

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

XAVIER GUYON

JOSÉ LEON

Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire sur R

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, n° 3 (1989), p. 265-282

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_3_265_0>

© Gauthier-Villars, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire sur \mathbb{R}

par

Xavier GUYON

Université Paris-I, 12, place du Panthéon,
75005 Paris, France

et

José LEON

Universidad Central de Venezuela,
Escuela de Física y Matemáticas,
A.P. 21201, Caracas 1020 A, Venezuela

RÉSUMÉ. — Soient H une fonctionnelle réelle d'indice d'Hermite k et $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ un processus gaussien stationnaire sur \mathbb{R} de covariance $R(t)$ vérifiant : $1 - R(t) = t^\beta L(t)$, où L est à variation lente en 0 et $0 < \beta < 2$. Si π_n est la partition régulière de pas $1/n$ de l'intervalle fixe $[0, 1]$ et $V_{H,n}$ la H -variation de X le long de π_n , nous étudions la convergence faible de $V_{H,n}$ convenablement renormalisée, lorsque $n \rightarrow \infty$: si $k(2-\beta) > 1$, la limite est gaussienne; si $k(2-\beta) < 1$, la limite existe appartenant au k -ième chaos de Wiener.

Mots clés : Processus gaussien stationnaire, H -variation, convergence faible, chaos de Wiener.

ABSTRACT. — Let H be a real functional of Hermite index k , $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ a stationary gaussian process with covariance R verifying:

Classification A.M.S. : Primaires : 60 F 05 et 60 G 15. Secondaire : 62 M 99.

$1 - R(t) = t^\beta L(t)$ with L slowly varying at $t=0$ and $0 < \beta < 2$. If π_n is the regular partition of mesh $1/n$ of the fix interval $[0, 1]$, we study weak convergence of the H -variation of X along π_n , well reduced, as $n \rightarrow \infty$: if $k(2-\beta) > 1$ the limit is gaussian; if $k(2-\beta) < 1$ the limit is in the k -th Wiener chaos.

Key words : Gaussian stationary process, H -variation, weak convergence, Wiener chaos.

I. INTRODUCTION

Soit $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ un processus gaussien à temps réel, centré stationnaire, de covariance R . Soit π_n la partition régulière de $[0, 1]$:

$$\pi_n = \{0 < x_1^n < x_2^n < \dots < x_n^n = 1\}, \quad x_j^n = \frac{j}{n}, \quad j = 1, n$$

et $\Delta^n X$ le processus à temps discret :

$$\Delta^n X = \left\{ \Delta_j^n X = X\left(\frac{j}{n}\right) - X\left(\frac{j-1}{n}\right), j \in \mathbb{Z} \right\} \quad (1-1)$$

de covariance $r_n(\sigma_n^2 = r_n(0))$, de corrélation s_n . Soit H une fonction mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Décomposant H sur la base des polynômes d'Hermite $\{H_l\}$, on définit l'*indice d'Hermite k de H* comme le premier indice l tel que la coordonnée de H sur H_l est non nulle.

La H -variation de X le long de π_n est définie par :

$$V_{H,n} = \sum_{j=1,n} H\left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}\right). \quad (1-2)$$

Nous étudions ici la convergence en loi, lorsque $n \rightarrow \infty$, de la variation $V_{H,n}$ convenablement renormalisée. Suivant les cas, la loi limite sera non gaussienne (dans le k -ième chaos de Wiener) ou gaussienne : le résultat dépend d'une condition jointe sur X et H , X étant caractérisé par le comportement local en 0 de sa covariance. Plus précisément, décrivons les

hypothèses sur X qui nous seront utiles :

(H-1) $1 - R(t) = t^\beta L(t)$, $0 < \beta < 2$, L à variation lente [1] en 0 est continue sur $]0, \infty[$

(H-2) $R''(t)$ existe si $t \neq 0$, $R''(t) = t^{\beta-2} L_1(t)$ où L_1 est à variation lente en 0, continue sur $]0, \infty[$; $|R''(t)|$, $t > 0$, est décroissante au voisinage de 0

(H-3) $L_1(t) = \beta(1-\beta)L(t)(1+o(1))$ au voisinage de 0

(H-4) Il existe b , $0 < b < 1$, tel que :

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \sup_{\substack{y \\ x > 0}} \left(\sup_{\substack{y \\ x \leq y \leq x^b}} \left| \frac{L(y)}{L(x)} \right| \right) < \infty.$$

On notera (\mathcal{H}) la conjonction des trois hypothèses H-1-2-3. Les résultats sont les suivants :

(i) si $k(2-\beta) < 1$, X vérifiant (\mathcal{H}), la H -variation converge en loi vers un élément du k -ième chaos de Wiener. De plus, la H -variation est réductible à la $a_k H_k$ -variation où $a_k H_k$ est le premier terme du développement de H sur les polynômes d'Hermite (théorèmes 1 et 2).

(ii) si $k(2-\beta) > 1$ et si de plus X satisfait à la condition (H-4), il y a convergence gaussienne (théorème 3).

Nous traduisons ces résultats dans le cas particulier de la p -variation ($H(x) = |x|^p$). Dans le cas de la variation quadratique ($p=2$), nous donnons, dans le cas de la convergence non gaussienne (ici, $k=2$, $3/2 < \beta < 2$) une caractérisation de la loi limite via ses cumulants (remarque II-3-1).

Cette étude repose sur les travaux de M. Rosenblatt ([3], [6]), M. Taqqu ([5], [8]), R. L. Dobrushin et P. Major [7], P. Major [10], P. Breuer et P. Major [11] : ceux-ci portent sur l'étude de la convergence en loi de fonctionnelles (non linéaires) d'un processus gaussien à *temps discret*, fixé; la situation que nous étudions passe par l'examen d'une suite $\{\Delta^n X\}$ de processus à temps discret « approchant » le processus dérivé \dot{X} [2] (de covariance $-R''$) de X sur le compact $[0, 1]$; les hypothèses que nous faisons sur le comportement de la covariance R de X en $t=0$ sont, en un certain sens, duals de celles faites, dans les travaux ci-dessus cités, sur le comportement, à l'infini, de la covariance r du processus à temps discret étudié.

La convergence en moyenne quadratique de certaines H -variations est étudiée dans [12], traitant également le cas où X est un champ sur \mathbb{R}^2 . J. Ortega [13] généralise ces résultats en levant l'hypothèse de régularité de la partition π_n , donnant un critère de convergence presque sûre, et examinant de nouvelles variations spatiales.

II. NOTATIONS ET RÉSULTATS

II.1. H-variations

Soit Y une variable gaussienne, réduite, H une fonction mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$E(H(Y))=0, \quad EH(Y)^2=\|H\|_2^2 < \infty,$$

et sa décomposition sur la base des polynômes d'Hermite :

$$H(x)=\sum_{l \geq k} a_l H_l(x), \quad \|H\|_2^2=\sum_{l \geq k} a_l^2 l! < \infty, \quad a_k \neq 0 \quad (2-1)$$

k (ici $k \geq 2$) est l'indice d'Hermite de H .

1^{er} cas : $k(2-\beta) < 1$: Réduction de la H -variation à la $a^k H_k$ -variation et convergence dans le k -ième chaos de Wiener

Notons :

$$\begin{aligned} V_{k,n} &= V_{H_k, n}; & s_{k,n}^2 &= E(V_{k,n}^2) \\ V_{H,n} &= \sum_{j=1,n} H\left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}\right) = a_k V_{k,n} + R_{n,k} \end{aligned} \quad (2-2)$$

THÉORÈME 1 (Réduction). — Soit X un processus gaussien sur \mathbb{R} , stationnaire, vérifiant (\mathcal{H}), H une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} satisfaisant (2-1), d'indice d'Hermite k vérifiant :

$$k(2-\beta) < 1. \quad (2-3)$$

Alors :

$$(a) \quad s_{n,k}^2 = (-1)^k k! n^{2(1-k)} \sigma_n^{-2k} \int_{-1}^1 (1-|x|) R''(x)^k dx \cdot (1+o(1))$$

$$(b) \quad E(V_{H,n} - a_k V_{k,n})^2 = o(1) s_{k,n}^2.$$

Soit P une mesure de probabilité, gaussienne, stationnaire, sur \mathbb{R} , de mesure spectrale réelle G , de mesure aléatoire Z_G . Soit $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable vérifiant :

$$\begin{aligned} h(x) &= \overline{h(-x)} \\ \int_{\mathbb{R}^k} |h|^2 G(dx_1) \dots G(dx_k) &< \infty. \end{aligned}$$

Sous ces conditions, l'intégrale de Ito-Wiener de h

$$I = \int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \dots, x_k) Z_G(dx_1) \dots Z_G(dx_k) \quad (2-4)$$

peut être définie (cf. [10]). Remarquons que $I \in \mathbb{R}$.

Le théorème 1 nous conduit à étudier la limite en loi de la H-variation renormalisée

$$S_n = n^{k-1} \sigma_n^k V_{H,n}, \quad \sigma_n^2 = 2 \left(1 - R \left(\frac{1}{n} \right) \right) = 2 n^{-\beta} L \left(\frac{1}{n} \right) (1 + o(1)). \quad (2-5)$$

Si R'' est intégrable sur \mathbb{R} , on notera G_0 la mesure spectrale admettant la densité

$$g_0(x) = - \int_{\mathbb{R}} e^{itx} R''(t) dt. \quad (2-6)$$

Notons d'autre part K_0 la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} :

$$K_0(x) = \begin{cases} \frac{\exp(ix) - 1}{ix} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2-7)$$

THÉORÈME 2 (Convergence dans le k -ième chaos de Wiener). — *Supposons que X, H vérifient les hypothèses du théorème 1, R'' étant intégrable sur \mathbb{R} , G_0, K_0 définies par (2-6), (2-7).*

Alors :

- (a) $I_k = \int_{\mathbb{R}^k} K_0(x_1 + \dots + x_k) Z_{G_0}(dx_1) \dots Z_{G_0}(dx_k)$ existe
- (b) S_n converge en loi vers $a_k I_k$.

2^e cas : $k(2-\beta) > 1$. Convergence gaussienne

Pour $j \geq 1$, définissons la suite $\{\rho(j)\}$ par :

$$\rho(j) = \frac{1}{2} ((j-1)^\beta - 2j^\beta + (j+1)^\beta) \quad (2-8)$$

$\{\rho(j), j \geq 0\}$ est la covariance du processus des accroissements $\{B(k) - B(k-1), k \in \mathbb{Z}\}$ du mouvement brownien fonctionnaire B d'indice β (cf. [9]).

Alors dès que l'indice d'Hermite k , de H , vérifie :

$$k(2-\beta) > 1 \quad (2-9)$$

la série $\sum_{j \geq 1} \rho(j)^l$ converge dès que $l \geq k$.

Notons alors :

$$\sigma_l^2 = 1 + 2 \sum_{j \geq 1} \rho(j)^l, \quad l \geq k. \quad (2-10)$$

Étant donnée la forme de $\{\rho(j)\}$ et (2-1), on a :

$$\sigma^2 = \sum_{l \geq k} l! a_l^2 \sigma_l^2 < \infty. \quad (2-11)$$

On a alors le résultat :

THÉORÈME 3 (convergence gaussienne). — Supposons que X vérifie (\mathcal{H}) et (H4), H vérifiant (2-1) d'indice d'Hermite k vérifiant :

$$k(2-\beta) > 1$$

Alors :

$$n^{-1/2} V_{H,n} \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où σ^2 est donné par (2-11).

Par exemple, la condition (H4) est satisfaite pour $L(t)=a(-\log t)^\alpha(1+o(1))$ avec $C \leq 1$ si $\alpha > 0$ et $C \leq b^\alpha$ si $\alpha < 0$.

II.2. p -Variations

Spécifions la forme de H :

$$H(x)=|x|^p-b_p, \quad p \neq 0, \quad p > -\frac{1}{2} \quad (2-12)$$

$$b_p=E(|Y|^p), \quad Y \text{ normale réduite.}$$

Il est facile de voir que le rang d'Hermite de H est toujours $k=2$, avec pour premier coefficient a_2 sur H_2 :

$$a_2=\frac{p}{2}b_p.$$

On a :

$$V_{H,n}=\sum_{j=1,n}\left(\left|\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}\right|^p-b_p\right).$$

Notons la p -variation pondérée de module de X par :

$$\text{VP}_{p,n}=\frac{1}{n\sigma_n^p}\sum_{j=1,n}|\Delta_j^n X|^p \quad (2-13)$$

$$E \text{VP}_{p,n}=b_p, \quad V_{H,n}=n(\text{VP}_{p,n}-b_p)$$

On a comme conséquence immédiate des théorèmes 1, 2, 3 :

COROLLAIRE. — Si H, b_p sont définies par (2-12), si $\text{VP}_{p,n}$ représente la p -variation pondérée (2-13) de X , si X vérifie (\mathcal{H}), on a :

$$(a) \quad 0 < \beta < \frac{3}{2}: \sqrt{n}(\text{VP}_{p,n}-b_p) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où σ^2 est défini par (2-11).

(b) $\frac{3}{2} < \beta < 1$: $n^{2-\beta} L\left(\frac{1}{n}\right)(VP_{p,n} - b) \xrightarrow{\text{Loi}} \frac{p}{4} b_p I_2$
 où I_2 , dans le 2^e chaos de Wiener, est défini par le théorème 2.

II-3. Quelques remarques

II-3.1. Description de la variation quadratique limite par ses cumulants

Comme observé en II-2, la p -variation est réductible à la variation quadratique dans le cas de convergence non gaussienne. Notons :

$$VQ_n = \sum_{j=1, n} (\Delta_j^n X)^2 \quad (2-14)$$

et W_n la variable VQ_n réduite, J la limite en loi de W_n pour $\frac{3}{2} < \beta < 2$ et,
 pour $k \geq 2$:

$$c_k = \int_{[0, 1]^k} R''(|x_1 - x_2|) R''(|x_2 - x_3|) \dots R''(|x_k - x_1|) dx_1 \dots dx_k. \quad (2-15)$$

Alors J est caractérisée par ses cumulants K_k , $k \geq 2$:

$$K_k = (-1)^k (k-1)! \frac{c_k}{(c_2)^{k/2}}. \quad (2-16)$$

Un calcul de ces cumulants directement à partir de la forme de J dans le 2^e chaos de Wiener n'est pas aisés. Nous indiquons plus loin le schéma d'obtention de cette caractérisation s'apparentant à la méthode développée en [3] et [6] par Rosenblatt pour le temps discret.

II-3.2. La condition (H3) peut être affaiblie : par exemple, examinant la variation quadratique sous la condition $\frac{3}{2} < \beta < 2$, il suffit de supposer R concave (ou convexe) sur $[0, 1]$. En effet, si $t^\alpha |L_1(t)|^\gamma$ n'est pas intégrable en 0, on a :

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha |L_1(t)|^\gamma dt = -(\alpha+1)^{-1} \varepsilon^{\alpha+1} L_1(\varepsilon) (1 + o(1)).$$

On obtient cet ordre en remarquant que, pour la fonction à variation régulière à l'infini

$$V(x) = \left| L_1 \left(\frac{1}{x} \right) \right|^\gamma x^{-\alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x)}{\int_{x_0}^x V(u) du} = 1 - \alpha$$

(cf. théorème 1.2.1 de [14]).

II-3.3. L'examen du cas frontière : $k(2-\beta)=1$ peut conduire aux deux types de convergence suivant l'intégrabilité ou non de $(R'')^k$ en 0. Par exemple, sous les conditions (\mathcal{H}) et $(H-4)$ et dans le cas de la variation quadratique, on a :

$(R'')^2$ intégrable en 0, $\beta = \frac{3}{2}$: convergence non gaussienne décrite dans le théorème 4 (vitesse inchangée par rapport à $\beta > \frac{3}{2}$).
 $(R'')^2$ non intégrable en 0, $\beta = \frac{3}{2}$: convergence gaussienne mais la vitesse est en $n^{1/2} L^{-1/2} \left(\frac{1}{n}\right)$.

III. DÉMONSTRATIONS DES RÉSULTATS

On se place donc sous les conditions (\mathcal{H}) pour X et (2-1) pour H.

III-1. Démonstration du théorème 1 : (réduction si $k(2-\beta) < 1$)

Ce résultat est l'analogie, à temps continu, de celui établi par M. Taqqu ([5], [7]) pour un processus X à temps discret. Si (Y, Z) est un couple gaussien, à marginales réduites, et corrélé à ρ , rappelons que l'on a [4] :

$$E(H_l(Y) H_j(Z)) = \delta_{l,j} l! \rho^l. \quad (3-1)$$

Notant :

$$c_{n,l} = \sum_{|j| \leq n-1} (n-|j|) r_n(j)^l \quad (3-2)$$

on obtient, sur la base de (3-1) :

$$\begin{aligned} E(V_{k,n}^2) &= k! \sigma_n^{-2k} c_{n,k} \\ E(R_{k,n}^2) &= \sum_{l \geq k+1} l! a_l^2 \sigma_n^{-2l} c_{n,l} \\ E(V_{k,n} \cdot R_{k,n}) &= 0. \end{aligned}$$

Quand il n'y aura pas ambiguïté, on notera :

$$x_j = \frac{j}{n}, \quad h = n^{-1}.$$

On a, d'après (\mathcal{H}) :

$$\begin{aligned} r_n(0) &= \sigma_n^2 = 2h^\beta L(h) \\ r_n(j) &= -R(x_{j-1}) + 2R(x_j) - R(x_{j+1}), \quad j \geq 1 \\ &= -h^2 R''(x_j + \theta_j^n h), \quad \text{avec } |\theta_j^n| < 1. \end{aligned} \quad (3-4)$$

Puisque $k > 1$, (2-3) implique $\beta > 1$ et donc la positivité de $(-R'')$ au voisinage de $t=0$. Soit $0 < \delta < 1$ t. q. sur $[0, \delta]$, R'' soit positive décroissante.

$$R''(x_{j+1}) \leq R''(x_j + \theta_j^n h) \leq R''(x_{j-1}), \quad j = 2, [n\delta].$$

Soit $k_0 + 1$ le premier entier s t. q. : $s(2 - \beta) \geq 1$.

Examinons la situation : $k \leq l \leq k_0$
 $(-R'')^l$ est alors intégrable et on a l'encadrement :

$$\begin{aligned} \int_{4h}^{\delta} (1-x)(-R''(x))^l dx &\leq - \sum_{j=2}^{[n\delta]} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n} (-R''(x_j + \theta_j^n h))^l \\ &\leq \int_h^{\delta} (1-x)(-R''(x))^l dx \end{aligned} \quad (3-5)$$

Sur $\left[\frac{\delta}{2}, 1\right]$, la continuité de R'' et les conditions uniformes : $|\theta_j^n| \leq 1$, permettent d'approcher l'intégrale de $(1-x)(-R''(x))^l$ sur $[\delta, 1]$ par la somme de Riemann (de $[n\delta] + 1$ à n) définie comme en (3-5). On en déduit :

(i) en k_0 :

$$c_{n,k} = (-1)^k h^{2k-2} \left(\int_{-1}^1 (1-|x|) R''(x)^k dx + o(1) \right). \quad (3-6)$$

Cette égalité jointe au fait que $\sigma_n^2 = r_n(0) = 2h^\beta L(h)$ permet de conclure la partie (a) du théorème 1.

(ii) $k_0 + 1 \leq l \leq k$, $c_{n,l} = O(h^{2l-2})$; et donc

$$\sigma_n^{-2l} c_{n,l} = O(h^{l(2-\beta)-2} L(h)^{-l}) = o(n^{2(1-k)} \sigma_n^{-2k}). \quad (3-7)$$

Si $l \geq k_0 + 1$, $(-R'')^l$ n'est plus intégrable et la partie dominante de la somme $\sum_{j=2, n}^l \frac{1}{n} (-R''(x_j + \theta_j^n h))^l$ est donnée par la somme en $j=2, [n\delta]$.

Utilisant alors la partie majoration de l'encadrement (3-5), on obtient, pour n assez grand :

$$|c_{n,l}| \leq 10n \left(r_n(0)^l + h^{2l-1} \int_h^1 |R''(x)|^l dx \right) \leq ch^{2l-1} |L(h)|^l$$

et donc :

$$\sigma_n^{-2} c_{n,l} = O(h^{-1}) = o(n^{2(1-k)} \sigma_n^{-2k}) \quad (3-8)$$

(3-1), (3-7), (3-8) conduisent alors à b). ■

III-2. Démonstration du théorème 2 : (convergence non gaussienne de la H-variation vers un élément du k-ième chaos de Wiener)

Le résultat du théorème 2 est, en partie, l'analogue, à temps continu, de celui donné par R. L. Dobrushin et P. Major [7] pour un processus fixe à temps discret. La situation diffère ici du fait que $\Delta^n X$ est un processus à temps discret dont la structure évolue avec n. Dans la démarche proposée en [7] les lemmes 2 et 3 restent inchangés, par contre le lemme 1 et la proposition 1 doivent être repris. La mesure spectrale G_0 par rapport à laquelle sera définie l'intégrale de Ito-Wiener [10] ne possède pas, ici, de propriété d'Auto-similarité. G_0 sera décrite en terme de R'' .

Puisque la condition : $k(2-\beta) < 1$ est réalisée, le théorème 1 permet de réduire la H-variation à la $a_k H_k$ variation. Notons alors :

$$Y_n = n^{k-1} \sigma_n^k \sum_{j=1, n} H_k \left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n} \right)$$

$G_n^{(n)}$ la mesure spectrale (sur $[-\pi, \pi]$) de $\Delta^n X$
 $G_n^{(n)}$ la mesure spectrale sur \mathbb{R} , portée par $[-n\pi, n\pi]$,
définie par : $G_n^{(n)}(A) = n^2 G_n^{(n)} \left(\frac{A}{n} \cap [-\pi, \pi] \right)$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Utilisant la formule de Ito (cf. [10], p. 30) pour $H_k \left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n} \right)$, un calcul direct conduit à :

$$Y_n = \int_{\mathbb{R}^k} K_n(x_1, \dots, x_k) Z_{G_n^{(n)}}(dx_1) \dots Z_{G_n^{(n)}}(dx_k)$$

avec

$$K_n(x_1, \dots, x_k) = \frac{1 - \exp i(x_1 + \dots + x_k)}{n(1 - \exp(i/n)(x_1 + \dots + x_k))}.$$

Soit φ_n la modification de la transformée de Fourier de la mesure :

$$\begin{aligned} & |\mathbf{K}_n|^2 G_n^{(n)}(dx_1) \dots G_n^{(n)}(dx_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\exp \frac{i}{n} (j_1 x_1 + \dots + j_k x_k) \right) |\mathbf{K}_n|^2 G_n^{(n)}(dx_1) \dots G_n^{(n)}(dx_k) \end{aligned} \quad (3-11)$$

où : $j_l = [nt_l]$, $l = 1, k$.

Un calcul direct montre que :

$$\varphi_n(t_1, \dots, t_k) = n^{2(k-1)} \sum_{|p| \leq n-1} (n-|p|) \prod_{l=1}^k r_n(p+j_l).$$

LEMME 1. — Soit $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(t_1, \dots, t_k) = (-1)^k \int_{-1}^1 (1-|x|) R''(x+t_1) \dots R''(x+t_k) dx.$$

Alors si : $k(2-\beta) < 1$, g est bien définie, continue partout et :

$$\lim_n \varphi_n = g$$

uniformément sur tout compact.

PROPOSITION 1. — Si R'' est dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $G_n^{(n)}$ tend localement faiblement vers la mesure G_0 , localement finie, définie par la densité spectrale :

$$g_0(x) = - \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) \cdot R''(t) dt$$

$\left(\begin{array}{l} \text{si } \mu_n, \mu_0 \text{ sont localement finies, on dit que } \mu_n \text{ tend localement faiblement} \\ \text{vers } \mu_0 \text{ si pour tout fonction } f \text{ continue à support compact,} \\ \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu_0 \end{array} \right).$

Le théorème 2 résulte alors, dans les mêmes termes que ceux de [7], de la représentation (3.10) de Y_n , des trois lemmes et de la proposition 1.

Démonstration du lemme 1. — Soit $f: [-1, 1]^k \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t_1, \dots, t_k; x) = \begin{cases} (-1)^k (1-|x|) \prod_{l=1, k} R''(x+t_l) & \text{si } x \neq t_l, l=1, k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3-12)$$

Notons :

$$\|R''\|_{k, M}^k = \int_{-(M+1)}^{(M+1)} |R''(x)|^k dx < \infty, \quad \text{pour } M > 0 \text{ fixé.}$$

A t_1, \dots, t_k fixés, l'inégalité de Holder en x donne :

$$\int_{-1}^1 |f| dx \leq \|R''\|_{k, 2}^k < \infty$$

g est donc bien définie. D'autre part, pour $0 < \varepsilon < 1$, l fixé, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|x+t_l| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f(t_1, \dots, t_k; x)| dx &\leq \left[\prod_{s=1, k} \int_{\substack{|x+t_s| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |\mathbf{R}''(x+t_s)|^k dx \right]^{1/k} \\ &\leq \|\mathbf{R}''\|_{k, M}^{k-1} \cdot \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\mathbf{R}''(x)|^k dx \right]^{1/k} \end{aligned} \quad (3-13)$$

dès que : $|t_1|, \dots, |t_k| \leq M$. g est donc continue partout.

Soit la fonction $f_n : [-1, 1]^k \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie

$$\begin{aligned} f_n(t_1, \dots, t_k; x) &= \left(1 - \frac{[nx]}{n}\right) \prod_{l=1, k} n^2 r_n([nx]+j_l) \\ j_l &= [nt_l], \quad l=1, k. \end{aligned} \quad (3-14)$$

Un calcul direct donne :

$$\int_{-1}^1 f_n(t_1, \dots, t_k; x) dx = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Choisissons : $0 < \varepsilon < 1/2$, $0 < M < \infty$ et définissons :

$$E(\varepsilon, M) = \{x \in [-1, 1] \text{ t. q. pour } l=1, k, |x+t_l| \geq \varepsilon, |t_l| \leq M\}.$$

L'égalité (3-4) montre alors que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $E(\varepsilon, M)$. D'autre part, f étant intégrable en x , on a, pour tout $l=1, k$:

$$\int_{\substack{|x+t_l| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f(t_1, \dots, t_k; x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3-15)$$

On va obtenir un même contrôle relatif à f_n , uniformément en t_1, t_2, \dots, t_l . Sur $[-M, M]$, on a la première estimation :

$$\begin{aligned} \int_{|x+t_l| \leq \varepsilon} |f_n| dx &\leq \frac{1}{n} \sum_{|p+j_l| \leq 2[nM]} \prod_{s=1, k} n^2 |r_n(p+j_s)| \\ &\leq C(n, M, k) \delta_n^k (\text{Holder}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C(n, M, k) &= \left[\frac{1}{n} \sum_{|p| \leq [n(M+1)]} n^{2k} |r_n(p)|^k \right]^{(k-1)/k} \\ \delta_n^k &= \frac{1}{n} \sum_{|p| \leq 2[nM]} n^{2k} |r_n(p)|^k. \end{aligned}$$

Majorant $|r_n(p)|$ par $r_n(0)$ si $p \leq 2$, par $2h^2 \left| R''\left(\frac{p-1}{n}\right) \right|$ si $3 \leq |p| \leq [n(M+1)]$ et n assez grand, on obtient :

$$\delta_n^k = O\left(h^{k(2-\beta)+1} L(h)^k + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |R''(x)|^k dx\right) = O(\varepsilon^{k(\beta-2)+1} |L(\varepsilon)|^k)$$

et donc, uniformément en t_1, t_2, \dots, t_k sur $[-M, M]^k$,

$$\int_{\substack{|x+t_l| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f_n(t_1, \dots, t_k; x)| dx < C(\varepsilon) \quad (3-16)$$

où $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

La deuxième partie du lemme 1 est alors une conséquence de (3-15), (3-16), de la convergence uniforme de f_n vers f sur $E(\varepsilon, M)$ et de la majoration uniforme sur $[-M, M]^k$:

$$\begin{aligned} |\phi_n - g|(t_1, \dots, t_k) &\leq \int_{E(\varepsilon, M)} |f_n - f| dx \\ &\quad + \sum_{l=1, k} \int_{\substack{|x+t_l| \leq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} (|f_n| + |f|) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 1. — L'intégrabilité de R'' sur \mathbb{R} implique : $\sum_{j \geq 0} n|r_n(j)| < \infty$. La mesure spectrale $G_n^{(n)}$ de $\Delta^n X$ admet donc une densité $g^{(n)}$. Soit alors f une fonction réelle continue à support compact et

$$I_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(y) G_n^{(n)}(dy).$$

Faisant le changement de variable $y=nz$, on obtient :

$$I_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(nz) n^2 g^{(n)}(z) dz$$

où :

$$g^{(n)}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_n(j) \exp(ijz) \text{ (dans } l^1(\mathbb{Z}))$$

notant :

$$g_n^{(n)}(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} nr_n(j) \exp\left(i \frac{j}{n} y\right),$$

le remplacement de $g^{(n)}$ par son développement dans $I_n(f)$ donne :

$$I_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g_n^{(n)}(y) dy.$$

Soit alors :

$$g_0(y) = - \int_{\mathbb{R}} \exp(ity) R''(t) dt$$

($-R''$), qui est intégrable, est la covariance du processus généralisé \hat{X}_n , dérivée de X ([2], p. 263), et donc g_0 est la densité spectrale d'un processus généralisé. Cette propriété peut s'obtenir également de façon directe : soit $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, t_1, t_2, \dots, t_m m -points distincts de \mathbb{R} , alors :

$$\begin{aligned} B &= - \sum_{i, j=1, m} a_i a_j R''(t_i - t_j) \\ &= \lim_n \sum_{i, j=1, m} a_i a_j h^2 r_n([n(t_i - t_j)]) \geq 0. \end{aligned}$$

Il reste à voir que :

$$I_n(f) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(y) g_0(y) dy.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Cette convergence résulte directement des trois propriétés suivantes, qui s'obtiennent en utilisant (3-4) :

$$(i) \quad \sum_{|j| \geq [n\varepsilon]} n r_n(j) \exp\left(i \frac{j}{n} y\right) \xrightarrow{n} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp(ity) R''(t) dt$$

uniformément en y sur tout compact ($\varepsilon > 0$ fixé).

$$(ii) \quad \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp(ity) R''(t) dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$(iii) \quad \sum_{j \leq [n\varepsilon]} n r_n(j) \exp i \frac{j}{n} y \rightarrow 0 \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0$$

uniformément en y , sur tout compact. ■

III.3. Démonstration du théorème 3 (convergence gaussienne)

Par rapport aux théorèmes 1 et 2, on supposera que X vérifie l'hypothèse supplémentaire (H-4) et :

$$k(2 - \beta) > 1. \quad (3-17)$$

Pour un processus à temps discret, la convergence gaussienne d'une fonctionnelle (non linéaire) d'un processus gaussien est démontrée par

P. Breuer et P. Major [11]. La normalité limite de $V_{H,n}$ s'obtient en identifiant les moments de $V_{H,n}$. Le processus $\{X_j, j=1, n\}$ considéré dans [11] doit être remplacé, au pas n , par $\{\tilde{X}_j^{(n)} = \frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}, j=1, n\}$. La démonstration de [11] reste inchangée quant à sa partie combinatoire (formule du diagramme). L'existence de la limite de la suite $(n^{-1} \text{Var}(V_{H,n}))$ et la non contribution, dans la formule du diagramme, des graphes irréguliers résulteront des lemmes 2 et 3 ci-dessous; la démonstration du théorème 3 découlera alors de ces deux propriétés.

Soit $\rho_n(j)$, $j \geq 1$, la corrélation du processus $\Delta^n X$. D'après (3-4) et \mathcal{H} , on a :

$$\begin{aligned}\rho_n(1) &= -1 + 2^{\beta-1} \frac{L_1(2h)}{L(h)} \\ \rho_n(j) &= -\frac{1}{2}(j + \theta_j^n h)^{\beta-2} \frac{L_1(jh + \theta_j^n h)}{L(h)}, \quad j \geq 2\end{aligned}\tag{3-18}$$

LEMME 2. — Supposons que X vérifie \mathcal{H} , (H-4) et $k(2-\beta) > 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ t. q. : $k\varepsilon < k(2-\beta)-1$, et soit :

$$r(j) = (j-1)^{\beta+\varepsilon-2}, \quad j \geq 2, \quad r(0) = r(1) = 1.$$

Il existe alors $K(\varepsilon)$, $N_0(\varepsilon)$ finis t. q. :

Si $n \geq N_0(\varepsilon)$, $j=1, 2, \dots, n$, on a :

$$|\rho_n(j)| \leq K(\varepsilon) r(j).$$

LEMME 3. — (a) Sous la condition (\mathcal{H}) pour X , $\rho_n(j) \xrightarrow[n]{} \rho(j)$, $j \geq 1$ où

$\rho(j)$, $j \geq 1$ sont définis par (2-8).

(b) Si de plus, X vérifie (H-4) et si $k(2-\beta) > 1$ et $l \geq k$, alors :

$$\lim_n \sum_{|j| \leq n-1} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \rho_n(j)^l = \sigma_l^2 < \infty$$

où σ_l^2 est définie par (2-10).

Démonstration du Lemme 2. — Soit b donnée par (H-4) et $a = 1 - b$, $0 < a < 1$

$2 \leq j \leq [n^a]$: on a, d'après (H-4), pour n assez grand

$$|\rho_n(j)| \leq C(j-1)^{\beta-2}$$

$[n^a] \leq j \leq n$: soit $\varepsilon > 0$ choisi comme indiqué dans le lemme 2. On a :

$$\begin{aligned} |\rho_n(j+1)| &\leq \frac{1}{2} j^{\beta+\varepsilon-2} j^{-\varepsilon} \frac{|L_1((j+1)h + \theta_{j+1}^n h)|}{|L(h)|} \\ &\leq j^{\beta+\varepsilon-2} h^{a\varepsilon} \frac{|L_1((j+1)h + \theta_{j+1}^n h)|}{|L(h)|} \end{aligned} \quad (3-19)$$

puisque : $j^{-\varepsilon} \leq 2h^{a\varepsilon}$.

Soit δ : $0 < \delta < a\varepsilon$ et $K = K(\delta)$ t. q. sur $]0, 1]$:

$$|\rho_n(j+1)| \leq K(\delta) j^{\beta+\varepsilon-2-\delta} h^{a\varepsilon-\delta} |L(h)|^{-1} \leq K(\delta) j^{\beta+\varepsilon-2}$$

pour n assez grand. ■

Démonstration du lemme 3. — (a) D'après (3-4) et (H1), j étant fixé, on a :

$$\begin{aligned} \rho_n(j) &= \frac{-R((j-1)h) + 2R(jh) - R((j+1)h)}{2h^\beta L(h)}, \quad \left(h = \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{(j-1)^\beta L((j-1)h) - 2j^\beta L(jh) + (j+1)^\beta L((j+1)h)}{2L(h)} \end{aligned}$$

L étant à variation lente, on a :

$$\rho_n(j) = \frac{1}{2} [(j-1)^\beta - 2j^\beta + (j+1)^\beta] + o(1)$$

= $\rho(j) + o(1)$, d'où (a).

(b) Il suffit de vérifier que :

$$\sum_{j=1}^n \rho_n(j)^l \rightarrow L(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(j)^l.$$

L'existence de $L(l)$ étant assurée par (3-17).

Or on a, d'après le lemme 2 :

$$|\rho_n(j)|^l \leq K r(j)^l$$

avec $(r(j)^l)$ sommable. La convergence recherchée résulte du théorème de la convergence dominée et de (a).

III.4. Sur la remarque II.3.1 : calcul des cumulants de la loi limite de la variation quadratique réduite

Soit $C_n = \text{Cov}\{\Delta_j^n X, j=1, n\}$ de valeurs propres $\{\lambda_{i,n}, i=1, n\}$; $V_{2,n} = VQ_n - EVQ_n$ est de variance $s_n^2 = \sum_{i=1, n} \lambda_{i,n}^2$ et de loi

$\sum_{i=1, n} \lambda_{i, n} (\chi_{i, 1}^2 - 1)$ (cf. [3], [6]) où les χ^2 sont indépendants. Un calcul direct de la fonction cumulant de $V_{2, n}$ réduite donne :

$$\psi_n(t) = \sum_{k \geq 2} 2^{k-1} \frac{(it)^k}{k} I_{n, k},$$

avec

$$I_{n, k} = s_n^{-k} \text{Trace} (C_n)^k = s_n^{-k} \sum_{j=1}^n \lambda_{j, n}^k.$$

L'identification de la loi limite s'obtiendra à partir de l'étude de :

$$\begin{aligned} J_{n, k} &= h^{-k} \text{Trace} (C_n)^k \\ &= h^{-k} \sum_{j_1, \dots, j_k=1, n} r_n(|j_1-j_2|) \dots r_n(|j_k-j_1|) \end{aligned}$$

Pour ce faire, il faut d'une part démontrer l'existence des c_k , d'autre part vérifier que $\lim J_{n, k} = (-1)^k c_k$. Le premier point est une conséquence de l'intégrabilité en 0 de $(R')^2$. Quant au deuxième il s'obtient en remarquant que l'on peut représenter :

$$J_{n, k} = \int_{[0, 1]^k} f_n dx_1 \dots dx_k$$

avec

$$\begin{aligned} f_n &= \prod_{l=1, k} g_n(x_l - x_{l+1}) \quad (\text{posant } x_{k+1} = x_1) \\ g_n(x-y) &= r_n(|j-s|) h^{-2} \\ \text{si } x &\in](j-1)h, jh], \quad y \in](s-1)h, sh] \end{aligned}$$

où f_n converge uniformément, en dehors de l'origine, vers la fonction f , définissant c_k , f et f_n étant convenablement contrôlés autour de l'origine.

RÉFÉRENCES

- [1] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Application*, Tome II, J. Wiley, 1966.
- [2] M. GUEL'FAND et N. Ya. VILENIN, *Generalized Functions*, vol. 4: *Applications of Harmonic Analysis*, Acad. Press, 1964.
- [3] M. ROSENBLATT, Independence and Dependence, *Proc. 4th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Proba.*, 1961, p. 431-443.
- [4] B. SIMON, *The P(Φ)₂ Euclidian Quantum Field Theory*, Princeton Univ. Press, 1974.
- [5] M. TAQQU, Weak Convergence to Fractional Brownian Motion and to the Rosenblatt Process, *Z. W. veb. Geb.*, vol. 31, 1975, 287-303.
- [6] M. ROSENBLATT, Some Limit Theorems for Partial Sums of Quadratic Forms in Stationary Gaussian Variables, *Z. W. veb. Geb.*, vol. 49, 1979, p. 125-132.

- [7] R. L. DOBRUSHIN et P. MAJOR, Non Central Limit Theorems for Non-Linear Functionals of Gaussian Fields, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **50**, 1979, p. 27-52.
- [8] M. TAQQU, Convergence of Integrated Processes of Arbitrary Hermite Rank, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **50**, 1979, p. 53-83.
- [9] M. TAQQU, Law of the Iterated Logarithm for Sums of Non-Linear Functions of Gaussian Variables that Exhibit a Long Range Dependence, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **40**, 1977, p. 203-238.
- [10] P. MAJOR, Multiple Wiener-Ito Integrals, *L.N.M.*, n° 849, Springer-Verlag, 1981.
- [11] P. BREUER et P. MAJOR, Central Limit Theorems for Non-Linear Functionals of Gaussian Fields, *J. Multi. Anal.*, vol. **13**, 1981, p. 425-441.
- [12] X. GUYON, Variations des Champs Gaussiens stationnaires, Application à l'identification, *Proba. Th. Rel. Fields*, vol. **75**, 1987, p. 179-193.
- [13] J. ORTEGA, *On the Variation of Gaussian Processes and Fields*, Preprint U.C.V., Caracas, 1988.
- [14] L. DE HAAN, *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*, Mathematical Centre Tracts n° 032, Math. Centre, Amsterdam, 1970.

(Manuscrit reçu le 29 avril 1988;
corrigé le 6 décembre 1988.)