ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-MARC AZAÏS

Approximation des trajectoires et temps local des diffusions

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 2 (1989), p. 175-194
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_2_175_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 25, n° 2, 1989, p. 175-194.

Probabilités et Statistiques

Approximation des trajectoires et temps local des diffusions

par

Jean-Marc AZAÏS

Laboratoire de Biométrie I.N.R.A., F 78026 Versailles,
et U.A. 743 C.N.R.S., Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay

RÉSUMÉ. — Soit $X(t)$ un processus de diffusion, soit $X_\varepsilon(t)$ le processus obtenu par convolution avec une approximation de l'unité de taille ε et soit $X_\Delta(t)$ le processus obtenu par discrétisation de pas Δ et par interpolation linéaire; nous montrons que lorsque ε et Δ tendent vers zéro, les nombres de franchissements d'un niveau par X_ε ou X_Δ convergent, après normalisation, vers le temps local de X. Pour les diffusions qui s'écrivent comme une fonction du Wiener, nous étudions les propriétés de la densité jointe finidimensionnelle du lissé X_ε et de sa dérivée.

Mots clés : Convergence en probabilité, convergence L^K, temps local, diffusion, formules de Rice.

ABSTRACT. — Let $X(t)$ be a diffusion process, let $X_\varepsilon(t)$ be obtained by convolution of $X(t)$ with a size-ε approximate identity and let $X_\Delta(t)$ be the size Δ polygonal approximation of $X(t)$; we show that the number of crossings of $X_\varepsilon(t)$ and $X_\Delta(t)$ converge to the local time of $X(t)$ after normalization. We study the joint density of $X_\varepsilon(t)$ and its derivative in the case when $X(t)$ is a function of the Wiener process.

Classification A.M.S. : 60 J 60 : Diffusion processes; 60 F 25 : L^D. Limit Theorems; 60 J 55: Local time and additive functional.

I. INTRODUCTION

Soit X un processus admettant un temps local et soit X_ε une famille d'approximations de X à trajectoires régulières qui converge en un certain sens vers X quand ε tend vers zéro. Le nombre de franchissements d'un niveau u donné par X_ε tend vers l'infini quand ε tend vers zéro. Si après normalisation il tend vers une limite, celle-ci sera très vraisemblablement le temps local de X. En effet la limite est une fonctionnelle additive qui ne croît que quand X est proche de u.

Wschebor, le premier, a étudié en 1984 ([W1], [W2]), le cas des processus de Wiener à plusieurs paramètres. Depuis il a été montré qu'une telle convergence avait lieu (dans L^2 ou dans tous les L^k) pour les processus gaussiens stationnaires [A1], les champs gaussiens stationnaires [B1], les processus gaussiens généraux et les processus stables [A2] pour l'une ou l'autre des deux approximations suivantes :

L'approximation par convolution : ψ est une fonction positive, suffisamment dérivable et $X_\varepsilon(t)$ est la fonction aléatoire définie par

$$X_\varepsilon(t)=(X*\psi_\varepsilon)(t) \qquad \text{ou} \qquad \psi_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\,\psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

L'approximation par discrétisation, $X_\Delta(t)$ est la ligne polygonale passant par les points

$$\{[k\,\Delta,\ X(k\,\Delta)];\ k\in\mathbb{N}\}.$$

Il est à noter que ces deux cas correspondent à l'observation incomplète d'un processus à trajectoires irrégulières par un appareil de mesure forcément insuffisamment « rapide ».

L'article [A2] exhibe des conditions suffisantes générales pour que l'on ait une telle convergence du nombre de franchissements (ou « crossings »). A part l'étude de D. Florens-Zmirou [F2] qui ne traite que de l'approximation par discrétisation dans un cas très particulier, le problème des diffusions n'avait pas été abordé. L'objet de cet article est de montrer la convergence, dans un cadre général, pour les deux types d'approximations.

Plus précisément nous considérerons Y (t), la solution forte de l'équation différentielle stochastique (E) :

$$\left.\begin{aligned} dY(t)&=b(Y(t))\,dt+\sigma(Y(t)\,dW(t)\\ Y(0)&=y_0\end{aligned}\right\} \tag{E}$$

ou W est un Wiener, b et σ sont lipschitziennes, de classe C^1 et σ est strictement positive. Nous utiliserons suivant les cas les deux hypothèses suivantes.

HYPOTHÈSE H1. — Hypothèse sur la fonction de régularisation ψ.

ψ est une fonction positive, $\mathscr{C}^\infty$, à support inclus dans $[-1, +1]$ et strictement convexe au voisinage de -1 au sens où il existe une valeur a comprise strictement entre -1 et $+1$ tel que ψ'' est strictement positive sur $]-1, a[$.

HYPOTHÈSE H2. — Hypothèse sur les coefficients de la diffusion :

(*a*) σ est biborné, c'est-à-dire qu'il existe σ_0 et σ_1 tel que pour tout u :

$$0<\sigma_0<\sigma(u)<\sigma_1<+\infty;$$

(*b*) b et σ sont tels que sur l'intervalle de temps [0, T] considéré, la loi de $\{Y(t),\ t\leqq T\}$ a une densité qui est de puissance p-ième intégrable, pour une valeur $p>1$, par rapport à celle de $\{X(t),\ t\leqq T\}$ où X est la solution de l'équation différentielle (E′)

$$\left.\begin{aligned} dX(t)&=\frac{1}{2}\sigma(X(t))\,\sigma'(X(t))\,dt+\sigma(X(t))\,dW(t)\\ X(0)&=x_0=y_0 \end{aligned}\right\}\tag{E'}$$

ce qui se traduit par

$$E\left\{\exp\left[\int^{T} p\,B(X(s))\,dW(s)-\frac{p}{2}\int^{T} B^2(X(s))\,ds\right]\right\}<\infty$$

où $B=\dfrac{b}{\sigma}-\dfrac{\sigma'}{2}$.

Nous avons alors le résultat suivant :

Soit ψ une fonction vérifiant l'hypothèse H_1, soit Y la solution de (E), soit I un intervalle à distance strictement positive de l'origine, soient Y_ε et Y_Δ obtenus comme précédemment (on convient de $Y(t)=0$ pour $t<0$) et soient respectivement $N_\varepsilon^u(I)$ et $N_\Delta^u(I)$ leur nombre de franchissements du niveau u, durant l'intervalle I. Nous obtenons alors le théorème 2

$$\sqrt{\Pi/2}\,\|\psi\|_2^{-1}\,\sqrt{\varepsilon}\,(\sigma(u))^{-1}\,N_\varepsilon^u(I)\ \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{\text{proba.}}{\longrightarrow}}\ L(u, I)$$

$$\sqrt{\Pi/2}\,\sqrt{\varepsilon}\,(\sigma(u))^{-1}\,N_\Delta^u(I)\ \underset{\Delta\to 0}{\overset{\text{proba.}}{\longrightarrow}}\ L(u, I)$$

où $L(u, I)$ est le temps local pour le niveau u et l'intervalle de temps I du processus Y.

Si de plus σ et b vérifient l'hypothèse H_2, alors la convergence a lieu dans tous les L^k. Des exemples de diffusions satisfaisant cette condition sont donnés à la fin de l'article.

La difficulté principale réside dans la preuve de l'existence et dans l'étude des densités jointes de X_ε et X'_ε (dérivée des trajectoires) quand X_ε est l'approximation par convolution. Comme $X_\varepsilon(t)$ et $X'_\varepsilon(t)$ s'écrivent comme des fonctionnelles du Wiener, on aurait pu essayer d'appliquer le calcul de Malliavin [B3], mais il ne paraissait pas certain que cela aurait permis d'établir les propriétés d'équicontinuité et de bornitude des lemmes 2 et 3. Pour cette raison nous avons choisi une voie plus élémentaire : le théorème 1 établit la convergence dans les L^k du nombre de franchissements pour la classe particulière des diffusions qui peuvent s'écrire comme une fonction déterministe du Wiener. La propriété est étendue à des formes de drift générales par absolue continuité en utilisant la formule de Girsanov.

Le seul fait de passer de la convolution d'un Wiener à la convolution d'une fonction de celui-ci pose de sérieuses difficultés techniques car on perd le caractère gaussien de X_ε largement utilisé dans les travaux antérieurs. Par rapport au cadre général de [A2] deux problèmes principaux se posent :

– Le premier est de montrer que X_ε et X'_ε admettent des densités fini-dimensionnelles et que donc le processus X_ε vérifie les formules de Rice.

– Le second est de montrer l'existence de limites pour les intégrales de moments conditionnels qui apparaissent dans les formules de Rice.

L'existence de densité est montrée dans les lemmes 2 et 3. Pour les formules de Rice nous utilisons la démonstration de [A2] et la majoration des moments des extrema locaux donnée par un théorème de Besson et Wschebor [W2, chap. 3.2].

Comme nous le remarquons à la fin de la partie III, la démonstration pour l'approximation par convolution s'étend immédiatement à l'approximation par discrétisation.

II. ÉTUDE DES DENSITÉS JOINTES DE X_ε, X'_ε POUR UNE DIFFUSION FONCTION DU WIENER

Soit $X(t)$ la solution forte de l'équation (E') avec σ bibornée (hypothèse H2 a) et soit ψ vérifiant l'hypothèse H1, si nous posons

$$s(x)=\int_0^x \frac{du}{\sigma(u)} \tag{2.1}$$

alors la formule d'Ito montre que

$$W(t)=s[X(t)]$$

est un processus de Wiener partant de $s(x_0)$ soit :

$$X(t)=s^{-1}[W(t)]. \tag{2.2}$$

II.1. Convergence en loi

LEMME 1. — *Pour tout t positif le couple :*

$$(X_\varepsilon(t), \|\psi_\varepsilon\|_2^{-1}[\sigma(X_\varepsilon(t)]^{-1}X'_\varepsilon(t))$$

converge en loi, quand $\varepsilon \to 0$, *vers*

$$(X(t), N)$$

où N *est une variable aléatoire normale centrée réduite indépendant de* X (t).

Démonstration. — Intégrons par parties :

$$X'_\varepsilon(t) = \int \psi_\varepsilon(t-s)(\sigma[X(s)]\,dW(s) + b[X(s)]\,ds)$$

avec $b = \frac{1}{2}\sigma\sigma'$.

Nous écrivons $X'_\varepsilon(t)/\|\psi_\varepsilon\|_2\,\sigma(X_\varepsilon(t))$ comme la somme de trois termes :

$$A(\varepsilon, t) = \frac{1}{\sigma(X_\varepsilon(t))}\int \frac{\psi_\varepsilon(t-s)}{\|\psi_\varepsilon\|_2}\sigma(X(t-\varepsilon))\,dW(s)$$

$$B(\varepsilon, t) = \frac{1}{\sigma(X_\varepsilon(t))}\int \frac{\psi_\varepsilon(t-s)}{\|\psi_\varepsilon\|_2}[\sigma(X(s)) - \sigma(X(t-\varepsilon))]\,dW(s).$$

$$C(\varepsilon, t) = \frac{1}{\sigma(X_\varepsilon(t))}\int \frac{\psi_\varepsilon(t-s)}{\|\psi_\varepsilon\|_2} b(X\,s)\,ds$$

$$-|C(\varepsilon, t)| \leqq (\text{Cte}).\varepsilon\int \psi_\varepsilon(t-s)\,ds \leqq (\text{Cte}).\varepsilon \quad \text{car } b \text{ est borné}$$

$$\text{d'où } C(\varepsilon, t) \overset{\text{p. s.}}{\to} 0$$

$$-E[B(\varepsilon, t)]^2 \leqq (\text{Cte})\int \frac{\psi_\varepsilon^2(t-s)}{\|\psi_\varepsilon\|_2^2} E\{[\sigma(X(s)) - \sigma(X(t-\varepsilon))]^2\}\,ds$$

comme σ est bibornée et lipschitzienne :

$$|\sigma(X(s)) - \sigma(X(t-\varepsilon))| \leqq (\text{Cte})\,|(W(s) - W(t-\varepsilon)|$$

comme $\psi_\varepsilon(t-s)$ est nulle pour s en dehors de l'intervalle $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$

$$E|W(s) - W(t-\varepsilon)|^2 \leqq 2\varepsilon.$$

Il vient donc :

$$E[B(\varepsilon, t)]^2 \leqq (\text{Cte})\,\varepsilon\int \frac{\psi_\varepsilon^2(t-s)}{\|\psi_\varepsilon\|_2^2}\,ds = (\text{Cte})\,\varepsilon$$

donc $B(\varepsilon, t) \overset{L^2}{\to} 0$

$$-A(\varepsilon, t) = \frac{\sigma(X(t-\varepsilon))}{\sigma(X_\varepsilon(t))}\frac{W'_\varepsilon(t)}{\|\psi_\varepsilon\|_2} \qquad \text{où} \quad W_\varepsilon = W * \psi_\varepsilon.$$

Il est aisé de vérifier [W2] que $W'_\varepsilon(t)/\|\psi_\varepsilon\|_2$ suit une loi normale centrée réduite asymptotiquement indépendante de toutes les valeurs du Wiener.

Par ailleurs la continuité des trajectoires de X implique

$$\frac{\sigma X(t-\varepsilon)}{\sigma(X_\varepsilon(t))} \xrightarrow{\text{p. s.}} 1.$$

On en déduit le lemme en posant

$$N = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{W_\varepsilon(t)}{\|\psi_\varepsilon\|_2}. \tag{2.3}$$

COROLLAIRE. — *Le même résultat est vrai pour la loi jointe de* X_ε, $\|\psi\|_2^{-1}[\sigma(X_\varepsilon(t))]^{-1} X'_\varepsilon$ *en* k *instants* $t_1 < t_2 \ldots < t_k$. *En effet dès que*

$$2\varepsilon \leqq \inf_i \{t_i - t_{i-1}\}$$

les variables $W'_\varepsilon(t_i)/\|\psi_\varepsilon\|_2$ *sont indépendantes.*

II.2. Étude des densités

Dans tout ce qui suit nous supposerons que t varie dans un ensemble borné $]0, T]$ et que ε est inférieur à t.

LEMME 2. — $X_\varepsilon(t)$ *et* $\sqrt{\varepsilon}\, X'_\varepsilon(t)$ *admettent une densité jointe* $P_{\varepsilon, t}(x, x')$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

— $P_{\varepsilon, t}(x, x')$ *est borné uniformément en* x_0, x, ε *par*

$$\frac{(\text{Cte})}{\sqrt{t-\varepsilon}}\, \varphi(x') \tag{2.4}$$

avec

$$\int |x'|\, \varphi(x')\, dx' < \infty.$$

— *Quand* ε *varie de façon à ce que* $t-\varepsilon$ *soit minoré par une constante strictement positive,* $P_{\varepsilon, t}(x, x')$ *est équicontinue sur tout compact.*

Démonstration. — Soit c inférieur à la valeur a de l'hypothèse H1. En conditionnant par

$$U = W(t-\varepsilon)$$
$$V = \varepsilon^{-1/2}[W(t+\varepsilon) - W(t-\varepsilon c)]$$

on écrit la valeur du Wiener $W(y)$, pour $t-\varepsilon < y < t+\varepsilon$ comme la somme de trois termes indépendants :

$$W(y) = U + \sqrt{\varepsilon}\,(k + V h)\left(\frac{y-t}{\varepsilon}\right)$$

où $-h$ est la fonction positive définie par

$$\begin{aligned} h(v)&=0 \qquad \text{si} \quad v \leqq -c \\ h(v)&=\frac{v+c}{1+c} \qquad \text{si} \quad -c \leqq v \leqq 1 \end{aligned}$$

– k est un processus à trajectoires continues sur $[-1, 1]$, de loi indépendante de ε; il est obtenu en « raccordant » un Wiener partant de zéro et défini sur $[-1, -c]$ avec un pont Brownien sur $[-c, 1]$.

– U suit une loi $N(s(x_0), (t-\varepsilon))$.

– V suit une loi $N(0, 1+c)$.

– k, U et V sont bien indépendants.

Dans un premier temps nous nous placerons conditionnellement à k et nous définirons les deux applications :

$$\left.\begin{aligned} X(u, v)&=\int \psi_\varepsilon(t-y)\, s^{-1}\left[u+\sqrt{\varepsilon}\,(k+vh)\left(\frac{y-t}{\varepsilon}\right)\right]dy \\ X'(u, v)&=\varepsilon^{1/2}\int \psi'_\varepsilon(t-y)\, s^{-1}\left[u+\sqrt{\varepsilon}\,(k+vh)\left(\frac{y-t}{\varepsilon}\right)\right]dy \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

conditionnellement à k on a bien :

$$X_\varepsilon(t)=X(U, V); \qquad \sqrt{\varepsilon}\, X'_\varepsilon(t)=X'(U, V).$$

Enfin nous noterons $L(u, v)$ la fonction qui a pour coordonnées X et X′. Il convient de remarquer que L comme X et X′ dépendent de ε et de k. Nous allons montrer que L est bijective et écrire la densité de $X_\varepsilon(t)$, $\sqrt{\varepsilon}\, X'_\varepsilon(t)$ à partir de celle de U et V par la formule de changement de variables.

Étude de l'application L. – Nous noterons $\langle \psi \mid h \rangle$: $\int \psi(-y)\, h(y)\, dy$.

En dérivant sous le signe somme les expressions (2.5) et en remarquant que

$$\sigma_0 \leqq (s^{-1})' = \sigma \circ s^{-1} \leqq \sigma_1,$$

on obtient les encadrements suivants

$$\sigma_0 \leqq \frac{\partial X}{\partial u} \leqq \sigma_1 \tag{2.6}$$

$$\sigma_0 \sqrt{\varepsilon} \langle \psi \mid h \rangle \leqq \frac{\partial X}{\partial v} \leqq \sigma_1 \sqrt{\varepsilon} \langle \psi \mid h \rangle \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{\partial X'}{\partial u}\right| \leqq \sigma_1 \varepsilon^{-1/2} \|\psi'\|_1 \tag{2.8}$$

$$\sigma_0 \langle \psi' \mid h \rangle \leqq \frac{\partial X'}{\partial v} \leqq \sigma_1 \langle \psi' \mid h \rangle \tag{2.9}$$

$\langle \psi \mid h \rangle$ est positif car h est positive; $\langle \psi' \mid h \rangle$ est positif d'après l'hypothèse H1 car $c < a$. Dans certains cas la majoration (2.8) ne convient pas, on utilise alors une autre voie :

$$\frac{\partial X'}{\partial u} = \varepsilon^{-1/2} \int_{-1}^{+1} \psi'(-y)\, \sigma \circ s^{-1} [u + \sqrt{\varepsilon}\, k(y) + \sqrt{\varepsilon}\, vh(y)]\, dy.$$

Remarquons que $(\sigma \circ s^{-1})' = (\sigma\sigma') \circ s^{-1}$, que

$$\int_{-1}^{+1} \psi'(-y)\, \sigma \circ s^{-1}(u)\, dy = 0$$

et appliquons le théorème des accroissements finis, il vient :

$$\frac{\partial X'}{\partial u} = \int_{-1}^{+1} \psi'(-y)\, (\sigma\sigma') \circ s^{-1} [u + \xi \sqrt{\varepsilon}\, k(y) + \xi \sqrt{\varepsilon}\, vh(y)]\, (k + vh)(y)\, dy$$

et donc

$$\left| \frac{\partial X'}{\partial u} \right| \leqq \sigma_1 \sigma_2 \| \psi' \|_1 \, \| k + vh \|_\infty \tag{2.10}$$

où σ_2 est un majorant de $|\sigma'|$ qui existe car σ est lipschitzienne.

En dérivant deux fois sous le signe somme et en remarquant que $|(s^{-1})''| = |(\sigma\sigma') \circ s^{-1}| \leqq \sigma_1 \sigma_2$ on obtient les majorations suivantes des dérivées secondes.

$$\left| \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right| \leqq \sigma_1 \sigma_2; \qquad \left| \frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} \right| \leqq \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\varepsilon} \langle \psi \mid h \rangle;$$

$$\left| \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right| \leqq \sigma_1 \sigma_2\, \varepsilon \langle \psi \mid h^2 \rangle \tag{2.11}$$

$$\left| \frac{\partial^2 X'}{\partial u^2} \right| \leqq \sigma_1 \sigma_2\, \varepsilon^{-1/2} \| \psi' \|_1; \qquad \left| \frac{\partial^2 X'}{\partial u\, \partial v} \right| \leqq \sigma_1 \sigma_2 \langle \psi' \mid h \rangle;$$

$$\left| \frac{\partial^2 X'}{\partial v^2} \right| \leqq \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\varepsilon} \langle \psi' \mid h^2 \rangle \tag{2.12}$$

Soit $J(u, v)$ la matrice dérivée de L et soit $|J|(u, v)$ le Jacobien. Les relations (2.6) à (2.9) impliquent :

$$\frac{\partial X}{\partial u} \geqq a_{11} = \sigma_0 > 0$$

$$\frac{\partial X'}{\partial v} \geqq a_{22} = \sigma_0 \langle \psi' \mid h \rangle > 0$$

$$0 \leqq \frac{\partial X}{\partial v} \leqq a_{12} = \sigma_1 \sqrt{\varepsilon} \langle \psi \mid h \rangle$$

$$\frac{\partial X'}{\partial u} \leqq a_{21} = \sigma_1\, \varepsilon^{-1/2} \| \psi' \|_1.$$

Il est facile de vérifier que :

$$|J|(u, v) \geqq a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Soit Ψ la primitive de ψ définie par $\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)\, dy$. Comme h est inférieur à 1

$$\langle \psi \mid h \rangle \leqq \langle \psi \mid \chi_{\{]-\infty, -c]\}} \rangle = \Psi(c).$$

En intégrant par parties

$$\langle \psi' \mid h \rangle = \langle \psi \mid h' \rangle = \frac{\Psi(c)}{1+c}.$$

En conclusion, nous pouvons maintenant fixer c de telle façon que

$$\frac{1}{1+c} \geqq 2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \| \psi' \|_1$$

(ce qui est toujours possible en choisissant c suffisamment proche de -1), on a alors

$$a_{12} a_{21} \leqq \frac{1}{2} a_{11} a_{22} \tag{2.13}$$

et donc

$$|J|(u, v) \geqq \frac{1}{2} a_{11} a_{22} = \frac{1}{2} \sigma_0^2 \langle \psi' \mid h \rangle.$$

La relation (2.13) implique également que L est bijective; soient en effet (u_1, v_1) et (u_2, v_2) tels que :

$$L(u_1, v_1) = L(u_2, v_2).$$

En appliquant indépendamment la formule des accroissements finis à X et à X′, on obtient qu'il existe ξ_1 et ξ_2 tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial X}{\partial u}(\xi_1)(u_1 - u_2) + \dfrac{\partial X}{\partial v}(\xi_1)(v_1 - v_2) = 0 \\ \dfrac{\partial X'}{\partial u}(\xi_2)(v_1 - u_2) + \dfrac{\partial X'}{\partial v}(\xi_2)(v_1 - v_2) = 0 \end{array} \right.$$

mais les relations précédentes impliquent que le déterminant de ce système ne peut être nul; il a donc comme solution unique :

$$u_1 - u_2 = v_1 - v_2 = 0.$$

Soit $\Phi_{\varepsilon, t}$ la densité jointe gaussienne de U, V, nous pouvons maintenant écrire la densité conditionnelle à k, $P_{\varepsilon, t \mid k}(x, x')$ de (X, X') :

$$P_{\varepsilon, t \mid k}(x, x') = \Phi_{\varepsilon, t} \circ L^{-1}(x, x') \, |J|^{-1} \circ L^{-1}(x, x') \tag{2.14}$$

Φ comme $P_{\varepsilon, t\,|_k}(x, x')$ dépendent également de $s(x_0)$.

De la formule (2.14) on peut déduire directement que $P_{\varepsilon, t}$ existe et est majorée.

Étude de l'équicontinuité. — Elle se réduit à deux parties :

(*a*) l'équicontinuité de L^{-1};

(*b*) l'équicontinuité de $|J|^{-1} \circ L^{-1}$ qui une fois montré (*a*) et compte tenu de la minoration du Jacobien, se réduit à l'équicontinuité de $|J|(u, v)$:

(*a*) Équicontinuité de L^{-1}.

Nous noterons $U(x, x')$ et $V(x, x')$ les coordonnées de L^{-1}. La matrice dérivée de L^{-1} s'écrit :

$$dL^{-1} = |J^{-1}|(u, v) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X'}{\partial v} & -\dfrac{\partial X}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial X'}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial u} \end{bmatrix}$$

tous ces termes sont majorés en valeur absolue par une constante positive sauf

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -|J^{-1}|(u, v) \frac{\partial X'}{\partial u}(u, v)$$

qui est majoré d'après (2.10) par (Cte) $(\|k\|_\infty + |v|)$ donc :

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \leqq (\mathrm{Cte})(\|k|_\infty + |V(x, x')|). \tag{2.15}$$

Nous noterons K la quantité $\|k\|_\infty$. Remarquons que

$$|X(0, 0)| \leqq \sigma_1 \sqrt{\varepsilon} K$$

et que, pour tout u

$$|X'(u, 0)| \leqq \sigma_1 \|\psi'\|_1 K$$

de sorte que :

$$\|L(0, 0)\| \leqq (\mathrm{Cte}) K. \tag{2.16}$$

Soit (x, x') dans un compact de $\mathbb{R}^2$, que l'on supposera être inclus dans la boule fermée de rayon r. On a alors :

$$\|(x, x') - L(0, 0)\| \leqq r + (\mathrm{Cte}) K.$$

Nous allons montrer que cette relation implique que $|V(x, x')|$ est borné. Nous avons :

$$V(X(0, 0), X'(0, 0)) = 0$$

passons de $(X(0, 0), X'(0, 0))$ à $(x, X'(0, 0))$ parallèlement à l'axe des x. Le long de ce chemin V satisfait, d'après (2.15) à l'inéquation différentielle suivante :

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \leqq (\mathrm{Cte})(K+|V|)$$

on en déduit

$$|V(x, X'(0, 0))| \leqq K(e^{(\mathrm{Cte})(r+K)}-1).$$

Passons maintenant de $(x, X'(0, 0))$ à (x, x') parallèlement à l'axe des x'; le long de ce chemin la dérivée est majorée en valeur absolue par une constante :

$$|V(x, x')-V(x, X'(0, 0))| \leqq (\mathrm{Cte})(r+K)$$

donc au total

$$|V(x, x')| \leqq (\mathrm{Cte})(r+K)\, e^{(\mathrm{Cte})(r+K)}. \tag{2.17}$$

Maintenant nous pouvons réintroduire cette majoration dans (2.15) pour obtenir, en supposant r supérieur à 1, que la dérivée de L^{-1} dans une direction unitaire est majorée par

$$(\mathrm{Cte})\, e^{(\mathrm{Cte})(r+K)}. \tag{2.18}$$

En effet ce terme majore chaque élément de la matrice dérivée.

Nous appellerons équi-lipschitzienne (en abrégé E.L.) une famille f_ε de fonctions vérifiant

$$\| f_\varepsilon(x_1)-f_\varepsilon(x_2)\| \leqq (\mathrm{Cte})\, \| x_1-x_2 \|.$$

La relation (2.18) montre que L^{-1} est conditionnellement à k équi-lipschitzienne sur tout compact quand ε varie.

(*b*) Équicontinuité de $|J|$.

Il suffit d'écrire les dérivées $\partial|J|/\partial u$ et $\partial|J|/\partial v$ qui s'expriment comme sommes de deux déterminants. Les relations (2.6) à (2.12) montrent qu'elles sont toutes deux bornées et donc que $|J|$ est E.L.

Comme $t-\varepsilon$ est borné inférieurement et supérieurement, $\Phi_{\varepsilon, t}$ est E.L. quand ε varie. En combinant ces résultats nous obtenons que

$$P_{\varepsilon, t\,|k} \text{ est E.L. de coefficient } (\mathrm{Cte})\, e^{(\mathrm{Cte})(r+K)}$$

sur la boule fermée de rayon r.

Mais $K=\|k\|_\infty$ a tous ses moments exponentiels finis, en déconditionnant on obtient que quand ε varie

$$P_{\varepsilon, t} \text{ est E.L. sur tout compact.}$$

Nous passons maintenant à la majoration de la densité.

D'après (2.14) :

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon, t\,|k}(x, x') &\leqq (\mathrm{Cte})\, \Phi_{\varepsilon, t}(L^{-1}(x, x')) \\ &\leqq \frac{(\mathrm{Cte})}{\sqrt{t-\varepsilon}}\, e^{-|U(x, x')-s(x_0)|^2/2(t-\varepsilon)}\, e^{-(V(x, x'))^2/(2+2c)} \end{aligned}$$

comme t est majoré, en utilisant les relations (2.9) et (2.10) nous obtenons :

$$\begin{aligned}|X'(u, v)-X'(s(x_0), 0)| &\leqq |X'(u, v)-X'(u, 0)| \\ &\quad+|X'(u, 0)-X'(s(x_0), 0)| \leqq (\mathrm{Cte})\{|v|+K\,|u-s(x_0)|\} \\ &\leqq (\mathrm{Cte})(K+1)\,((u-s(x_0))^2/(t-\varepsilon)+v^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Nous pouvons donc en déduire

$$P_{\varepsilon, t\,|_k}(x, x') \leqq \frac{(\mathrm{Cte})}{\sqrt{t-\varepsilon}} \exp -\frac{1}{2}\left[\frac{(x'-X'(s(x_0), 0))^2}{C_1^2(K+1)^2}\right]. \tag{2.19}$$

D'après (2.16)

$$|X'(s(x_0), 0)| \leqq (\mathrm{Cte})\,K$$

on en déduit

$$P_{\varepsilon, t\,|_k}(x, x') \leqq \frac{(\mathrm{Cte})}{\sqrt{t-\varepsilon}} \exp -\frac{1}{2}\,\frac{x'^2}{C_2^2(K+1)^2}$$

avec $C_2 > C_1$. En déconditionnant :

$$P_{\varepsilon, t}(x, x') \leqq \frac{(\mathrm{Cte})}{\sqrt{t-\varepsilon}}\,\varphi(x')$$

où

$$\varphi(x') = \int \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{C_2(K+1)}\right)^2 dP(K)$$

P étant la loi de $\|k\|_\infty = K$.

Pour obtenir le résultat énoncé il ne reste plus qu'à vérifier que $\int |x'|\,\varphi(x')\,dx$ est bien fini. En appliquant le théorème de Fubini on trouve que cette expression est égale à

$$\begin{aligned}\iint \left|\frac{x'}{C_2(K+1)}\right| \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{C_2(K+1)}\right)^2\right) \\ \times d\left(\frac{x'}{C_2(K+1)}\right) C_2^2(K+1)^2\,dP(K) \\ \leqq (\mathrm{Cte}) \int C_2^2(K+1)^2\,dP(K) < \infty\end{aligned}$$

car K a un moment d'ordre 2 fini. Ceci achève la démonstration du lemme 2.

LEMME 3. — *Soient $t_1 < t_2$ deux instants différents et soit ε inférieur à* $\inf[t_1, (t_2-t_1)/2)]$ *alors, le quadruplet*

$$X_\varepsilon(t_1),\ \sqrt{\varepsilon}\,X'_\varepsilon(t_1),\ X_\varepsilon(t_2),\ \sqrt{\varepsilon}\,X'_\varepsilon(t_2)$$

admet une densité

$$P_{\varepsilon, t_1, t_2}(x_1, x'_1, x_2, x'_2)$$

majorée par

$$\frac{(\text{Cte})}{\sqrt{t_1-\varepsilon}\sqrt{t_2-\varepsilon}}\varphi(x'_1)\varphi(x'_2) \tag{2.20}$$

où φ *est la fonction du lemme 2.*

De plus, quand ε *varie de façon que* $(t_1-\varepsilon)$ *et* $(t_2-t_1-2\varepsilon)$ *soient minorés par une constante strictement positive,* $P_{\varepsilon, t_1, t_2}$ *est équicontinue sur tout compact.*

Démonstration. — Le lemme 2 décrit la densité de $X_\varepsilon(t_2)$, $\sqrt{\varepsilon}\,X'_\varepsilon(t_2)$ conditionnellement à $X(t_3)$ avec $t_3=t_1+t_2/2$. La propriété de Markov de X montre qu'en multipliant par la densité du triplet

$$(X_\varepsilon(t_1), \sqrt{\varepsilon}\,X'_\varepsilon(t_1), X_\varepsilon(t_3)).$$

Nous obtenons la densité du quintuplet :

$$X_\varepsilon(t_1), \sqrt{\varepsilon}\,X'_\varepsilon(t_1), X(t_3), X_\varepsilon(t_2)\sqrt{\varepsilon}\,X'_\varepsilon(t_2).$$

La majoration (2.20) résulte alors directement du lemme 2. Pour monter l'équicontinuité on peut remplacer $X(t_3)$ par $W(t_3)$, pour étudier la loi de

$$X_\varepsilon(t_1), \sqrt{\varepsilon}\,X'(t_1), W(t_3).$$

On définit U, k, V, h, X et X′ comme précédemment et on définit de plus

$$V_3=W(t_3)-W(t_1+\varepsilon)$$

qui suit une loi normale. Conditionnellement à k on définit la fonction X_3 par

$$X_3(u, v, v_3)=(W(t_3)\mid U=u, V=v, V_3=v_3).$$

X_3 est également fonction de ε et k. On définit enfin la fonction M de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$(u, v, v_3)\xrightarrow{M}(X, X', X_3),$$

Il est facile de vérifier que :

$$X_3(u, v, v_3)=u+\sqrt{\varepsilon}\,k(1)+\sqrt{\varepsilon}\,v+v_3 \tag{2.21}$$

et la matrice dérivée de M s'écrit

$$\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{J(u, v)}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 1 & \sqrt{\varepsilon} & 1 \end{array}\right]$$

(2.21) et la non-dépendance en v_3 de X et X′ montrent bien que M est inversible et que

$$\mathrm{M}^{-1}(x, x', x_3)=[\mathrm{L}^{-1}(x, x'), x_3-\mathrm{U}(x, x')-\sqrt{\varepsilon}\, k(1)-\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{V}(x, x')].$$

Soit $\Phi_{\varepsilon, t_1, t_3}$ la densité jointe gaussienne de (U, V, V_3), alors la densité conditionnelle à k de (X, X′, X_3) s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}|_k(x, x', x_3)=\Phi_{\varepsilon, t_1, t_3}&\\ &\times[\mathrm{U}(x, x'), \mathrm{V}(x, x'), x_3-\mathrm{U}(x, x')-\sqrt{\varepsilon}\, k(1)\\ &\qquad -\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{V}(x, x')]\,|\mathrm{J}|^{-1}\circ \mathrm{L}^{-1}(x, x'). \quad (2.22)\end{aligned}$$

Comme $t_1-\varepsilon$ et $t_3-t_1-\varepsilon$ sont minorés, Φ est équicontinue et l'équicontinuité de (2.22) résulte directement de celle de $|\mathrm{J}|$ et de L^{-1}.

LEMME 4. — *$\mathrm{X}'_\varepsilon(t)$ et $\mathrm{X}''_\varepsilon(t)$ ont une densité jointe bornée par* (Cte) ε^2.

Démonstration. — Elle reprend certains éléments de celle du lemme 2. Soit c inférieur à la valeur a de l'hypothèse H1, soit

$$\begin{aligned}\mathrm{U}&=\mathrm{W}(t-\varepsilon)\\ \mathrm{V}_1&=\varepsilon^{-1/2}[\mathrm{W}(t-\varepsilon c)-\mathrm{W}(t-\varepsilon a)]\\ \mathrm{V}_2&=\varepsilon^{-1/2}[\mathrm{W}(t+\varepsilon)-\mathrm{W}(t-\varepsilon c)].\end{aligned}$$

On note h_1 et h_2 les fonctions de régression de W(y) sur V_1, V_2 pour obtenir la décomposition suivante du Wiener pour $t-\varepsilon \leqq y \leqq t+\varepsilon$

$$\mathrm{W}(y)=\mathrm{U}+\sqrt{\varepsilon}\, k\left(\frac{y-t}{\varepsilon}\right)+\sqrt{\varepsilon}\,(\mathrm{V}_1 h_1+\mathrm{V}_2 h_2)\left(\frac{y-t}{\varepsilon}\right)$$

où k est un processus gaussien indépendant de U, V_1, V_2 et de loi indépendante de ε.

Conditionnellement à U et k on note $\mathrm{Z}'(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Z}''(v_1, v_2)$ les valeurs *non normalisées* de $\mathrm{X}'_\varepsilon(t)$, $\mathrm{X}''_\varepsilon(t)$ en fonction de celles de V_1 et V_2. On obtient les majorations et minorations suivantes des dérivées.

$$\frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial v_1} \geqq \sigma_0\,\varepsilon^{-1/2}\langle \psi' \mid h_1\rangle \geqq \frac{\sigma_0}{2}\varepsilon^{-1/2}\langle \psi' \mid \chi_{\{[-(a+c)/2,\, 1]\}}\rangle = \frac{\sigma_0}{2}\varepsilon^{-1/2}\,\psi((a+c)/2)$$

$$\frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial v_2} \leqq \sigma_1\,\varepsilon^{-1/2}\langle \psi' \mid h_2\rangle \leqq \sigma_1\,\varepsilon^{-1/2}\langle \psi' \mid \chi_{\{[-c,\, 1]\}}\rangle=\sigma_1\,\varepsilon^{-1/2}\,\psi(c)$$

$$\frac{\partial \mathrm{Z}''}{\partial v_1} \leqq \sigma\varepsilon_1^{-3/2}\langle \psi'' \mid h_1\rangle \leqq \sigma_1\,\varepsilon^{-3/2}\langle \psi'' \mid \chi_{\{[-a,\, 1]\}}\rangle=\sigma_1\,\varepsilon^{-3/2}\,\psi'(a)$$

$$\frac{\partial \mathrm{Z}''}{\partial v_2} \geqq \sigma_0\,\varepsilon^{-3/2}\langle \psi'' \mid h_2\rangle \geqq \sigma_0\,\varepsilon^{-3/2}\frac{\psi(c)}{1+c}.$$

Les relations ci-dessus montrent que si l'on choisit c tel que

$$c+1 \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2 \frac{\psi((a+c)/2)}{\psi'(a)}$$

alors le Jacobien $|J|$ de l'application

$$(v_1, v_2) \to (Z', Z'')$$

est minoré par la moitié du produit des termes diagonaux soit :

$$|J| \leqq \frac{1}{2}\sigma_0^2 \varepsilon^{-2} \langle \psi' \mid h_1 \rangle \langle \psi'' \mid h_2 \rangle.$$

La bijectivité de l'application se démontre comme pour le lemme 2 et le résultat est obtenu à partir de la formule du changement de variables.

III. CONVERGENCE POUR UNE DIFFUSION FONCTION DU WIENER

Le lemme 1 montre que la normalisation doit être

$$n(\varepsilon, u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \|\psi\|_2^{-1} (\sigma(u))^{-1} \sqrt{\varepsilon}.$$

Soit $\mathscr{D} = [a_0, b_0]$ avec $a_0 > 0$ et soit $\varepsilon < a_0$, nous montrons d'abord que la famille approximante X_ε vérifie les conditions du lemme 1 de [A2].

(*a*) X_ε a des trajectoires de classe $\mathscr{C}^\infty$ car ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(*b*) Le lemme 4 montre que X' et X''_ε ont une densité jointe unidimensionnelle bornée par (Cte) $\varepsilon^2 \leqq$ (Cte) $(n(\varepsilon))^2\, \varepsilon$.

(*c*) $$\mathrm{E}\{\sup_{t \in [a_0, b_0]} |X_\varepsilon^{(p)}(t)|\} \leqq \|\psi_\varepsilon^{(p)}\|_1\, \mathrm{E}\{\operatorname*{Sup}_{t \in [0, b_0 + a_0]} |X(t)|\}$$
$$\leqq (\mathrm{Cte})\, \varepsilon^{-p}\, \mathrm{E}\{\operatorname*{Sup}_{t \in [0, b_0 + a_0]} |W(t)|\} \leqq (\mathrm{Cte})\, \varepsilon^{-p}.$$

Le lemme 1 de [A2] implique donc

$$\mathrm{E}[N'_\varepsilon(I)]^m \leqq c_m\, \varepsilon^{-1/2}$$

où N'_ε est le nombre d'extrema locaux du processus X_ε.

Nous pouvons donc utiliser le théorème 3 de [A2]. Nous vérifions l'hypothèse *H*6 de [A2] : les bornes uniformes des densités jointes de X_ε et X'_ε en un ou deux instants qui sont donnés par les lemmes 2 et 3 [relations (2.4) et 2.20)] impliquent toutes les majorations requises : *H*6 (*b*), *H*6 (*d*) et *H*6 (*e*). Elles impliquent également la continuité des fonctions de Rice (*H*6 (*f*)) grâce au théorème de la convergence dominée. Comme la condition *H*6 (*g*) est évidente il reste à prouver les conditions *H*6 (*a*) et *H*6 (*c*). C'est-à-dire la convergence des fonctions de Rice normalisées.

Le théorème d'Ascoli Arzela et les lemmes 2 et 3 montrent que les densités uni et bi-dimensionnelles jointes de $X_\varepsilon(t)$, $\sqrt{\varepsilon}\, X'(t)$ sont relativement compactes pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Par ailleurs le point d'accumulation est unique puisque le lemme 1 montre que les densités fini-dimensionnelles convergent en loi. Ces densités convergent uniformément sur tout compact et donc simplement. Dans ces conditions le théorème de la convergence dominée permet de conclure.

Comme X vérifie trivialement $H1$ de [A2] et a un temps local L continu le théorème 3 de [A2] implique que pour tout u, pour tout intervalle I dans $\mathscr{D}$.

$$n(\varepsilon, u)\, \mathrm{N}_\varepsilon^u(\mathrm{I}) \overset{\mathrm{L}^2}{\to} \mathrm{L}(u, \mathrm{I}).$$

On vérifie que le temps local de X a des moments de tous ordres finis. La convergence s'étend à tous les L^K si nous pouvons borner, uniformément en ε, les moments de tous ordres de

$$n(\varepsilon, u)\, \mathrm{N}_\varepsilon^u(\mathrm{I}),$$

pour cela nous montrons le lemme suivant :

LEMME 5. — *Pour tout entier* $\mathrm{K} > 0$ *et pour tout intervalle* $[a, b]$ *avec* $a > 0$ *nous avons*

$$\sup_u \sup_{x_0} \sup_{\varepsilon \leqq (a/2) \wedge b-a} \mathrm{E}(\sqrt{\varepsilon}\, \mathrm{N}_\varepsilon^u([b-a])^\mathrm{K} \leqq (\mathrm{Cte})\,(b-a)^{\mathrm{K}/2}.$$

Démonstration par récurrence. — $K=1$. On applique la formule de Rice à l'ordre 1 et la majoration de la densité $\mathrm{P}_{\varepsilon,t}$ donnée par le lemme 2. En effet par changement de variable on peut faire apparaître la densité jointe de $(\mathrm{X}_\varepsilon(t), \sqrt{\varepsilon}, \mathrm{X}'(t))$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{\sqrt{\varepsilon}\, \mathrm{N}_\varepsilon^u[a, b]\} &= \int_{[a,b]} \int_{\mathbb{R}} |x'|\, \mathrm{P}_{\varepsilon,t}(u, x')\, dx'\, dt \\ &\leqq (\mathrm{Cte}) \int_{\mathbb{R}} |x'|\, \varphi(x')\, dx \int_{[a,b]} \frac{dt}{\sqrt{t-\varepsilon}} \leqq (\mathrm{Cte}) \int_{[a,b]} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= (\mathrm{Cte})\,(b^{1/2}-a^{1/2}) \leqq (\mathrm{Cte})\,(b-a)^{1/2}.\end{aligned}$$

Démontrons maintenant que la propriété s'étend à l'ordre supérieur. Soit n la partie entière de $(b-a)/\varepsilon$, partitionnons $[a, b]$ en n intervalles $\mathrm{I}_1 \ldots \mathrm{I}_n$ égaux disjoints et ordonnés et posons :

$$\nu_i = \sqrt{\varepsilon}\, \mathrm{N}_\varepsilon^u(\mathrm{I}_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Nous avons alors

$$\mathrm{E}(\sqrt{\varepsilon}\, \mathrm{N}_\varepsilon^u([a, b]))^k = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \mathrm{E}(\nu_{i_1} \ldots \nu_{i_k}) \leqq k! \sum_{i_1 \leqq i_2 \ldots \leqq i_k} \mathrm{E}(\nu_{i_1} \ldots \nu_{i_k}).$$

Nous divisons la somme en deux parties :

— Σ' qui contient les termes $i_1 \ldots i_k$ pour lesquels il existe h tel que

$$i_{h+1} - i_h \geqq 4;$$

– Σ'' qui contient les autres termes.

Majorations de Σ''. – Nous utilisons la méthode du théorème 3 de [A2]. Chaque intervalle I_i a une longueur inférieure à 2ε; en appliquant la formule de Rice à l'ordre un et la majoration (2.4) du lemme 2 on obtient :

$$\operatorname*{Sup}_i E(\nu_i) \leqq (\mathrm{Cte})\,\varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit

$$P[\nu_i > 0] \leqq (\mathrm{Cte})\,\varepsilon^{1/2}$$

le théorème de Rolle implique

$$E[(N^u_\varepsilon(I_i))^K] \leqq E[(N'_\varepsilon(I_i)+1)^K.\chi_{\{\nu_i>0\}}]$$

en appliquant l'inégalité de Schwartz, il vient

$$E(\nu_i)^K \leqq (\mathrm{Cte})\,\varepsilon^{K/2}\,\varepsilon^{-1/2}\,\varepsilon^{1/2}=(\mathrm{Cte})\,\varepsilon^{K/2}.$$

Par application de l'inégalité de Hölder nous voyons qu'un terme quelconque de Σ'' est majoré par la même quantité. Comme il y a au plus $4^{K-1}.n$ termes dans Σ'' nous obtenons :

$$\Sigma'' \leqq (\mathrm{Cte})\,n.\varepsilon^{K/2} \leqq (\mathrm{Cte})\,(b-a)\,\varepsilon^{(K-2)/2}.$$

Majoration de Σ' :

$$\Sigma' \leqq \sum_{h=1}^{k-1} \sum_{\substack{i_1 \leqq \ldots \leqq i_k \\ i_{h+1}-i_h \geqq 4}}, \qquad E(\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_k})=\sum_{h=1}^{k-1}\Sigma_h.$$

Soit $t_h=a+(i_h+1)^{(b-a)/n}$ et $\mathscr{F}_{t_h}$ la tribu engendré par le processus $X(t)$ jusqu'à l'instant t_h. Il est clair que $\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_n}$ sont $\mathscr{F}_{t_h}$ mesurables donc

$$\Sigma_h=\sum_{i_1 \leqq \ldots \leqq i_h} E\{(\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_h})\,E\{\sum_{i_h+3 \leqq i_{h+1} \leqq \ldots \leqq i_k}(\nu_{i_h}\ldots\nu_{i_k})/\mathscr{F}_{t_h}\}\}.$$

L'espérance conditionnelle est le moment d'ordre $(K-h)$ du nombre de franchissements, normalisé par $\varepsilon^{(K-h)/2}$, du niveau u par X_ε sur l'intervalle

$$\left[t_h+2\frac{b-a}{n},\, b\right]$$

étant donné $\mathscr{F}_{t_n}$. Comme X est markovien nous pouvons utiliser l'hypothèse de récurrence pour majorer l'espérance conditionnelle par

$$(\mathrm{Cte})\,[b-a]^{(K-h)/2}$$

en appliquant une seconde fois l'hypothèse de récurrence à la somme sur $i_1\ldots i_k$ on trouve :

$$\sum_h \leqq (\mathrm{Cte})\,[b-a]^{K/2}$$

et donc

$$\Sigma' \leqq (\mathrm{Cte})\,[b-a]^{K/2}.$$

Au total nous obtenons donc :

$$E(\sqrt{\varepsilon}\, N_\varepsilon^u[a,\, b])^k \leqq (\mathrm{Cte})\,(b-a)^{K/2} + (\mathrm{Cte})\,(b-a)\,\varepsilon^{(K-2)/2}$$

comme $(b-a) \geqq \varepsilon$ le lemme 5 est bien démontré.

Approximation par discrétisation. — L'article [A2] montre la convergence L^2 de $\sqrt{\Pi/2}\,\sqrt{\Delta} N_{W_\Delta}^u$ vers le temps local du Wiener, $N_{W_\Delta}^u$ est le nombre de franchissements du niveau u par l'approximation par discrétisation W_Δ du Wiener W. La convergence L^K s'obtient par un analogue du lemme 5. Remarquons que le processus $s(X_\Delta(t))$ réalise une interpolation monotone entre les points $\{k_\Delta,\, W(k_\Delta)\}$, on a donc

$$|N_\Delta^u - N_{W_\Delta}^{s(u)}| \leqq 2$$

et donc au sens de L^K

$$\lim \sqrt{\frac{\Pi\Delta}{2}}\,(\sigma(u))^{-1}\, N_\Delta^u(I) = \lim \sqrt{\frac{\Pi\Delta}{2}}\,(\sigma(u))^{-1}\, N_{W_\Delta}^{s(u)}(I)$$
$$= (\sigma(u))^{-1}\, L_W[s(u),\, (I)] = L_X[u,\, (I)].$$

L_W et L_X désignant respectivement les temps locaux de W et X. Nous avons donc démontré le :

THÉORÈME 1. — *Soit* $X(t)$ *la solution forte de l'équation* (E') *où* σ *vérifie pour tout* u

$$0 < \sigma_0 < \sigma(u) \leqq \sigma_1 < \infty.$$

Soit ψ *vérifiant l'hypothèse* H_1, *soit* $(a,\, b)$ *un intervalle ouvert ou fermé, borné, avec* $a > 0$ *alors on a pour tout* K

$$\sqrt{\frac{\Pi}{2}}\,\|\psi\|_2^{-1}\,\sqrt{\varepsilon}\,(\sigma(u))^{-1}\, N_\varepsilon^u(a,\, b) \xrightarrow{L^K} L(u,\, (a,\, b))$$

$$\sqrt{\frac{\Pi}{2}}\,\sqrt{\varepsilon}\,(\sigma(u))^{-1}\, N_\Delta^u(a,\, b) \xrightarrow{L^K} L(u,\, (a,\, b)).$$

IV. PASSAGE A DES DIFFUSIONS AVEC DRIFT QUELCONQUE

Soit Y la solution de l'équation (E). Comme σ et b sont supposés lipschitziennes, on sait que presque sûrement les trajectoires n'explosent pas [I]. Si l'on considère un intervalle de temps [0, T] borné, on peut par un argument de localisation, quitte à exclure un événement de probabilité arbitrairement petite, se ramener au cas où $|b|$ et σ sont majorées et où

σ est minorée par une constante positive. Y est alors absolument continue par rapport à la solution X de l'équation (E') avec même σ et $x_0 = y_0$. Sa densité est donnée par la formule de Girsanov.

$$\frac{dP_Y}{dP_X}(X) = \exp\left[\int_0^T B(X(s))\, dW s - \frac{1}{2} B^2(X(s))\, ds\right] \tag{4.1}$$

où $B = b/\sigma - \sigma'/2$.

Il est clair que X vérifie les conditions du théorème 1. Comme par ailleurs le temps local et les nombres de franchissements de X_ε et X_Δ sont définis de manière trajectorielle, la convergence pour X passe à Y par absolue continuité. Nous avons donc montré le

THÉORÈME 2. — *Sous l'hypothèse* H1, *pour tout intervalle* (a, b) *avec* $a > 0$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\Pi}{2}}\, \|\psi\|_2^{-1} \sqrt{\varepsilon}\,(\sigma(u))^{-1}\, N_\varepsilon^u(a, b) \xrightarrow{\text{proba.}} L(u, (a, b)) \\ &\sqrt{\frac{\Pi}{2}} \sqrt{\varepsilon}\,(\sigma(u))^{-1}\, N_\Delta^u(a, b) \xrightarrow{\text{proba.}} L(u, (a, b)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

COROLLAIRE. — *Si b et* σ *vérifient l'hypothèse* H2, *on peut alors effectuer le changement de drift ci-dessus sans utiliser d'argument de localisation, la densité de* Y *par rapport à* X *a toujours la forme donnée par* (4.1) *et l'inégalité de Hölder montre que la convergence* (4.2) *a lieu dans tous les* L^K.

Exemple. — Supposons que σ soit biborné et de classe $\mathscr{C}^2$ et que b et σ vérifient de plus :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{b(x)}{x} = 0; \qquad |\sigma''(x)| \leqq (\mathrm{Cte})(1 + (x))$$

alors l'hypothèse H2 est vérifiée. En effet posons :

$$B = \frac{b}{\sigma} - \frac{\sigma'}{2}.$$

Nous avons à étudier la finitude de

$$E\left\{\exp\left[\int_0^T p\, B(X(s))\, dW s - \frac{P}{2}\int_0^T B^2(X(s))\, ds\right]\right\} \tag{4.3}$$

posons $A = B \circ s^{-1}$ et $F(u) = \int_{W(0)}^u A(z)\, dz$.

En utilisant la formule d'Ito nous obtenons que (4.3) est majorée par

$$E=\exp\left\{p\,F[W(T)]-p/2\int_0^T A'(W(s))\,ds\right\}$$

$$-A'(W(s))=\left[-b'+\frac{b\,\sigma'}{\sigma}+\frac{\sigma''\sigma}{2}\right]\circ s^{-1}(W(s))\leqq (\mathrm{Cte})(1+|W(s)|)$$

donc au total

$$(4.3)\leqq E\exp\{p\,F[W(T)]+p(\mathrm{Cte})(1+\sup_{[0,T]}|W(s)|)\}.$$

Mais comme

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{|F(u)|}{u^2}=0$$

nous avons pour tout q

$$E\exp\{q\,F(W(t)\}<\infty$$

et comme $\operatorname{Sup}_{[0,T]}|W(s)|$ a des moments exponentiels finis, nous obtenons le résultat par l'inégalité de Hölder.

RÉFÉRENCES

[A1] J.-M. AZAIS et D. FLORENS-ZMIROU, Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires, *Probability Theory and Related Fields*, Vol. **76**, 1987, p. 121-132.

[A2] J.-M. AZAIS, Conditions for Convergence of Number of Crossings to the Local Time. Application to Stable Processes with Independent Increments and to Gaussian Processes, *Probability and Mathematical Statistics* (à paraître).

[B1] C. BERZIN, Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 306, série I, 1988, p. 291-294.

[B2] J. L. BESSON, Sur le processus ponctuel des passages par un niveau d'une fonction aléatoire à trajectoires absolument continues. *Thèse d'État*, Université Claude-Bernard - Lyon-I, n° d'ordre **84.03**, 1984.

[B3] J. M. BISMUT, Martingales, the Malliavin Calculus and Hypoellipticity under General Hörmander's Conditions, *Z. Wahrschein. und verw. Gebeite*, vol. **56**, 1983, p. 469-505.

[F2] D. FLORENS-ZMIROU, Discretization and Zero Crossings of a Recurrent Diffusion (à paraître).

[I] N. IKEDA et S. WATANABE, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processe, North Hoolande/Kodansha, Amsterdam,1981.

[W1] M. WSCHEBOR, Régularisation des trajectoires et approximation du temps local, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 298, série I, n° **9**, 1984, p. 209-212.

[W2] M. WSCHEBOR, Surfaces aléatoires. Mesures géométriques des ensembles de niveau, *Lectures Notes in Mathematics*, n° **1147**, 1985, Springer-Verlag, Berlin.

(*Manuscrit reçu le* 17 *mai* 1988
(*corrigé le* 28 *novembre* 1988.)