambda} \right\} \pi_{y,y}(d\lambda),$$

$$1.0.3 \quad (d_X(t, y; s, z))^2 \leq \sum_{i \in J} (d^i(t, y; s, z))^2,$$

avec l'égalité si $K = K_0$; ceci correspond donc à la construction de trois fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck X^- , X^0 , X^+ partant de l'origine à valeurs dans E associées à l'espace de Hilbert K_0 et respectivement aux semi-groupes r^- , r^0 , r^+ ; la forme de la condition 0.3.2 permet d'ailleurs de définir X^0 et X^+ sur $\mathbb{R}^+$ tout entier alors que X^- ne sera défini que sur $[0, T]$. Les propriétés de comparaison des fonctions aléatoires gaussiennes ([2], corollaires 4.2.3) montrent que leur régularité implique celle de X et en fait lui est équivalente si $K = K_0$. Nous allons étudier successivement ces régularités, leur caractérisation fournira des conditions suffisantes pour la régularité de X et en fait la déterminera si $K = K_0$. On obtiendra :

THÉORÈME : *On suppose la situation K_0 -diagonalisable; alors pour que X ait une modification à trajectoires continues dans E sur $[0, T]$, il suffit que la condition 0.3.2 soit vérifiée et que la fonction J_1 :*

$$y \rightarrow \int_0^\infty \left[\int_{\lambda > \exp(x^2)} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda) \right]^{1/2} dx \text{ soit continue sur } F \text{ pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de } E, \text{ c'est-à-dire qu'il existe une partie compacte } K \text{ de } E \text{ telle que :}$$

$$\forall y \in F, \int_0^\infty \left[\int_{\lambda > \exp(x^2)} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda) \right]^{1/2} dx \leq \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle.$$

Supposons de plus F dense pour la topologie forte de E' , alors pour que X ait une modification à trajectoires bornées sur $[0, T]$, il suffit que la condition 0.3.2 soit vérifiée et que J_1 soit continue sur F pour la topologie forte, c'est-à-dire qu'il existe une partie bornée C de E telle que :

$$\forall y \in F, \int_0^\infty \left[\int_{\lambda > \exp(x^2)} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda) \right]^{1/2} dx \leq \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle.$$

Inversement si la situation est K -diagonalisable et si X a presque toutes ses trajectoires continues dans E sur $[0, T]$ (resp. bornées sur $[0, T]$), alors la condition 0.3.2 est vérifiée et J_1 est continue sur F pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de E (resp. pour la topologie forte).

Dans la suite de ce paragraphe, nous prouverons en plusieurs étapes le théorème 1.0.

1.1. La régularité de X^0

Pour étudier cette régularité, nous utilisons le théorème 0.4 et les propriétés de comparaison gaussiennes; notons en effet w une fonction

aléatoire de Wiener réelle normalisée usuelle ; la relation 1.0.2 fournit pour tout $S \in \mathbb{R}^+$:

$$\forall y \in F, \forall t, s \in [0, S], d_{\langle X^0, y \rangle}^2(t, s) \leq d_w^2(t, s)(1 + a/2)S \exp(2aS)\pi_{y,y}([-a, +a]),$$

et donc :

$$\mathbf{E} \sup_{[0, S] \cap \mathbb{Q}} \langle X^0, y \rangle \leq C(a, S)\pi_{y,y}([-a, +a])^{1/2};$$

la propriété 0.3.2 montre que le dernier facteur du second membre est continu sur F pour la topologie de la convergence compacte de sorte que X^0 vérifie la propriété 0.4.2 sur $[0, S]$. Le théorème 0.4 montre donc que X^0 a une modification à trajectoires continues dans E sur $\mathbb{R}^+$.

1.2. La régularité de X^-

On peut tenter d'étudier X^- suivant le même schéma que X^0 ; il permettrait seulement d'établir la régularité de X^- sur $[0, S]$ pour $S < T$ et serait donc inefficace. Pour obtenir un résultat plus précis, nous utiliserons le lemme :

LEMME : Soient (λ_n) une suite positive et (G_n) une suite d'éléments de E ; soit de plus $T \in \mathbb{R}^+$. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n T) G_n$ converge

dans E . Dans ces conditions, la série de fonctions $\left\{ t \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n t) G_n \right\}$ converge uniformément dans E sur $[0, T]$; de plus pour toute partie symétrique convexe et fermée B de E , on a en notant N_B la jauge de B :

$$1.2.1.1 \quad \sup_{t \in [0, T]} N_B \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n t) G_n \right\} \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} N_B \left\{ \sum_{n=1}^m \exp(\lambda_n T) G_n \right\}.$$

Démonstration : Pour tout couple croissant (m, n) d'entiers positifs et tout $t \in [0, T]$, la formule d'Abel montre que :

$$\sum_{k=n}^m \exp(\lambda_k t) G_k = \sum_{j=n}^m \left\{ \sum_{k=n}^j \exp(\lambda_k t) G_k \right\} \alpha_{m,j}$$

où les $\alpha_{m,j}$ sont positifs et les sommes $\sum_{j=n}^m \alpha_{m,j}$ sont inférieures ou égales à 1 ; on en déduit avec les notations de l'énoncé du lemme :

$$1.2.1.1 \quad \sup_{t \in [0, T]} N_B \left\{ \sum_{k=n}^m \exp(\lambda_k t) G_k \right\} \leq \sup_{j=n}^m N_B \left\{ \sum_{k=n}^j \exp(\lambda_k T) G_k \right\}.$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n T) G_n$ converge et que l'espace E est quasi-complet, il existe une partie symétrique convexe et compacte K de E telle que :

$$\sup_{n \in N} N_K \left\{ \sum_{k=1}^n \exp(\lambda_k T) G_k \right\} \leq 1;$$

la propriété 1.2.1.2 montre donc que pour tout $t \in T$, toutes les sommes partielles $\sum_{k=1}^n \exp(\lambda_k t) G_k$ appartiennent au compact K . La convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\lambda_n T) G_n$ implique aussi que ses sommes partielles forment une suite de Cauchy dans E ; pour tout voisinage symétrique convexe fermé V de l'origine dans E , il existe donc un entier positif n_0 tel que :

$$\forall m \geq n_0, \sum_{k=n_0}^m \exp(\lambda_k T) G_k \in V;$$

la formule 1.2.1.2 implique donc encore :

$$1.2.1.3 \quad \forall m \geq n_0, \forall t \in [0, T], \sum_{k=n_0}^m \exp(\lambda_k t) G_k \in V;$$

pour tout t appartenant à $[0, T]$, la suite $\left\{ \sum_{k=1}^n \exp(\lambda_k t) G_k, n \in \mathbb{N} \right\}$ est alors une suite de Cauchy relativement compacte dans l'espace quasi-complet E , elle converge; de plus puisque V est fermé, la formule 1.2.1.3 implique :

$$\forall m \geq n_0, \forall t \in [0, T], \sum_{k=m}^{\infty} \exp(\lambda_k t) G_k \in 2V,$$

c'est donc la convergence uniforme. La propriété 1.2.1.1 résulte alors de la relation 1.2.1.2 et le lemme est démontré.

1.2.2 Nous étudions maintenant la régularité de X^- à partir du lemme 1.2.1 et en supposant pour commencer que le spectre Λ^- est porté par une suite décroissante $(-l_n, n \in \mathbb{N})$:

$$a \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n \leq \dots,$$

de sorte que $I_{\lambda < -a} \pi_{y,z} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y, z) \delta_{-l_n}$ où $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y, z) \frac{\exp(2l_n T) - 1}{2l_n}$ est la covariance de $X^-(T)$.

Pour tout $n \geq 1$, $q_n(y, z)$ est la covariance d'un vecteur gaussien G_n à valeurs dans E et il existe un processus de Wiener W_n à valeurs dans E de covariance $(s \wedge t)q_n(y, z)$; nous choisissons la suite (W_n) indépendante et nous lui associons les deux séries aléatoires :

$$\sum (2l_n)^{-1/2} \exp(l_n t) W_n(1), \sum (2l_n)^{-1/2} \exp(l_n t) [W_n(1 - \exp(-2l_n t)) - W_n(1)].$$

Sous la condition 0.3.2, pour tout t appartenant à $[0, T]$, ces deux séries convergent presque sûrement dans E vers des sommes $Y(t)$ et $Z(t)$; le calcul montre que $Y + Z$ a même covariance et donc même loi que X^- . La fonction aléatoire Z est stationnaire et vérifie :

$$\forall y \in F, d_{\langle Z, y \rangle}^2(s, t) \leq |t - s| \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y, y) \leq |t - s| / T \mathbf{E} \langle X^-(T), y \rangle^2;$$

le théorème 5.2.6 de [2] qui est le pendant du théorème 0.4 pour les fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires montre alors que Z a une modification à trajectoires continues dans E . Le lemme 1.2.1 montre que Y a la même propriété sur $[0, T]$; il en est alors aussi de même pour $Y + Z$ et donc pour X^- ; plus précisément d'ailleurs, l'argumentation employée montre que pour toute partie symétrique convexe fermée B de E , on a :

$$1.2.2.1 \quad \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T] \cap \mathbf{Q}} N_B\{X^-(t)\} \leq C(T) \mathbf{E} N_B\{X(T)\}.$$

1.2.3 Nous étudions maintenant dans la généralité la régularité de X^- . Nous utilisons pour cela le spectre discret associé à la famille spectrale :

$$\pi' = \sum_{n=0}^{\infty} \pi\{[-n-1, -n]\} \delta_{-(n+1)},$$

et donc à une fonction aléatoire d'Ornstein-Uhlenbeck X' telle que :

$$1.2.3.1 \quad \forall y \in F, \mathbf{E} \langle X'(T), y \rangle^2 \leq \exp(T) \mathbf{E} \langle X^-(T), y \rangle^2,$$

$$1.2.3.2 \quad \forall s, t \geq 0, d_{X^-}(t, y; s, y) \leq d_{X'}(t, y; s, y);$$

nous pouvons alors appliquer à X' les résultats de l'alinéa précédent; par ailleurs les inégalités 1.2.3.1 et 1.2.3.2 impliquent :

$$1.2.3.3 \quad \forall s, t \in [0, T], \forall y, z \in F, d_{X^-}(t, y; s, z) \leq (1 + \exp(T/2)) d_{X^-(T)}(y, z) + d_{X'}(t, y; s, z).$$

La propriété 1.2.3.3 et la propriété 1.2.2.1 appliquée à X' montrent qu'il existe une partie symétrique convexe et compacte K de E telle que :

$$1.2.3.4 \quad \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} N_K \{X^-(t)\} \leq c[\mathbf{E} N_K \{X^-(T)\} + \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} N_K \{X'(t)\}];$$

de même la propriété 1.2.3.2 et l'existence d'une modification de X' à trajectoires continues dans E sur $[0, T]$ montrent que pour tout y appartenant à E' , la fonction aléatoire réelle : $t \rightarrow \langle X^-(t), y \rangle$ a une modification à trajectoires continues sur $[0, T]$. On sait ([2], théorème 4.2.1) que cette propriété jointe à la relation 1.2.3.4 suffit pour que X^- ait une modification à trajectoires continues dans E sur $[0, T]$. Pour résumer, nous pouvons donc énoncer le résultat partiel ;

1.2.4 PROPOSITION : *On suppose la situation K_0 -diagonalisable et la propriété 0.3.2 vérifiée ; dans ces conditions, les fonctions aléatoires X^0 et X^- ont des modifications à trajectoires continues dans E sur $[0, T]$.*

1.3. La régularité de X^+

La proposition 1.2.4 montre que dans les conditions de notre étude, les singularités résultent de la seule contribution de Λ^+ et que nous pouvons supposer $a = 1$. Notre analyse utilisera le théorème 0.4 et la relation 1.0.4 (pour $i = +$) qui fournit pour tout y appartenant à F :

$$1.3.1 \quad d_{\langle X^+, y \rangle}^2(s, t) = \int_{\Lambda^+} \left\{ \frac{\exp(2\lambda s) - 1}{2\lambda} [\exp(-\lambda t) - \exp(-\lambda s)]^2 + \frac{1 - \exp(-2\lambda(t - s))}{2\lambda} \right\} \pi_{y, y}(d\lambda).$$

Pour tout λ appartenant à Λ^+ et tout couple (s, t) de nombres positifs, l'intégrand $f(\lambda, s, t)$ du second membre ci-dessus peut s'encadrer sous la forme :

$$1.3.2 \quad \frac{e - 1}{2e} [\lambda^{-1} \wedge |t - s|] \leq f(\lambda, s, t) \leq 2[\lambda^{-1} \wedge |t - s|];$$

la fonction $[\lambda^{-1} \wedge |t - s|]$ étant une fonction croissante de $(t - s)$, les propriétés gaussiennes ([1]) montrent donc que pour tout y appartenant à F , on a :

$$1.3.3 \quad cJ(y) \leq \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} \langle X^+(t), y \rangle \leq CJ(y)$$

où c et C sont des constantes positives et finies et où $J(y)$ est défini par :

$$1.3.4 \quad J(y) = \int_0^\infty \left[\int_{\lambda > 1} [\lambda^{-1} \wedge \exp(-x^2)] \pi_{y,y}(d\lambda) \right]^{1/2} dx,$$

de sorte que sa grandeur est déterminée par celles des deux intégrales :

$$1.3.5 \quad J_1(y) = \int_0^\infty \left[\int_{\lambda > \exp(x^2)} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda) \right]^{1/2} dx,$$

$$1.3.6 \quad J_2(y) = \int_0^\infty \left[\exp(-x^2) \pi_{y,y} \{[1, \exp(x^2)]\} \right]^{1/2} dx.$$

Nous comparons J_1 et J_2 . On a en majorant J_2 :

$$\begin{aligned} J_2(y) &\leq \int_0^\infty \exp(-x^2/2) \left[\sum_{k=0}^{x^2} \pi_{y,y} \{[e^k, e^{k+1}]\} \right]^{1/2} dx \\ &\leq \int_0^\infty \exp(-x^2/2) \sum_{k=0}^{x^2} \left[\pi_{y,y} \{[e^k, e^{k+1}]\} \right]^{1/2} dx, \\ J_2(y) &\leq \sum_{k=0}^\infty \left[\pi_{y,y} \{[e^k, e^{k+1}]\} \right]^{1/2} \int_{\sqrt{k}}^\infty \exp(-x^2/2) dx \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty \left[\pi_{y,y} \{[e^k, e^{k+1}]\} \right] \left\{ (\pi/2) \wedge \frac{e^{-k}}{k} \right\}^{1/2}; \end{aligned}$$

on a aussi en minorant J_1 :

$$\begin{aligned} J_1(y) &\geq \sum_{k=0}^\infty \left[\pi_{y,y} \{[e^{k+1}, e^{k+2}]\} \right]^{1/2} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) e^{-(k+2)/2} \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \left[\pi_{y,y} \{[e^k, e^{k+1}]\} \right]^{1/2} \frac{e^{-k/2}}{2\sqrt{ek}}; \end{aligned}$$

en regroupant, on en déduit :

$$1.3.7 \quad J_2(y) \leq 2\sqrt{e} J_1(y) + \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \left[\int_{\lambda \geq 1} \lambda^{-1} \pi_{y,y}(d\lambda) \right]^{1/2},$$

où sous la condition 0.3.2, le second terme du second membre est une fonction continue de y pour la topologie de la convergence compacte.

L'ensemble de ces évaluations et le théorème 0.4 fournissent donc :

1.3.8 PROPOSITION : *On suppose la situation K_0 -diagonalisable et la propriété 0.3.2 vérifiée; dans ces conditions, la fonction aléatoire X^+ a une modification à trajectoires continues dans E sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si J_1 est continue sur F pour la topologie de la convergence compacte. Supposons de plus F dense pour la topologie forte de E' , alors X^+ a une modification à trajectoires localement bornées dans E sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si J_1 est continue sur F pour la topologie forte.*

Le théorème 1 résulte alors immédiatement des propositions 1.2.4 et 1.3.8 et de l'argumentation 1.0.

II. DES CRITÈRES EXPLICITES DE RÉGULARITÉ

2.0. Nous supposons dans ce paragraphe que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ contenant sa base canonique; F est l'espace $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_0$ de suites de nombres réels à support fini et X est la fonction d'Ornstein-Uhlenbeck partant de l'origine associée à l'équation différentielle :

$$2.0.1 \quad dX = -\Lambda X dt + \Sigma dW,$$

où $\Lambda = (\lambda_n, n \in \mathbb{N})$ et $\Sigma = (\sigma_n, n \in \mathbb{N})$ sont des opérateurs diagonaux positifs et W est un processus de Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ normalisé par la l_2 -norme. Dans ces conditions, la situation est K -diagonale, L est égal à Λ et à Λ^* , $r(u)$ est égal à $\exp(-u\Lambda)$ pour tout $u \geq 0$, la covariance Γ est définie par :

$$\Gamma(t, y; s, z) = \int_0^{s \wedge t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2 y_n^2 \exp\{\lambda_n(2u - s - t)\} \right] du$$

et les mesures spectrales sont définies par :

$$2.0.2 \quad \pi_{y,y} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2 y_n^2 \delta_{\lambda_n},$$

de sorte que X est à trajectoires dans E sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si (condition 0.3.2) :

$$2.0.3 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2 (\lambda_n^{-1} \wedge 1) y_n^2 \text{ est la covariance d'un vecteur gaussien à valeurs dans } E,$$

et ces trajectoires sont continues ou localement bornées suivant la mode de continuité dans F de J_1 définie par :

$$2.0.4 \quad J_1(y) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{\lambda_n > \exp(x^2)\}} \frac{\sigma_n^2 y_n^2}{\lambda_n} \right]^{1/2} dx$$

En particulier, on peut énoncer un résultat général :

2.0.5 THÉORÈME : *On suppose que l'application : $y = (y_n) \rightarrow |y| = (|y_n|)$ est une application de E' dans E' continue pour la topologie de la convergence compacte; on suppose aussi que la condition 2.0.3 est vérifiée; alors pour que X ait une modification à trajectoires dans E continues sur $\mathbb{R}^+$, il suffit que $\left(\sigma_n \left[\frac{\log^+ \lambda_n}{\lambda_n}\right]^{1/2}, n \in \mathbb{N}\right)$ soit un élément de E .*

Ce théorème s'appliquera par exemple dans les l_p , $p \geq 1$; pour $p = 2$, il précise un résultat énoncé dans [5] sous des hypothèses supplémentaires de monotonie des coefficients.

Démonstration : elle résulte de la majoration :

$$\int_0^\infty \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{\sigma_n^2 y_n^2}{\lambda_n} I_{\{\lambda_n > \exp(x^2)\}} \right]^{1/2} dx \leq \sum_{n=0}^\infty \sigma_n \left[\frac{\log^+ \lambda_n}{\lambda_n} \right]^{1/2} |y_n|.$$

2.1. La continuité de X dans l_p , $p \in [2, \infty[$

Nous énonçons maintenant le résultat le plus significatif de ce travail; il généralise un théorème présenté dans [3] et concernant le seul cas $p = 2$.

THÉORÈME : *On suppose $p \in [2, \infty[$; on suppose de plus la condition 2.0.3 vérifiée, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *X a une modification ayant ses trajectoires continues dans l_p sur $\mathbb{R}^+$,*

(ii) *X a une modification ayant ses trajectoires localement bornées dans l_p sur $\mathbb{R}^+$,*

(iii) *L'intégrale $\int_0^\infty \{\log^+(\lambda(x))\}^{p/2} x^{p/2-1} dx$ où $\lambda(x) = \sup\{\lambda_k : \sigma_k^2 > \lambda_k x\}$ est convergente.*

Démonstration : il suffit de faire la preuve si tous les λ_k sont supérieurs à 1; nous procéderons en deux étapes, nous commençons par évaluer la borne supérieure de $J_1(y)$ sur la boule unité de l_q où q est conjugué de p .

(a) On pose pour tout i appartenant à $\mathbb{Z}$, $K_i = \{k \in \mathbb{N} : \sigma_k^2 > \lambda_k 2^{-i}\}$; la suite (K_i) est donc une suite croissante d'ensembles qui sont tous finis (condition 2.0.3); on pose aussi :

$$I_0 = \{i \in \mathbb{Z} : K_i \neq \emptyset\}, L(i) = \sup\{\lambda_k : k \in K_i\} \text{ si } i \in I_0, L(i) = 1 \text{ sinon,} \\ I_1 = \{i \in \mathbb{Z} : K_i - K_{i-1} \neq \emptyset\}, I_2 = \{i \in \mathbb{Z} : L(i-1) < L(i)\}.$$

Pour tout y appartenant à l_q , nous majorons $J_1(y)$; en découpant l'intervalle d'intégration suivant les $(\log L(i))^{1/2}$, on obtient :

$$J_1(y) \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left[\{(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}\} \right. \\ \left. \left\{ \sum_{i \geq j, k \in \mathbf{N}} (\sigma_k^2 y_k^2) / \lambda_k I_{\{k \in K_i - K_{i-1}\}} \right\}^{1/2} \right],$$

et donc en posant $z_i = \left[\sum_{k \in K_i - K_{i-1}} y_k^2 \right]^{1/2}$,

$$J_1(y) \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left[\{(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}\} \sum_{i \geq j} 2^{(1-i)/2} z_i \right],$$

$$2.1.0 \quad j_1(y) \leq \sum_{i \in I_1} 2^{(1-i)/2} z_i (\log L(i))^{1/2};$$

on remarque alors que, q étant inférieur ou égal à 2, la l_q -norme de z est inférieure ou égale à celle de y ; utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit :

$$2.1.1 \quad J_1(y) \leq \left\{ \sum_{i \in \mathbf{Z}} (2^{1-i} \log L(i))^{p/2} \right\}^{1/p} \|y\|_q = M \|y\|_q.$$

Nous minorons maintenant la borne supérieure de $J_1(y)$ sur la boule unité de l_q . Fixons un nombre $\varepsilon \in]0, 1[$; pour tout j appartenant à I_2 , il existe un élément k_j de $K_j - K_{j-1}$ tel que

$$(\log L(j-1))^{1/2} + (1-\varepsilon)[(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}] \leq (\log \lambda_{k_j})^{1/2} \\ \leq (\log L(j))^{1/2};$$

dans des conditions, pour tout x appartenant à l'intervalle :

$$[(\log L(j-1))^{1/2}, (\log L(j-1))^{1/2} + (1-\varepsilon)[(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}],$$

on aura :

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{\lambda_n > \exp(x^2)\}} \frac{\sigma_n^2 y_n^2}{\lambda_n} \right]^{1/2} > \left[\frac{\sigma_{k_j}^2 y_{k_j}^2}{\lambda_{k_j}} \right]^{1/2} > 2^{-j/2} |y_{k_j}|.$$

Prenons alors une suite arbitraire $(z_j, j \in I_2)$ à support fini, en lui associant l'élément y de l_q défini par

$$y_k = 0 \quad \text{si} \quad k \notin \{k_j, j \in I_2\}, y_{k_j} = z_j,$$

on aura :

$$J_1(y) \geq \sum_{j \in I_2} (1 - \varepsilon) 2^{-j/2} [(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}] z_j;$$

en maximisant le second membre sur la boule unité de l_q (relativement à z et donc relativement à y), on en déduit pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$:

$$\sup_{\|y\|_q \leq 1} J_1(y) \geq (1 - \varepsilon) \left[\sum_{j \in \mathbf{Z}} \{2^{-j/2} [(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}] \}^p \right]^{1/p}$$

et donc finalement :

2.1.2

$$\sup_{\|y\|_q \leq 1} J_1(y) \geq \left[\sum_{j \in \mathbf{Z}} \{2^{-j/2} [(\log L(j))^{1/2} - (\log L(j-1))^{1/2}] \}^p \right]^{1/p} = m.$$

Nous comparons enfin les seconds membres des relations 2.11 et 2.12; l'inégalité de Minkowski dans l_p fournit pour tout entier n :

$$\left\{ \sum_{i \leq n} (2^{-i} \log L(i))^{p/2} \right\}^{1/p} \leq \left[\sum_{i \leq n} \{2^{-i/2} [(\log L(i))^{1/2} - (\log L(i-1))^{1/2}] \}^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i \leq n} \{2^{-i} (\log L(i-1))\}^{p/2} \right]^{1/p}$$

et donc :

$$2.1.3 \quad m \leq M \leq 2(\sqrt{2} + 1)m.$$

Finalement, nous évaluons M sous forme intégrale; on a immédiatement :

2.1.4

$$\int_{\mathbf{R}^+} \{\log^+(\lambda(x))\}^{p/2} x^{p/2-1} dx \leq M^p \leq 2^p \int_{\mathbf{R}^+} \{\log^+(\lambda(x))\}^{p/2} x^{p/2-1} dx.$$

(b) Nous procédons maintenant à la preuve : Supposons la propriété (ii) vérifiée, alors J_1 est continue pour la topologie forte de l_q et la relation 2.1.2 montre que m est fini; la relation 2.1.3 montre que M est aussi fini; la relation 2.1.4 implique alors la propriété (iii) est aussi vérifiée.

Supposons inversement que la propriété (iii) soit vérifiée; alors la relation 2.1.4 montre que M est fini; il existe alors une suite positive strictement croissante et divergente (a_i) telle que la somme de la série $\sum_{i \in \mathbf{Z}} [a_i 2^{1-i} \log L(i)]^{p/2}$ soit inférieure ou égale à $2M$; la relation 2.1.0 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz montrent que pour tout y appartenant à l_q ,

$$J_1(y) \leq 2M \left[\sum_{i \in \mathbf{Z}} \left\{ a_i^{-q} \sum_{k \in K_i - K_{i-1}} |y_k|^q \right\} \right]^{1/q},$$

de sorte que, les ensembles K_i étant finis, J est continue sur l_q pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de l_p et la propriété (i) est vérifiée; le théorème est donc démontré.

2.1.5 COROLLAIRE : *Supposons la suite (σ_k^2/λ_k) décroissante et $p \in [2, \infty[$. Pour que X ait une modification ayant toutes ses trajectoires continues dans l_p , il suffit que la condition 2.0.3 soit vérifiée et que de plus la suite $((k+1)^{-2/p} \cdot \log^+ \lambda_k, k \in \mathbb{N})$ soit bornée.*

L'intégrable figurant dans la propriété (iii) du théorème se majore alors en effet par :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1) L^{p/2} \int_{\sigma_{k+1}^2/\lambda_{k+1}}^{\sigma_k^2/\lambda_k} x^{(p-2)/2} dx \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 2 \frac{k+1}{p} [(\sigma_k^2/\lambda_k)^{p/2} - (\sigma_{k+1}^2/\lambda_{k+1})^{p/2}] L^{p/2} \leq 2 \frac{L^{p/2}}{p} \sum_{k \in \mathbb{N}} (\sigma_k^2/\lambda_k)^{p/2} < \infty \text{ (condition 2.0.3)}.$$

III. APPENDICE : SUR CERTAINS PROBLÈMES VARIATIONNELS

Dans [3] et dans le cas où $p = 2$, les éléments de preuve du théorème 2.1 étaient explicitement liés à la valeur d'un problème de calcul de variation dans l_2 . Nous énonçons ici le résultat correspondant pour $p \geq 2$. Nous utiliserons pour cela les notations suivantes : q appartient à $]1, 2]$ et est l'exposant conjugué de p , B_q est la boule unité de l_q ; pour toute suite $(s_m, m \geq 1)$ non négative et tout x appartenant à $\mathbb{R}^+$, nous posons :

$h_s(x) = \sup\{m \geq 1 : s_m > x\}$ si cet ensemble n'est pas vide, $h_s(x) = 0$ sinon,

$$J_q(s) = \left[\int_0^\infty h_s^p(x) x^{p/2-1} dx \right]^{1/p}, M_q(s) = \sup_{y \in B_q} \left(\sum_{n=1}^\infty \left[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \right]^{1/2} \right).$$

3.1 COROLLAIRE : *Soit $s = (s_m)$ une suite non négative; alors l'application : $y \rightarrow \left(\sum_{n=1}^\infty \left[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \right]^{1/2} \right)$ est bornée dans B_q ou continue dans l_q si et seulement si $J_q(s)$ est finie. De plus il existe des constantes $c > 0$ et C finie telles que pour tout q appartenant à $]1, 2]$, on ait :*

$$cJ_q(s) \leq M_q(s) \leq CJ_q(s).$$

Démonstration : Pour tout y appartenant à l_q , posons :

$$\pi_{y,y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 y_m^2 \delta_{\lambda(m)}, \quad \text{où } \lambda(m) = \exp(m^2) \text{ et } \sigma_m^2 = s_m \exp(m^2);$$

on a alors :

$$\int_0^{\infty} \left[\int_{\lambda > \exp(x^2)} (1/\lambda) \pi_{y,y}(d\lambda) \right]^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \right]^{1/2},$$

et la première partie de l'énoncé résulte directement du théorème 2.1, la preuve de ce théorème et ses inégalités fournissant l'encadrement annoncé.

3.2. En fait pour $p = q = 2$, on peut calculer explicitement la valeur exacte de $M_2(s)$; pour cela et pour toute suite non négative $s = (s_m, m \geq 1)$, nous noterons $t(s)$ la suite $(t_m = 1/s_m, m \geq 1)$ des inverses (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$) que nous prolongeons en posant $t_0 = 0$. Nous utiliserons dans la suite certaines règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, en particulier : $\forall u \in \overline{\mathbb{R}}^+, \infty - u = \infty; \infty < \infty; \forall u \in \mathbb{R}^+, (u/\infty) = 0$.

THÉORÈME : (a) *Supposons la suite $t(s)$ convexe et strictement croissante; on a alors :*

$$3.2.1 \quad M_2(s) = \left[\sum_{t_m < \infty} \frac{1}{t_m - t_{m-1}} \right]^{1/2}.$$

(b) *Dans le cas général, si $M_2(s)$ est fini alors $(n^2 s_n, n \geq 1)$ est bornée.*

(c) *Dans le cas général et si la suite $(n^2 s_n, n \geq 1)$ est bornée, alors il existe une suite s' supérieure ou égale à s telle que $t(s')$ soit convexe et strictement croissante et que de plus $M_2(s) = M_2(s')$.*

3.2.2 REMARQUE : Soit $s = (s_m, m \geq 1)$ une suite non-négative; le théorème exprime que pour déterminer $M_2(s)$, il suffit d'utiliser l'algorithme suivant :

Poser $s_0 = \infty$, poser $t = (1/s)$; construire le graphe de t , construire son enveloppe convexe qui est le graphe d'une suite t' ; calculer

$$\left\{ \left[\sum_{t'_m < \infty} \frac{1}{t'_m - t'_{m-1}} \right]^{1/2} \right\}$$

La démonstration du théorème utilisera le lemme :

3.2.3 LEMME : Soient $s = (s_m, m \geq 1)$ et $s' = (s'_m, m \geq 1)$ deux suites non-négatives; on suppose que $t' = t(s')$ est une suite convexe et strictement croissante; soit de plus $\{m(k), 0 \leq k \leq K\}$ une suite finie

et strictement croissante d'entiers telle que $m(0) = 0$ et que pour tout $k \in [1, K]$, $t_{m(k)} = t'_{m(k)}$. Dans ces conditions, on a aussi :

$$M_2(s) \geq \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}} \right\}^{1/2}.$$

Démonstration du lemme : il suffit de faire la preuve si $t_{m(K)}$ est fini. Nous fixons un nombre positif C et pour tout $k \in [1, K+1]$, nous posons $\rho_{m(k)} = C \frac{m(k) - m(k-1)}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}}$, nous posons aussi $\rho_{m(K+1)} = 0$. La convexité de t' et sa croissance montrent que $(\rho_{m(k)}, 1 \leq k \leq K)$ est positive et décroissante, nous pouvons donc poser $\forall k \in [1, K], y_{m(k)} = [t_{m(k)}(\rho_{m(k)}^2 - \rho_{m(k+1)}^2)]^{1/2}; \forall m \notin \{m(k), k \in [1, K]\}, y_m = 0$.

Nous obtiendrons alors :

$$\sum_{k=1}^K y_{m(k)}^2 = \sum_{k=1}^K C^2 \frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}},$$

de sorte qu'en posant :

$$C = \left[\sum_{k=1}^K \frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}} \right]^{-1/2},$$

$(y_m, m \geq 1)$ est un élément de B_2 . Nous aurons alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{m=n}^{\infty} s_m y_m^2 &= \sum_{m(k) \geq n} s_{m(k)} y_{m(k)}^2 = \sum_{m(k) \geq n} s_{m(k)} t_{m(k)} [\rho_{m(k)}^2 - \rho_{m(k-1)}^2] \\ &= \rho_{m(k(n))}^2 \end{aligned}$$

où $k(n)$ est la borne inférieure de $\{k : m(k) \geq n\}$. On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \right]^{1/2} &= \sum_{k=1}^K \left[\sum_{m(k-1) < n \leq m(k)} \rho_{m(k)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^K [m(k) - m(k-1)] \rho_{m(k)}; \end{aligned}$$

Vus les choix des ρ et de C , cette dernière somme est égale au second membre de l'énoncé, c'est donc le résultat.

3.2.4 Démonstration du théorème : (a) Supposons la suite $t(s)$ convexe et strictement croissante, alors le lemme montre que $M_2(s)$ est supérieure ou égale au deuxième membre de 3.2.1. Inversement sous la même hypothèse, supposons de plus que la série du deuxième membre de 3.2.1 soit convergente; on a alors pour tout y appartenant à l_2 et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \right]^{1/2} \leq \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left[\sum_{n \geq 1} (t_n - t_{n-1}) \sum_{m \geq n} s_m y_m^2 \right] \right\}^{1/2};$$

le dernier facteur ci-dessus s'écrit en permutant les sommations :

$$\sum_{m \geq 1} s_m y_m^2 \sum_{n=1}^m (t_n - t_{n-1}) = \sum_{m \geq 1} y_m^2;$$

on a donc :

$$[M_2(s)]^2 \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t_n - t_{n-1}},$$

de sorte que la première partie du théorème est démontrée.

(b) Dans le cas général, supposant $M_2(s)$ fini, à tout $n \geq 1$ nous pouvons associer le $n^{\text{ième}}$ élément y de la base canonique de l_2 ; $M_2(s)$ sera alors minoré par $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m \geq k} s_m y_m^2 \right]^{1/2} = n[s_n]^{1/2}$, d'où le résultat énoncé.

(c) Sous l'hypothèse indiquée, soit G le graphe de $t(s)$; alors son enveloppe convexe G' est le graphe d'une suite t' strictement croissante, convexe, inférieure ou égale à $t(s)$, telle que $t'_0 = 0$; posons pour tout $m \geq 1$, $s'_m = 1/t'_m$, alors t' est égal à $t(s')$, s' est supérieur ou égal à s et il existe une suite croissante $\{m(k), k \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $m(0) = 0$ et que de plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}, m(k+1) > m(k), t'_{m(k)} = t_{m(k)}, t' \text{ affine sur } [m(k), m(k+1)];$$

on a alors d'une part, puisque $s' \leq s$ et en appliquant à s' le résultat (a) :

$$[M_2(s)]^2 \leq [M_2(s')]^2 = \sum_{t'_m < \infty} \frac{1}{t'_m - t'_{m-1}} = \sum_{t_{m(k)} < \infty} \frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}};$$

on a aussi d'autre part, en appliquant à s le résultat du lemme :

$$[M_2(s)]^2 \geq \sum_{t_{m(k)} < \infty} \frac{[m(k) - m(k-1)]^2}{t_{m(k)} - t_{m(k-1)}},$$

d'où l'égalité et le dernier résultat du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] X. FERNIQUE, Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes, *Lect. Notes Math.* **480**, Springer, 1975.
- [2] X. FERNIQUE, Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lunisiens, *Expositiones Math.*, à paraître
- [3] X. FERNIQUE, la régularité des fonctions aléatoires d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans l_2 ; le cas diagonal, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **309**, Série I, p. 59-62, 1989.
- [4] B. SCHMULAND, Regularity of l_2 -valued Ornstein-Uhlenbeck stationary processes, *C.R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Canada*, **10**, 2, 119-124, 1988.
- [5] I. ISCOE, M.B. MARCUS, D McDONALD, M. TALAGRAND et J. ZINN, Continuity of l_2 -valued Ornstein-Uhlenbeck, *Ann. Prob.*, à paraître.

(Manuscrit reçu le 12 juin 1989;
révisé le 12 janvier 1990)