ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN BERTOIN

Applications de la théorie spectrale des cordes vibrantes aux fonctionnelles additives principales d'un brownien réfléchi

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 3 (1989), p. 307-323

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_3_307_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 25, n° 3, 1989, p. 307-323. *Probabilités et Statistiques*

Applications de la théorie spectrale des cordes vibrantes aux fonctionnelles additives principales d'un brownien réfléchi

par

Jean BERTOIN

Laboratoire de Probabilités (L.A. 224), tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On caractérise, à l'aide de la théorie spectrale des cordes vibrantes, les transformées de Fourier des processus à accroissements indépendants stationnaires définis par les fonctionnelles additives principales d'un Brownien réfléchi et prises en l'inverse de son temps local.

ABSTRACT. — Using Krein's spectral theory of vibrating strings, we characterize the Fourier's transforms of the processes with homogeneous independent increments defined by the principal additive functionals of a reflected Brownian motion and taken at the inverse of its local time.

Key words : Additive functionals, inverse of local time, reflected Brownian motion, Krein's theory.

INTRODUCTION

Soit X un mouvement Brownien réfléchi en 0, $\{L_t^a : a \in \mathbb{R}_+, t \geqq 0\}$ une version bicontinue de ses temps locaux, et τ l'inverse continu à droite de

Classification A.M.S. : Primary 60 J 55, secondary 60 E 07, 34 B 25.

L^0: $\tau_t = \inf\{s : L_s^0 > t\}$. Désignons par $\mathscr{M}$ l'ensemble des fonctions $m: [0, +\infty] \to [0, +\infty]$, croissantes, continues à gauche, $m(0)=0$, $m(x) \not\equiv 0$ et $m(x) \not\equiv +\infty$ sur $]0, +\infty[$; et par $\mathscr{M}_0 = \{m \in \mathscr{M} : m(x) > 0$ si $x > 0\}$.

Pour toute m de $\mathscr{M}$, notons

$$Y_t^m = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} L_t^a \, dm(a)$$

qui est une fonctionnelle additive croissante de X. Le processus $\{Y_{\tau_t}^m : t \geqq 0\}$ est alors un processus à accroissements indépendants stationnaires (p. a. i. s.) croissant; et la théorie spectrale des cordes vibrantes, due à Krein, a permis à Knight [10] et à Kotani et Watanabe [11] de calculer, en fonction de m, la mesure de Lévy de ce processus (en fait, ces auteurs ont étudié l'inverse du temps local en zéro de diffusions généralisées, mais leur résultat et celui présenté au paragraphe I sont équivalents, comme on le voit aisément grâce à un changement de temps).

Par ce procédé, on peut représenter par exemple les processus stables (unilatéraux) d'exposant ν, pour $\nu \in]0, 1[$; mais pas pour $\nu \in [1, 2[$. Néanmoins, si au lieu de se limiter aux fonctionnelles additives croissantes, on considère plus généralement des fonctionnelles additives définies comme des valeurs principales associées aux temps locaux de X, on est alors capable de représenter *tous* les processus stables (Biane et Yor [2]). Il est alors intéressant de se demander quelle classe de p. a. i. s. on obtient quand on arrête en τ_t les fonctionnelles additives principales :

$$Z_t^n = \frac{1}{2} \text{v. p.} \int_0^{+\infty} L_t^a \, dn(a)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^{+\infty} L_t^a \, dn(a) + n(\varepsilon) L_t^0 \qquad (n \in \mathscr{N}) \quad (0.1)$$

où $\mathscr{N}$ désigne l'ensemble des fonctions $n: [0, +\infty[\to [-\infty, 0]$, continues à gauche, croissantes, $n(0) = -\infty$, $n \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, dx)$, et $n(x) \not\equiv 0$ sur $]0, +\infty[$. Il est à noter que Z^n est une fonctionnelle additive localement d'énergie nulle au sens de Fukushima [7], mais n'est à variation bornée que si $n(0+) \neq -\infty$.

Dans un premier paragraphe, nous exposerons les éléments de la théorie de Krein dont nous aurons besoin par la suite, et en déduirons le résultat de Knight, Kotani et Watanabe. Dans le paragraphe II, nous montrerons que la formule (0.1) a bien un sens pour toute n de $\mathscr{N}$, et donnerons une première expression de la transformée de Fourier de $Z_{\tau_t}^n$ $(t \geqq 0)$. Dans le paragraphe III, nous construirons une bijection $n \mapsto \overset{\blacksquare}{n}$ de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{M}_0$ telle que, pour tout α réel non nul et $t \geqq 0$,

$$\log E(\exp i\alpha Z_{\tau_{2t}}^n) \log E(\exp i\alpha Y_{\tau_{2t}}^{\overset{\square}{n}}) = t^2 \alpha^2, \qquad (0.2)$$

(où l'on a convenu $e^{i\alpha\infty}=0$). Cette relation, en ramenant l'étude des fonctionnelles additives principales à celle des fonctionnelles additives croissantes, nous permettra de caractériser par leurs transformées de Fourier, les p.a.i.s. obtenus par le changement de temps par τ_t des fonctionnelles additives principales, et en particulier de déterminer leur mesure de Lévy.

I. LA THÉORIE DE KREIN ET SES APPLICATIONS AUX FONCTIONNELLES ADDITIVES CROISSANTES

Si $m \in \mathcal{M}$ (on dit alors que m est une corde), on note $c=\inf\{x : m(x)>0\}$, et $l=\operatorname{Sup}\{x : m(x)<+\infty\}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, on note $D(x, \omega)$ la solution continue sur $[0, l]$ de $dD^+ = \omega D\, dm$, avec $D^-(0, \omega) = -1$, $D \in L^2([0, l], dm)$, $D^-(l)=0$ si $m(l)+l=+\infty$ et $\int_0^{l-} x^2\, dm(x) < +\infty$, et $D(l)=0$ si $m(l)+l<+\infty$; et où D^+ (respectivement D^-) désigne la dérivée à droite (respectivement à gauche) de D. Le résultat essentiel suivant est établi dans Krein [12] et dans Dym et McKean [6].

THÉORÈME I.1 (Krein). — (*i*) *Pour toute m de $\mathcal{M}$, il existe une unique fonction* $\sigma : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, *croissante, continue à gauche*, $\sigma \not\equiv 0$, $\sigma(0)=0$ *et* $\int_0^{+\infty} d\sigma(\zeta)/(1+\zeta) < +\infty$ *telle que, pour tout* $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$,

$$D(0, \omega) = c + \int_0^{+\infty} d\sigma(\zeta)/(\zeta+\omega).$$

σ *s'appelle la fonction spectrale de m.*

(ii) *Réciproquement, si* $\sigma : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *est une fonction croissante, continue à gauche, nulle en zéro, non identiquement nulle, et telle que* $\int_0^{+\infty} d\sigma(\zeta)/(\zeta+1) < +\infty$, *il existe une unique corde m de* $\mathcal{M}_0$ *dont* σ *soit la fonction spectrale.*

Il est en général difficile d'exprimer σ en fonction de m (ou l'inverse); mais les calculs peuvent être simplifiés grâce aux règles de transformation suivantes (Krein [13]) :

PROPOSITION I.2. — *Si* $m \in \mathcal{M}$, *et si* σ *est sa fonction spectrale, alors*

(i) $\forall a > 0$, $\tilde{\sigma}(x) = a\,\sigma(x)$ *est la fonction spectrale de*

$$\tilde{m}(x) = a^{-1}\, m(x a^{-1})$$

(ii) *Si* $m(+\infty) < +\infty$, *alors* $\sigma(0^+) = 1/m(+\infty)$, *et pour tout*

$\gamma \geqq -1/m(+\infty)$, $\hat{\sigma}(x)=\sigma(x)+\gamma \mathrm{H}(x)$ (*où* $\mathrm{H}=\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ *est la fonction de Heavyside*) *est la fonction spectrale de*

$$\hat{m}(x)=m(t)(1+\gamma m(t))^{-1}, \text{ où } x=\int_0^t (1+\gamma m(s))^2\, ds.$$

(iii) *Si* $\check{m}$ *est l'inverse continu à gauche de* m (*on dit alors que* $\check{m}$ *est la corde duale de* m), *et si* $\check{\sigma}$ *est la fonction spectrale de* $\check{m}$, *alors, pour tout* $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\left(m(0^+)+\int_0^{+\infty} d\check{\sigma}(\zeta)/(\zeta+\omega)\right)^{-1}=\omega\left(c+\int_0^{+\infty} d\sigma(\zeta)/(\zeta+\omega)\right).$$

Si nous admettons pour l'instant le

LEMME I.3. — *Pour tout* $\omega \in \mathbb{C}_+^* = \{\omega \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\omega) \geqq 0$ *et* $\omega \neq 0\}$, $\mathrm{D}(.,\omega)$ *est l'unique solution bornée sur* $[0, l]$ *de* $d\mathrm{D}^+ = \omega \mathrm{D}\, dm$ *avec* $\mathrm{D}^-(0,\omega)=-1$ *et* $\mathrm{D}(l)=0$ *si* $m(l)+l<+\infty$.

dont la preuve figure en Appendice, le calcul stochastique nous permet de calculer la transformée de Laplace de $\mathrm{Y}_{\tau_t}^m$ (*c.f.* Jeulin et Yor [8]): pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathrm{D}(\mathrm{X}_s, \lambda)\exp\left\{\frac{1}{2\mathrm{D}(0,\lambda)}\mathrm{L}_s^0-\lambda \mathrm{Y}_s^m\right\}$$

est une martingale locale continue, bornée sur $\{s \leqq \tau_{2t} \wedge \inf\{u : \mathrm{X}_u = l\}\}$, et le théorème d'arrêt entraîne

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{t}{\mathrm{D}(0,\lambda)}-\lambda \mathrm{Y}_{\tau_{2t}}^m\right\}\right]=1,$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\exp-\lambda \mathrm{Y}_{\tau_{2t}}^m] &= \exp-\frac{t}{\mathrm{D}(0,\lambda)}\\ &= \exp\left\{-t\left(c+\int_0^{+\infty} d\sigma(\zeta)/(\zeta+\lambda)\right)^{-1}\right\}. \qquad (\mathrm{I}.1)\end{aligned}$$

En suivant Kotani et Watanabe [11], nous pouvons alors calculer la mesure de Lévy de $\mathrm{Y}_{\tau_{2t}}^m$: si $\check{\sigma}$ est la fonction spectrale associée à la corde duale $\check{m}$, d'après la proposition I.2 (iii),

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\exp-\lambda \mathrm{Y}_{\tau_{2t}}^m] &= \exp\left\{-t\left(\lambda m(0^+)+\lambda\int_0^{+\infty} d\check{\sigma}(\zeta)/(\zeta+\lambda)\right)\right\}\\ &= \exp\left\{-t\left(\lambda m(0^+)+\check{\sigma}(0^+)+\int_{0^+}^{+\infty} d\check{\sigma}(\zeta)\,\zeta\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta+\lambda}\right)\right)\right\}\end{aligned}$$

$$=\exp\left\{-t\left(\lambda m(0^+)+\check{\sigma}(0^+)+\int_{0^+}^{+\infty}(1-e^{-\lambda u})\,\rho(u)\,du\right)\right\}$$

où $\rho(u)=\int_{]0,+\infty[} e^{-\zeta u}\zeta\,d\check{\sigma}(\zeta)$ est la transformée de Laplace de la mesure $\zeta\,d\check{\sigma}(\zeta)$. On a donc le

THÉORÈME I.4 (Knight, Kotani et Watanabe). — *La mesure de Lévy de $Y^m_{\tau_2 t}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, avec pour densité $\rho(u)=\int_{]0,+\infty[} e^{-\zeta u}\zeta\,d\check{\sigma}(\zeta)$, où $\check{\sigma}$ est la fonction spectrale de la corde duale de m.*

Réciproquement, si $d\nu(u)=\rho(u)\,du$, avec ρ transformée de Laplace d'une mesure $\mu\not\equiv 0$ portée par $\mathbb{R}^*_+$, telle que $\int_0^\infty d\mu(\zeta)[\zeta(\zeta+1)]^{-1}<+\infty$; alors il existe une corde m de $\mathcal{M}$ telle que la mesure de Lévy du processus Y^m_τ soit $d\nu$.

Remarque. — La formule (I.1) reste vraie quand on remplace λ par $\omega\in\mathbb{C}^*_+$ (la démonstration est la même si $\operatorname{Re}(\omega)>0$, et l'égalité reste vraie sur $\mathbb{C}^*_+$ par passage à la limite).

II. FONCTIONNELLES ADDITIVES PRINCIPALES DE X

Soit n une fonction de $\mathcal{N}$. Pour tout $\varepsilon>0$, on pose $n_\varepsilon(x)=n(x)\vee n(\varepsilon)$, et l'on note $\bar{n}_\varepsilon$ (respectivement $\bar{n}$) la primitive nulle en 0 de n_ε (respectivement n). $\bar{n}_\varepsilon(X)$ est alors une semi-martingale dont la partie à variation bornée est

$$Z^{n_\varepsilon}_t=\frac{1}{2}\left(\int_\varepsilon^{+\infty} L^a_t\,dn(a)+n(\varepsilon)\,L^0_t\right).$$

Quand ε tend vers 0, n_ε converge dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,dx)$ vers n; donc $\bar{n}_\varepsilon(X)$ converge P p. s. vers le processus de Dirichlet faible local $\bar{n}(X)$, et $Z^{n_\varepsilon}_t$ converge P p. s., uniformément sur tout compact, vers Z^n_t, la partie à variation quadratique nulle par rapport aux subdivisions dyadiques de $\bar{n}(X)$ (*voir* Fukushima [7]). On a en particulier la formule d'Itô

$$\bar{n}(X_t)=\int_0^t n(X_s)\,d\left(X_s-\frac{1}{2}L^0_s\right)+Z^n_t. \tag{II.1}$$

Nous dirons que Z^n est la fonctionnelle additive principale associée à n, et nous noterons $Z^n_t=\frac{1}{2}\,\text{v. p.}\int_0^\infty L^a_t\,dn(a)$. Ces fonctionnelles interviennent de façon très naturelle dans l'étude du mouvement Brownien, en donnant lieu à des formules remarquables (Yamada [14], [15], Biane et Yor [2], Bertoin [1]).

De même que dans le paragraphe I, le calcul stochastique permet de calculer — formellement — la transformée de Fourier de $Z^n_{\tau_t}$:

Introduisons la corde ${}_\varepsilon n$ définie par : ${}_\varepsilon n(x)=n_\varepsilon(x)-n(\varepsilon)$ $(x\in\mathbb{R}_+)$. Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$, et $D_\varepsilon=D_\varepsilon(x, i\alpha)$ la solution bornée de $dD^+_\varepsilon=i\alpha D_\varepsilon d_\varepsilon n$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $D^-_\varepsilon(0, i\alpha)=-1$.

$$D_\varepsilon(X_s, i\alpha)\exp\left\{-i\alpha Z^{n_\varepsilon}_s+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_\varepsilon(0, i\alpha)}+i\alpha n(\varepsilon)\right)L^0_s\right\}$$

est une martingale locale, bornée sur $\{s\leqq\tau_{2t}\}$, et donc

$$E[\exp-i\alpha Z^{n_\varepsilon}_{\tau_{2t}}]=\exp\left\{-t\left(\frac{1}{D_\varepsilon(0, i\alpha)}+i\alpha n(\varepsilon)\right)\right\}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient, par convergence dominée, le

LEMME II.1. — *Quand ε tend vers 0^+, $\dfrac{1}{D_\varepsilon(0, i\alpha)}+i\alpha n(\varepsilon)$ converge vers une quantité notée $-b(i\alpha)$ et l'on a*

$$E[\exp-i\alpha Z^n_{\tau_{2t}}]=\exp tb(i\alpha).$$

Remarquons maintenant que si M désigne la partie martingale de $\bar{n}(X)$, $\langle M\rangle_\infty=+\infty$ p. s., et donc M atteint tous les réels positifs. Comme $\bar{n}$ est négative, d'après (II.1), Z^n atteint tous les réels négatifs. Considérons

$$T_a(n)=\inf\{t: Z^n_t<-a\}\qquad(a\in\mathbb{R}_+).$$

Z^n étant de par sa définition croissante sur tout intervalle sur lequel X ne s'annule pas, $X_{T_a(n)}=0$. Le processus $t\mapsto-\inf\{Z^n_s: s\leqq t\}$ est donc continu, croissant, admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ et ne croît que quand X est nul. Comme l'ensemble des zéros de X est exactement l'ensemble des temps en lesquels L^0 croît, le processus $t\mapsto-\inf\{Z^n_{\tau_{2s}}: s\leqq t\}$ est lui aussi continu, croissant, admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$, et

$$\frac{1}{2}L^0_{T_a(n)}=\inf\{t: Z^n_{\tau_{2t}}<-a\}.$$

La propriété forte de Markov (pour Z^n_τ) implique alors que $a\mapsto\frac{1}{2}L^0_{T_a(n)}$ est un subordinateur. Nous avons le

LEMME II.2. — *Soit ε, $\lambda>0$, et $D_\varepsilon=D_\varepsilon(x, \lambda)$ la solution bornée sur R_+ de $dD^+_\varepsilon=\lambda D_\varepsilon d_\varepsilon n$, avec $D^-_\varepsilon(0, \lambda)=-1$. Alors $\lambda n(\varepsilon)+1/D_\varepsilon(0, \lambda)$ converge* *quand* $\varepsilon \downarrow 0$ *vers une quantité négative notée* $-b(\lambda)$ *et l'on a*

$$E\left[\exp - b(\lambda)\frac{1}{2}L^0_{T_a(n)}\right] = \exp - \lambda a.$$

Preuve. — Comme précédemment,

$$D_\varepsilon(X_s, \lambda)\exp\left\{-\lambda Z^{n_\varepsilon}_s + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_\varepsilon(0, \lambda)} + \lambda n(\varepsilon)\right)L^0_s\right\}$$

est une martingale locale. Remarquons que $1/D_\varepsilon(0, \lambda) + \lambda n(\varepsilon) \leqq 0$: en effet, $f(x) = D^-_\varepsilon(x, \lambda)/D_\varepsilon(x, \lambda)$ est solution de l'équation de Ricatti $df(x) + f^2(x)\,dx = \lambda\, d_\varepsilon n(x)$, avec $\lim_{+\infty} f = 0$. En intégrant sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$f(0) - \lambda n(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx - \lambda n(+\infty) \geqq 0.$$

Le théorème d'arrêt appliqué au temps $T_a(n_\varepsilon)$ nous donne (puisque $X_{T_a(n_\varepsilon)} = 0$)

$$E\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_\varepsilon(0, \lambda)} + \lambda n(\varepsilon)\right)L^0_{T_a(n_\varepsilon)}\right\}\right] = \exp - \lambda a. \tag{II.2}$$

Montrons maintenant que $T_a(n_\varepsilon)$ converge p. s. vers $T_a(n)$:

Soit $\bar{T} = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} T_a(n_\varepsilon)$ et $\underline{T} = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} T_a(n_\varepsilon)$. Comme Z^{n_ε} converge uniformément sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+$ vers Z^n, pour tout $\eta > 0$, on a $T_{a-\eta}(n) \leqq \underline{T}$ et $\bar{T} \leqq T_{a+\eta}(n)$, d'où $T_{a-}(n) \leqq \underline{T} \leqq \bar{T} \leqq T_a(n)$. Or, comme $X_{T_{a-}(n)} = 0$, $\tilde{X}_t = X_{T_{a-}(n)+t}$ est un nouveau mouvement Brownien réfléchi, et P p. s., $T_{a-}(n) = T_a(n)$, ce qui établit notre assertion.

Le lemme est alors prouvé en faisant tendre ε vers 0^+ dans (II.2).

III. P.A.I.S. REPRÉSENTÉS À L'AIDE D'UNE FONCTIONNELLE ADDITIVE PRINCIPALE

III.1. Une bijection de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}_0$

L'objet de cette partie est d'expliciter $b(i\alpha)$ et $b(\lambda)$ en utilisant la théorie de Krein.

Soit $n \in \mathcal{N}$, $\varepsilon > 0$. ${}_\varepsilon n$ est une corde de $\mathcal{M}$, de masse totale $n(+\infty) - n(\varepsilon)$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, considérons $D_\varepsilon = D_\varepsilon(x, \omega)$ la solution bornée de $dD^+_\varepsilon = \omega D_\varepsilon d_\varepsilon n$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $D^-_\varepsilon(0, \omega) = -1$. Nous savons que si σ_ε est la fonction spectrale de ${}_\varepsilon n$,

$$D_\varepsilon(0, \omega) = c_\varepsilon + \int_0^{+\infty} d\sigma_\varepsilon(\zeta)/(\zeta+\omega),$$

où

$$c_\varepsilon = \inf\{x : {}_\varepsilon n(x) > 0\}.$$

Au regard du paragraphe II, intéressons nous au comportement de $\omega\, n(\varepsilon) + 1/D_\varepsilon(0, \omega)$ quand ε tend vers 0. Nous avons le

THÉORÈME III.1. — (i) *Pour toute* $n \in \mathcal{N}$, *on note* $\overset{\blacksquare}{n}(x) = -1/n(t)$, *avec* $x = \int_0^t n^2(s)\, ds$, *et* $\overset{\blacksquare}{\sigma}$ *la fonction spectrale de* $\overset{\blacksquare}{n}$. *Alors, pour tout* ω *dans* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{1}{D_\varepsilon(0, \omega)} + \omega\, n(\varepsilon)\right) = -\omega^2 \int_0^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)/(\zeta+\omega).$$

(ii) *L'application* $n \mapsto \overset{\blacksquare}{n}$ *est une bijection de* $\mathcal{N}$ *sur* $\mathcal{M}_0$. *La bijection réciproque est donnée par : si* $m \in \mathcal{M}_0$, *et si* $\overset{\square}{m}(x) = -1/m(t)$, *avec* $x = \int_0^t m^2(s)\, ds$, *alors* $\overset{\square}{m} \in \mathcal{N}$ *et* $\overset{\blacksquare}{\overset{\square}{m}} = m$ *et* $\overset{\square}{\overset{\blacksquare}{n}} = n$.

Preuve. — (i) Nous sommes amenés à distinguer deux cas :

1^er^ *cas :* $n(0^+) = -\infty$. — D'après la proposition I.2 (ii), la corde

$${}_\varepsilon\hat{n}(x) = {}_\varepsilon n(t)\,(1 + {}_\varepsilon n(t)/n(\varepsilon))^{-1},$$

avec

$$x = \int_0^t (1 + {}_\varepsilon n(s)/n(\varepsilon))^2\, ds,$$

a pour fonction spectrale $\sigma_\varepsilon + H/n(\varepsilon)$. D'après la proposition I.2 (i), la corde ${}_\varepsilon\overset{\blacksquare}{n}(x) = n^{-2}(\varepsilon)\, {}_\varepsilon\hat{n}(n^{-2}(\varepsilon)\, x)$ a pour fonction spectrale $\overset{\blacksquare}{\sigma}_\varepsilon = n^2(\varepsilon)\, (\sigma_\varepsilon + n^{-1}(\varepsilon)\, H)$. Nous avons donc

$${}_\varepsilon\overset{\blacksquare}{n}(x) = n^{-2}(\varepsilon)\, {}_\varepsilon n(t)\,(1 + {}_\varepsilon n(t)/n(\varepsilon))^{-1} = 1/n(\varepsilon) - 1/n_\varepsilon(t),$$

avec

$$x = n^2(\varepsilon) \int_0^t (1 + {}_\varepsilon n(s)/n(\varepsilon))^2\, ds = \int_0^t n_\varepsilon^2(s)\, ds.$$

Notons

$$\overset{\blacksquare}{n}(x) = -1/n(t), \text{ avec } x = \int_0^t n^2(s)\, ds.$$

Il est alors clair que $\overset{\blacksquare}{n}$ est une corde, et que la suite ${}_{\varepsilon}\overset{\blacksquare}{n}(x)$ converge vers $\overset{\blacksquare}{n}(x)$ en tout point de continuité de $\overset{\blacksquare}{n}$. Si $\overset{\blacksquare}{\sigma}$ est la fonction spectrale de $\overset{\blacksquare}{n}$, d'après le théorème I.2 de Kotani et Watanabe [11], pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(n^2(\varepsilon)\, c_\varepsilon + \int_0^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}_{\varepsilon}(\zeta)/(\zeta+\lambda)\right) = \int_0^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)/(\zeta+\lambda),$$

et comme $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} n^2(\varepsilon)\, c_\varepsilon = 0 \left(\text{car } n^2(\varepsilon)\, c_\varepsilon \leqq \int_0^{c_\varepsilon} n^2(t)\, dt < +\infty\right)$, on a

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}_{\varepsilon}(\zeta)/(\zeta+\lambda) = \int_0^{+\infty} \overset{\blacksquare}{d}\,\sigma(\zeta)/(\zeta+\lambda) \quad \text{pour tout } \lambda > 0. \tag{III.1}$$

D'après Dym et McKean [6], p. 179, $\overset{\blacksquare}{\sigma}_{\varepsilon}(x)$ converge vers $\overset{\blacksquare}{\sigma}(x)$ en tout point de continuité de $\overset{\blacksquare}{\sigma}$, et donc l'égalité (III.1) reste vraie pour tout $\lambda = \omega$, $\omega \in \mathbb{C} \diagdown \mathbb{R}_-$. Comme

$$\frac{1}{\omega} n(\varepsilon) + n^2(\varepsilon)\, D_\varepsilon(0, \omega) = n^2(\varepsilon)\, c_\varepsilon + \int_0^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}_{\varepsilon}(\zeta)/(\zeta+\omega),$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\frac{1}{\omega} n(\varepsilon) + n^2(\varepsilon)\, D_\varepsilon(0, \omega)\right) = \int_0^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)/(\zeta+\omega). \tag{III.2}$$

En divisant le membre de gauche de (III.2) par $n(\varepsilon)$, quantité qui tend vers $-\infty$, on a en particulier

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} n(\varepsilon)\, D_\varepsilon(0, \omega) = -1/\omega,$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\frac{1}{D_\varepsilon(0, \omega)} + \omega\, n(\varepsilon)\right) &= \omega^2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\frac{\omega^{-1} n(\varepsilon) + n^2(\varepsilon)\, D_\varepsilon(0, \omega)}{\omega\, D_\varepsilon(0, \omega)\, n(\varepsilon)}\right) \\ &= -\omega^2 \int_0^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)/(\zeta+\omega). \end{aligned} \tag{III.3}$$

2^e^ *cas* : $n(0^+) > -\infty$. — C'est le cas le plus simple (il correspond au cas où Z^n est à variation bornée) puisque, si $m(x) = (n(x) - n(0^+))\, \mathbf{1}_{x>0}$, alors $\dfrac{1}{D_\varepsilon(0, \omega)} + \omega\, n(\varepsilon)$ converge pour tout $\omega \in \mathbb{C} \diagdown \mathbb{R}_-$ vers $\dfrac{1}{D(0, \omega)} + \omega\, n(0^+)$, où $D = D(x, \omega)$ est la solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ de $dD^+ = \omega\, D\, dm$, $D^-(0, \omega) = -1$. D'autre part, si

$$\mathring{n}(x) = (1/n(0^+) - 1/n(t))\, \mathbf{1}_{x>0} = \overset{\blacksquare}{n}(x) + H(x)/n(0^+),$$

et si l'on note $\mathring{D}$ (respectivement $\overset{\blacksquare}{D}$) la solution bornée de $d\mathring{D}^+ = \omega\, \mathring{D}\, d\mathring{n}$

avec $\mathring{D}^-(0, \omega) = -1$ (respectivement de $d\overset{\blacksquare}{D}{}^+ = \omega \overset{\blacksquare}{D}\, d\overset{\blacksquare}{n}$ avec $\overset{\blacksquare}{D}{}^-(0, \omega) = -1$), alors

$$\int_0^\infty d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)/(\zeta+\omega) = \overset{\blacksquare}{D}(0, \omega) = \mathring{D}(0, \omega)\,(1-\omega\,\mathring{D}(0, \omega)/n(0^+))^{-1};$$

et de même que dans le premier cas, on a encore

$$n^2(0^+)\,D(0, \omega) + \frac{1}{\omega}\, n(0^+) = \mathring{D}(0, \omega).$$

On en déduit que l'égalité (III.3) est encore vraie pour le 2e cas.

(ii) Par construction, si $n \in \mathcal{N}$, alors $\overset{\blacksquare}{n} \in \mathcal{M}_0$. Réciproquement, si $m \in \mathcal{M}_0$, et si $\overset{\square}{m}(x) = -1/m(t)$, avec $t = A(x)$ et $x = \int_0^t m^2(s)\,ds$, alors

$$\int_0^x \overset{\square}{m}(y)^2\,dy = \int_0^x m(A(y))^{-2}\,dy = A(x)$$

et donc $\overset{\square}{m} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, dx)$. $\overset{\square}{m}$ est donc une fonction de $\mathcal{N}$, et l'on vérifie aisément que $\overset{\square}{\overset{\square}{m}} = m$. De même on a $\overset{\square}{\overset{\square}{n}} = n$ pour toute n de $\mathcal{N}$.

III.2. Détermination de la mesure de Lévy

Le principal résultat de cet article est le

THÉORÈME III.2. — (i) *Pour toute n de $\mathcal{N}$ et tout $\alpha \in R^*$,*

$$E[\exp -i\alpha Z^n_{\tau_2 t}] = \exp -t\alpha^2 \int_0^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)/(\zeta + i\alpha).$$

(ii) *En particulier, la mesure de Lévy de Z^n_τ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, avec pour densité*

$$\rho(x) = \int_{]0, +\infty[} e^{-\zeta x}\zeta^2\, d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta) \qquad (x > 0).$$

(iii) *Réciproquement, si Z est un p.a.i.s. dont la transformée de Fourier à l'instant t est de la forme*

$$E[\exp -i\alpha Z^n_t] = \exp -t\alpha^2 \int_0^{+\infty} d\sigma(\zeta)/(\zeta + i\alpha),$$

avec $\int_0^{+\infty} d\sigma(\zeta)/(\zeta+1) < +\infty$, *alors il existe une unique $n \in \mathcal{N}$ telle que Z ait même loi que Z^n_τ.*

Preuve. — (i) et (iii) découlent des théorèmes I.1 et III.1 et du lemme II.1.

(ii) Comme au paragraphe I, en suivant Kotani et Watanabe [11], on a

$$
\begin{aligned}
-\alpha^2 \int_0^{+\infty} & d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)/(\zeta+i\alpha) \\
&= i\alpha\overset{\blacksquare}{\sigma}(0^+) + i\alpha \int_{0^+}^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)\,\zeta \int_0^{+\infty} e^{-\zeta x}(1-e^{-i\alpha x})\,dx \\
&= i\alpha\overset{\blacksquare}{\sigma}(0^+) + i\alpha \int_0^{+\infty} dx\, \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} \left(\int_{0^+}^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)\,\zeta e^{-\zeta x} \right) \\
&\quad + i\alpha \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - e^{-i\alpha x} \right) \left(\int_{0^+}^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)\,\zeta e^{-\zeta x} \right) \\
&= i\alpha k + i\alpha \int_0^{\infty} dx \left(e^{-i\alpha x} - 1 + \frac{i\alpha x}{1+x^2} \right) \left(\int_{0^+}^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)\,\zeta^2 e^{-\zeta x} \right)
\end{aligned}
$$

où

$$
k = \overset{\blacksquare}{\sigma}(0^+) + \int_0^{+\infty} dx\, \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} \left(\int_{0^+}^{+\infty} d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)\,\zeta e^{-\zeta x} \right)
$$

(la justification de l'intégration par partie est aisée mais longue, aussi nous l'omettons).

Remarques. — La formule (0.2) est une conséquence directe du théorème III.2 et de l'égalité (I.1).

Grâce à l'indépendance des excursions positives et négatives du Brownien, le résultat précédent permet plus généralement de déterminer la mesure de Lévy du p.a.i.s. défini par une fonctionnelle additive principale du Brownien, prise en l'inverse de son temps local.

Intéressons nous maintenant à $L^0_{T_a(n)}$. Nous avons la

PROPOSITION III.3. — *Pour toute n de $\mathcal{N}$, la fonction b : $\lambda \mapsto \lambda^2 \int_0^{\infty} \frac{d\overset{\square}{\sigma}(\zeta)}{\zeta+\lambda}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Si b^{-1} désigne sa bijection réciproque, la loi du subordinateur $\left\{ \frac{1}{2} L^0_{T_a(n)} : a \geqq 0 \right\}$ est donnée par :*

$$
\textit{pour tout } \lambda > 0,\ E\left[\exp - \frac{\lambda}{2} L^0_{T_a(n)} \right] = \exp - ab^{-1}(\lambda).
$$

Preuve. — Si $m = \overset{\blacksquare}{n}$ est la corde de $\mathcal{M}_0$ dont la fonction spectrale est $\overset{\blacksquare}{\sigma}$, et si $\check{m}$ est la corde duale de m, avec $\check{\sigma}$ pour fonction spectrale, alors

$$
b(\lambda) = \lambda/\check{h}(\lambda), \qquad \text{avec} \quad \check{h}(\lambda) = m(0^+) + \int_0^{+\infty} d\check{\sigma}(\zeta)/(\zeta+\lambda).
$$

$\check{h}$ étant décroissante, b est croissante et clairement continue. Comme $\lambda \int_0^\infty d\sigma(\zeta)/(\zeta+1) \leqq b(\lambda)$ si $\lambda \geqq 1$ et $\lambda \int_0^\infty d\sigma(\zeta)/(\zeta+1) \geqq b(\lambda)$ si $\lambda \leqq 1$, on a $\lim_{+\infty} b = +\infty$ et $\lim_{0^+} b = 0$. Il ne reste alors qu'à appliquer le lemme II.2.

Remarque. — On aurait pu également prouver ce résultat en utilisant la factorisation de Wiener-Hopf et le fait que la mesure de Lévy de Z^n_τ est portée par $\mathbb{R}_+$ (*voir* Bingham [3]).

III.3. Une représentation des processus stables spectralement positifs

Nous allons maintenant utiliser les résultats précédents pour obtenir très simplement des représentations des processus stables à partir de fonctionnelles additives principales.

Soit $\nu \in]0, 1[$, et $\nu' = 2-\nu$. Nous notons

$$A_\nu(t) = \int_0^{+\infty} L^a_t\, a^{(1/\nu)-2}\, da \qquad \text{et} \qquad A_{\nu'}(t) = \text{v. p.} \int_0^{+\infty} L^a_t\, a^{(1/\nu')-2}\, da.$$

A_ν et $A_{\nu'}$ sont respectivement (à des constantes multiplicatives près), l'intégrale fractionnaire d'indice ν et la dérivée fractionnaire d'indice ν' en 0 des temps locaux Browniens. Ces processus interviennent en particulier dans des théorèmes limites (Yamada [14], [15]).

Si nous posons $m_\nu(x) = x^{(1/\nu)-1}$ et $n_{\nu'}(x) = \overset{\square}{m}_\nu(x) = -\left(\dfrac{2-\nu}{\nu} x\right)^{(\nu-1)/(2-\nu)}$, nous avons

$$Y^{m_\nu}_t = \frac{1-\nu}{2\nu} A_\nu(t) \qquad \text{et} \qquad Z^{n_{\nu'}}_t = \frac{1}{2}\,\frac{1-\nu}{2-\nu}\left(\frac{2-\nu}{\nu}\right)^{(\nu-1)/(2-\nu)} A_{\nu'}(t).$$

Or, nous savons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, si $c_\nu = \dfrac{2^{\nu-1}\Pi}{\nu \sin \Pi \nu}\left(\dfrac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu)}\right)^2$,

$$E[\exp - i\alpha A_\nu(\tau_t)] = \exp(-tc_\nu\, |\alpha|^\nu\, e^{i\, \operatorname{sgn}(\alpha)\, \nu\, \Pi/2})$$

(*voir* Jeulin et Yor [7] p. 218, en notant que si $X = |B|$, avec B Brownien réel, alors $\tau_t = \inf\{s : L^0_s(B) > t/2\}$).

On a donc

$$E[\exp - i\alpha Y^{m_\nu}_{\tau_{2t}}] = \exp\left(-2tc_\nu \left|\frac{1-\nu}{2\nu}\alpha\right|^\nu e^{i\, \operatorname{sgn}(\alpha)\, \nu\, \Pi/2}\right)$$

d'où, grâce à (0.2)

$$E[\exp - i\alpha Z^{n_{\nu'}}_{\tau_{2t}}] = \exp\left(-\frac{t}{2}\alpha^2 c_\nu^{-1} \left|\frac{1-\nu}{2\nu}\alpha\right|^{-\nu} e^{-i\, \operatorname{sgn}(\alpha)\, \nu\, \Pi/2}\right)$$

et

$$E[\exp - i\alpha A_{\nu'}(\tau_t)] = \exp(-tc'_\nu |\alpha|^{\nu'} e^{i\,\mathrm{sgn}(\alpha)\,\nu'\,\Pi/2}) \tag{III.4}$$

avec

$$c'_\nu = \left[\frac{2-\nu}{1-\nu}\left(\frac{\nu}{2-\nu}\right)^{(\nu-1)/(2-\nu)}\right]^2 \times \left(\frac{\nu}{2-\nu}\right)^{-\nu(2\nu-3)/(2-\nu)} \frac{-\nu\sin\Pi\nu}{2^{\nu-1}\Pi}\left(\frac{\Gamma(\nu)}{\nu^\nu}\right)^2.$$

L'expression de c'_ν se simplifie en utilisant la relation $\Gamma(\nu)\Gamma(2-\nu) = (1-\nu)\Pi/\sin\Pi\nu$, et l'on obtient

$$c'_\nu = \frac{2^{\nu'-1}\pi}{\nu'\sin\Pi\nu'}\left(\frac{\nu'^{\nu'}}{\Gamma(\nu')}\right)^2 = c_{\nu'}.$$

Remarque. — La formule (III.4) était déjà — presque — connue (*voir* Biane et Yor [2], p. 24); mais ces calculs nous permettent de vérifier la formule (0.2).

Soit maintenant $T_a(\nu') = \inf\{t : A_{\nu'}(t) < -a\}$; intéressons nous à $L^0_{T_a(\nu')}$. On a

$$T_a(\nu') = \inf\left\{t : Z^{n_{\nu'}}_t < -a\frac{1-\nu}{2-\nu}\left(\frac{2-\nu}{\nu}\right)^{(\nu-1)/(2-\nu)}\right\}$$

et donc, grâce à la proposition III.3, pour tout $\lambda > 0$,

$$E\left[\exp - \frac{b(\lambda)}{2} L^0_{T_a(\nu')}\right] = \exp\left\{-a\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1-\nu}{2-\nu}\right)\left(\frac{2-\nu}{\nu}\right)^{(\nu-1)/(2-\nu)}\right\}$$

avec $b(\lambda) = \lambda^{2-\nu}\dfrac{\nu\sin\Pi\nu}{2^\nu\Pi}\left(\dfrac{\Gamma(\nu)}{\nu^\nu}\right)^2$, d'où

PROPOSITION III.4. — $A_{\nu'}$ *est un processus stable totalement asymétrique d'exposant* ν', *dont la loi est donnée par* (III.4); *et* $\{L^0_{T_a(\nu')} : a \geqq 0\}$ *est un subordinateur stable d'exposant* $1/\nu'$. *Plus précisément, pour tout* $\gamma > 0$, *on a*

$$E\left[\exp - \frac{\gamma}{2} L^0_{T_a(\nu')}\right] = \exp(-a d_{\nu'} \gamma^{1/\nu'})$$

où $d_{\nu'} = (2\nu')^{-2}\left(-4\Pi^{-1}\sin(\Pi\nu')(\Gamma(\nu'))^2\left(\dfrac{2-\nu'}{\nu'-1}\right)^{(2-\nu')}\nu'\right)^{1/\nu'}$.

Remarque. — Ces représentations permettent de calculer les lois de certaines v. a. associées aux processus stables. Donnons juste un exemple : d'après la proposition IV.2 de [1], pour tout $b > 0$,

$$P(\mathrm{Sup}\{A_{\nu'}(t) : t \leqq T_a(\nu')\} < b) = (b/(a+b))^{\nu'-1}.$$

Or $A_{\nu'}$ est croissant sur tout intervalle sur lequel X ne s'annule pas, de sorte que X est nécessairement nul quand $A_{\nu'}$ atteint son supremum sur $[0, T_a(\nu')]$ (puisque $X_{T_a(\nu')}=0$). Par conséquent, si $C_{\nu'}$ est un processus stable spectralement positif d'exposant ν', et si nous notons $S_{\nu'}(t)=\operatorname{Sup}\{C_{\nu'}(s): s \leqq t\}$ et $T_{\nu'}=\inf\{t: C_{\nu'}(t)=-1\}$, alors, $P(S_{\nu'}(T_{\nu'}) > b)=(b/(1+b))^{\nu'-1}$.

III.4. p-variation des fonctionnelles additives principales

Donnons pour conclure une application de la théorie de Krein à l'étude de la p-variation de Z^n : rappelons que si $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction càdlàg, et $S=(0=s_0 < s_1 < \ldots < s_i=t)$ est une subdivision de $[0; t]$ $(t > 0)$, on note pour tout $p > 1$

$$V_S^p(f)=|f(0)|^p+\sum_{k=0}^{i-1} |f(s_{k+1})-f(s_k)|^p,$$

la p-variation de f par rapport à S; et que l'on dit que f a une p-variation bornée sur $[0; t]$ si $\{V_S^p(f) : \text{S subdivision de } [0; t]\}$ est borné (et que f a une p-variation infinie sur $[0; t]$ sinon).

THÉORÈME III.5. — *Soit n une fonction de $\mathcal{N}$ et $\bar{n}$ sa primitive nulle en zéro. Alors,* P *p.s., pour tout $t > 0$ et tout $p \in]1; 2[$, Z^n est à p-variation bornée sur $[0; t]$ si et seulement si*

$$\int_{0^+} |\bar{n}(x)|^{p-2} n^2(x)\, dx < +\infty.$$

Preuve. — Commençons par étudier la p-variation de $s \mapsto Z^n_{\tau_{2s}}$: grâce au théorème III.b de Bretagnolle [4] et au théorème III.2, Z^n_τ a une p-variation bornée sur $[0; t]$ si et seulement si

$$\int_0^1 x^p\left(\int_{0^+}^\infty e^{-\zeta x}\zeta^2\, d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta)\right)dx < \infty$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \int_1^\infty \zeta^{1-p}\, d\overset{\blacksquare}{\sigma}(\zeta) < \infty$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \int_{0^+} dx \left(\int_0^x \overset{\blacksquare}{n}(s)\, ds\right)^{p-2} < \infty$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \int_{0^+} dx\, |\bar{n}(x)|^{p-2} n^2(x) < \infty;$$

où les équivalences (1), (2) et (3) découlent respectivement du théorème de Fubini, d'un résultat de Kac [9] sur les moments des fonctions spectrales et enfin de la définition de $\overset{\blacksquare}{n}$. Si nous notons $\mathscr{Z}$ l'ensemble des zéros de

X, et $\mathscr{Z}_d$ l'ensemble des extrémités droites des intervalles d'excursion de X, nous pouvons donc affirmer que P p. s., pour tout $p \in]1; 2[$,

$$\int_{0^+} dx \,|\bar{n}(x)|^{p-2} n^2(x) < \infty$$
$$\Leftrightarrow \quad \{V_T^p(Z^n) : \text{T subdivision de } [0; \tau_t] \text{ et } T \subset \mathscr{Z}_d\} \text{ est borné}$$
$$\Leftrightarrow \quad \{V_T^p(Z^n) : \text{T subdivision de } [0; \tau_t] \text{ et } T \subset \mathscr{Z}\} \text{ est borné;}$$

la dernière équivalence provenant de ce que Z^n est continu et que $\mathscr{Z}$ est l'adhérence de $\mathscr{Z}_d$.

Montrons maintenant par récurrence que, pour tout entier j,
$(HR)_j$: *Pour presque tout* $\omega \in \Omega$, *si* S *est une subdivision de* $[0; \tau_t]$ *telle que* $\text{Card}\{s \in S : s \notin \mathscr{Z}\} \leqq j$, *alors il existe une subdivision* T *incluse dans* $\mathscr{Z}$ *et telle que, pour tout* $p > 1$, $V_S^p(Z^n(\omega)) \leqq V_T^p(Z^n(\omega))$.

En effet, $(HR)_0$ est trivial. Supposons donc que $(HR)_j$ est vérifiée, et considérons $S = (0 = s_0 < \ldots < s_i = \tau_t)$ une subdivision de $[0; \tau_t]$ avec $\text{Card}(S \setminus \mathscr{Z}) = j+1$. Si nous notons $h = \inf\{k : s_k \notin \mathscr{Z}\}$, alors :

(*a*) Si $\inf\{Z_s^n : s = s_{h \pm 1}\} \leqq Z_{s_h}^n \leqq \text{Sup}\{Z_s^n : s = s_{h \pm 1}\}$, posons $S' = S \setminus \{s_h\}$. Alors, pour tout $p > 1$, $V_S^p(Z^n(\omega)) \leqq V_{S'}^p(Z^n(\omega))$, et il ne reste qu'à appliquer $(HR)_j$.

(*b*) Si $Z_{s_h}^n \leqq \inf\{Z_s^n : s = s_{h \pm 1}\}$, notons $g(s_h) = \text{Sup}\{s < s_h : X_s = 0\}$. Alors, comme de par sa définition Z^n est croissant sur tout intervalle d'excursion de X, $g(s_h) > s_{h-1}$ et $Z_{g(s_h)}^n \leqq Z_{s_h}^n$. Si nous posons $S' = \{s_0, \ldots, s_{h-1}, g(s_h), s_{h+1}, \ldots, s_i\}$, nous avons alors $V_S^p(Z^n(\omega)) \leqq V_{S'}^p(Z^n(\omega))$, et il suffit encore d'appliquer $(HR)_j$.

(*c*) Si $Z_{s_h}^n \geqq \text{Sup}\{Z_s^n : s = s_{h \pm 1}\}$, on fait le même raisonnement que pour (*b*) avec $d(s_h) = \inf\{s > s_h : X_s = 0\}$ à la place de $g(s_h)$, et en prenant cette fois $S' = \{s_0, \ldots, s_{h-1}, d(s_h), s_{h+1}, \ldots, s_i\}$.

Ainsi $(HR)_j$ est prouvée par récurrence pour tout entier j; et le théorème est établi.

APPENDICE (preuve du lemme I.3.)

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}_+^*$, notons (e_ω) l'équation $dD^+ = \omega D \, dm$, et $D = D(x, \omega)$ la solution de (e_ω) telle que $D^-(0, \omega) = -1$, $D \in L^2(dm)$, $D^-(l) = 0$ si $m(l) + l = +\infty$ et si $\int_0^{l-} x^2 \, dm(x) < +\infty$, et $D(l) = 0$ si $m(l) + l < +\infty$.

– Si $l + m(l) < +\infty$, le lemme est évident.

– Si $l = +\infty$, une légère modification du paragraphe 8.7 de Durrett [5] montre qu'il existe une unique solution $V_\omega(x)$ de (e_ε), bornée sur $\mathbb{R}_+$ et valant 1 en 0. Si (B, P_x) désigne un mouvement Brownien réel issu de x $(x \geqq 0)$, $T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}$ et $\{L_t^a(B) : a \in \mathbb{R}, t \geqq 0\}$ une version bicontinue des temps locaux de B, alors

$$V_\omega(x)=E_x\left[\exp\left\{-\frac{\omega}{2}\int_0^{+\infty} L^a_{T_0}(B)\,dm(a)\right\}\right]. \qquad (A.1)$$

En particulier, si $\omega=\lambda>0$, comme $D(.,\lambda)$ est l'unique solution positive décroissante de (e_λ) avec $D^-(0,\lambda)=-1$ (*c.f.* Dym et McKean, p. 164), on a $D(.,\lambda)=D(0,\lambda)\,V_\lambda(.)$; et donc $V_\lambda\in L^2(dm)$ pour tout λ. Il en découle que $V_\omega\in L^2(dm)$ pour tout ω tel que $\mathrm{Re}(\omega)>0$; et donc $D(.,\omega)=D(0,\omega)\,V_\omega(.)$. Posons maintenant $\omega=i\alpha+\varepsilon$, avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $\varepsilon>0$. Le théorème de convergence dominée implique, au regard de l'expression (A.1) que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} V_{i\alpha+\varepsilon}(x)=V_{i\alpha}(x)$ pour tout x. Comme $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} D(0,i\alpha+\varepsilon)=D(0,i\alpha)$, $f(x)=D(0,i\alpha)\,V_{i\alpha}(x)$ est une solution de $(e_{i\alpha})$, avec pour conditions initiales $f(0)=D(0,i\alpha)$ et $f^-(0)=-1$. Donc $f(x)=D(x,i\alpha)$.

– Si $l<+\infty$ et $m(l)=+\infty$, on fait le même raisonnement avec cette fois (B, P^l_x) à la place de (B, P_x), où (B, P^l_x) est un mouvement Brownien issu de x et tué en l.

RÉFÉRENCES

[1] J. Bertoin, Complements on the Hilbert Transform and the Fractional Derivatives of Brownian Local Times, *J. Math. Kyoto Univ.* (à paraître).

[2] Ph. Biane et M. Yor, Valeurs principales associées aux temps locaux Browniens, *Bull. Sc. Math. 2e série*, t. **111**, 1987, p. 23-101.

[3] N. H. Bingham, Fluctuation theory in continuous time, *Adv. Appl. Probab.*, vol. 7, 1975, p. 705-766.

[4] J. Bretagnolle, *p*-variation de fonctions aléatoires. 2e partie : Processus à accroissements indépendants, in *Séminaire de Probabilités VI; Lect. Notes in Math.*, n° 258; Springer-Verlag, 1972, p. 64-71.

[5] R. Durrett, *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, the Wadsworth mathematical series, 1984.

[6] H. Dym et H. P. McKean, *Gaussian Processes, Function Theory and the Inverse Spectral Problem*, Academic press, 1976.

[7] M. Fukushima, *Dirichlet Forms and Markov Processes*, North Holland, 1980.

[8] T. Jeulin et M. Yor, *Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement Brownien*, in *Séminaire de Probabilités XV; Lect. Notes in Math.*, n° 850; Springer Verlag, 1981, p. 210-226.

[9] I. S. Kac, Integral Characteristics of the Growth of Spectral Functions for Generalized Second Order Boundary Problems with Conditions at Regular End, *Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 5, 1971, p. 161-191.

[10] F. B. Knight, Characterization of the Lévy Measures of inverse Local Time of Gap Diffusions, in Cinlar, Chung, Getoor éd. : *Seminar on stochastic processes*, Birkhaüser, 1981, p. 53-78.

[11] S. Kotani et S. Watanabe, *Krein's Spectral Theory of Strings and General Diffusion Processes*, in M. Fukushima éd, *Functional Analysis in Markov Processes*, Proceeding

Katata and Kyoto 1981, *Lect. Notes in Math.*, n° 923 : Springer Verlag, 1981, p. 235-259.

[12] M. G. KREIN, Sur la généralisation d'une recherche de Stieltjes, *Dok. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. **87,** 1952, p. 881-884.

[13] M. G. KREIN, Sur quelques cas de détermination effective des densités d'une corde inhomogène à partir de sa fonction spectrale, *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. **93,** 1953, p. 617-620.

[14] T. YAMADA, On the Fractional Derivative of Brownian Local Times, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. **25-1,** 1985, p. 49-58.

[15] T. YAMADA, On Some Limit Theorems for Occupation Times of One Dimensional Brownian Motion and its Continuous Additive Functionals Locally of Zero Energy, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. **26-2,** 1986, p. 309-322.

(*Manuscrit reçu le* 10 *novembre* 1988;
corrigé le 30 *janvier* 1989.)