

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ÉMILE LE PAGE

Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, n° 2 (1989), p. 109-142

http://www.numdam.org/item?id=AHPB_1989__25_2_109_0

© Gauthier-Villars, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications

par

Émile LE PAGE

I.R.M.A.R., Institut de Recherche Mathématiques,
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

RÉSUMÉ. — On établit des propriétés de régularité (Hölder, C^∞) du plus grand exposant caractéristique d'un produit de matrices aléatoires indépendantes. On en déduit des propriétés analogues pour la répartition d'état dans le modèle d'Anderson de dimension 1.

Mots clés : Matrices aléatoires, exposants caractéristiques, densité d'état.

ABSTRACT. — We prove regularity properties (Hölder, C^∞) for the first characteristic exponent of a product of independant random matrices. We deduce the same properties for the integrated density in the one dimensional Anderson model.

Key words : Random matrices, characteristic exponents, density of states.

On considère un espace produit $\Omega = X^{\mathbb{N}}$ muni d'une probabilité produit \mathbb{P} et $(\lambda, \omega) \rightarrow g^\lambda(\omega)$ une fonction de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans le groupe $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices $d \times d$ inversibles (resp. dans $SL(d, \mathbb{R})$ sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1) dépendant uniquement de la première coordonnée de ω .

Classification A.M.S. : 60 B 99, 60 F 99, 60 J 15, 60 K 99.

Notons de plus μ_λ la loi de la variable aléatoire g^λ et supposons que les probabilités μ_λ admettent des moments exponentiels. Soit $(g_n^\lambda(\cdot))_{k \geq 1}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes et de même loi μ_λ et $\gamma(\lambda)$ le plus grand exposant caractéristique associé à la suite précédente, c'est-à-dire : [5]

$$\gamma(\lambda) = \lim_n \frac{1}{n} \text{Log} \|g_n^\lambda g_{n-1}^\lambda \dots g_1^\lambda\|, \quad \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

On s'intéresse ici aux propriétés de régularité de la fonction $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$.

On envisage tout d'abord l'étude des propriétés de Hölder de $\gamma(\lambda)$ sans hypothèse de densité pour la loi μ_λ : si I est un intervalle fermé tel que pour $\lambda, \mu \in I$, on a

$$\mathbb{P} \text{ p. s.}, \quad \|g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega)\| \leq C(\omega) |\lambda - \mu|^{\varepsilon(I)}$$

et

$$\int C^{\varepsilon(I)}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < +\infty \quad \text{pour un } \varepsilon(I) > 0,$$

alors $\gamma(\cdot)$ est höldérienne sur I .

Ce résultat ne peut être amélioré comme le montre l'exemple suivant, dû à Halperin, et qui apparaît dans le contexte des opérateurs de Schrödinger à potentiel aléatoire [17]. On prend

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\{q_n, n \geq 0\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi prenant les valeurs a ou b avec probabilité $1/2$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe a, b tels que $\gamma(\lambda)$ n'est pas höldérienne d'exposant ε sur $I = \{a, b\} + [-2, 2]$. En particulier $\gamma(\lambda)$ n'est pas C^1 .

On envisage ensuite les propriétés de dérivabilité de $\gamma(\lambda)$: en supposant que les lois μ_λ ont des densités et que l'application $\lambda \rightarrow g^\lambda$ est analytique de \mathbb{R} dans tous les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ $p \geq 1$ où $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles $d \times d$, on prouve que $\gamma(\lambda)$ est C^∞ . L'exemple de Halperin montre également que $\gamma(\lambda)$ n'est pas analytique sur \mathbb{R} .

Les résultats précédents sont à comparer à ceux de Ruelle [16] qui obtient des propriétés d'analyticité dans le cadre de produits de matrices positives stationnaires.

Pour d'autres résultats concernant les exposants caractéristiques, on peut également consulter [6] et [9].

Les théorèmes précédents trouvent leur application dans l'étude de la régularité de la répartition d'état d'un opérateur de Schrödinger aléatoire unidimensionnel : problème posé ici par Wegner [18], F. Wegner, « Bounds on the density of States in Disordered Systems » 2, Phys B 44, 9 (1581) et qui est ici traité dans le théorème 3.

Plus précisément soit $(q_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi η . On considère l'opérateur aux différences aléatoires sur $l^2(\mathbb{Z})$ analogue discret de Schrödinger défini par

$$(H(\omega)u)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + q_n(\omega)u_n. \quad (1)$$

Notons pour tout $L > 0$ l'opérateur ${}^L H(\omega)$ défini sur $l^2(\mathbb{Z})$ par la restriction de la matrice de $H(\omega)$ à $[-L, L]$, c'est-à-dire par la matrice de Jacobi $(2L+1) \times (2L+1)$

$$({}^L H(\omega))_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ q_n(\omega) & \text{si } i=j=n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

Soit $N_L(\omega, \lambda)$ la fonction de répartition de la distribution empirique des valeurs propres $(\lambda_i^L(\omega))_{-L \leq i \leq L}$ de la matrice ${}^L H(\omega)$.

$$N_L(\omega, \lambda) = \frac{1}{2L+1} \sum_{i=-L}^L 1_{[\lambda_i^L(\omega) \leq \lambda]}. \quad (3)$$

Probablement en ω la suite $N_L(\omega, \lambda)$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ vers la répartition d'état $N(\lambda)$ de H [14].

La formule de Thouless [4] établit une relation entre le plus grand exposant caractéristique $\gamma(\lambda)$ de la suite de matrices aléatoires indépendantes

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad n \geq 0 \quad (4)$$

et la probabilité $dN(\lambda)$:

$$\gamma(\lambda) = \int \log |\lambda - t| dN(t). \quad (5)$$

Cette relation permet à partir des propriétés de régularité de la fonction $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ d'en déduire pour la fonction $\lambda \rightarrow N(\lambda)$ au moyen de la transformation de Hilbert.

On montre que si η a un moment d'ordre $\alpha > 0$

$$\int |q|^\alpha d\eta(q) < +\infty$$

la répartition d'état $N(\lambda)$ est localement höldérienne sur \mathbb{R} . Une preuve de ce résultat avait été donnée par l'auteur dans un article antérieur [11] consacré à l'étude de ces opérateurs aux différences en supposant η à support compact et l'argument avait été repris par Carmona-Klein-Martinelli [3] pour traiter le cas présent. Si η admet une densité dans $L^1(\mathbb{R})$ et si de plus η a des moments de tous ordres on établit que $N(\lambda)$ est C^∞ sur \mathbb{R} . Ce résultat étend celui de Simon et Taylor [16] obtenu sous

l'hypothèse où η est à support compact et a une densité dans un espace de Sobolev, $L_\alpha^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}); \text{ il existe } g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ tel que } \hat{g}(t) = (1+t^2)^{\alpha/2} \hat{f}(t)\}$ avec $\alpha > 0\}$. Un résultat du même type a été obtenu par Campanino et Klein [2] en supposant que η a des moments de tous ordres et que sa transformée de Fourier $\hat{\eta}(t)$ est telle que $(1+t^2)^\alpha \hat{\eta}(t)$ est bornée pour un $\alpha > 0$. March et Sznitman obtiennent un résultat identique [12]. Les résultats présentés ici montrent (à l'inverse des articles [16], [2], [12]) que les régularités de $\gamma(\lambda)$ et $N(\lambda)$ découlent plutôt de l'aléatoire que la régularité initiale de la loi η et plus généralement des lois μ_λ . La régularité höldérienne de $N(\lambda)$ est utilisée par Carmona-Klein-Martinelli [3] pour la preuve de la localisation de l'opérateur aux différences (1) sur $l^2(\mathbb{Z})$.

Notons également le fait que Craig et Simon [4] ont montré que N est localement Log-höldérienne dans le cas plus général où la suite $\{q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est supposé ergodique stationnaire.

Les résultats de régularité de l'exposant caractéristique sont obtenus par l'étude des opérateurs

$$P(\lambda) f(\bar{x}) = \int f(g \cdot \bar{x}) \mu_\lambda(dg)$$

où $f \in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ espace des fonctions continues sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

La preuve du théorème 1 est basée sur le fait que ces opérateurs sont quasi-compacts sur des espaces de fonctions höldériennes convenables, et que l'application $\lambda \rightarrow P(\lambda)$ est localement höldérienne en considérant $P(\lambda)$ comme un opérateur linéaire entre deux tels espaces.

La preuve du théorème 2 est de même basée sur le fait que ces opérateurs sont compacts sur les espaces $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ $k \geq 0$ des fonctions k fois continûment différentiables sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et que l'application $\lambda \rightarrow P(\lambda)$ est différentiable si on considère $P(\lambda)$ comme un opérateur de $C^{k+2}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$.

Le présent article est organisé comme suit :

- au paragraphe I on énonce les résultats;
- le paragraphe II est consacré à la preuve du théorème 1;
- au paragraphe III on étudie la classe d'opérateurs suivants :

$$P(f)(\bar{x}) = \int f(g \cdot \bar{x}) d\mu(g)$$

où μ est une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$ (resp. $SL(d, \mathbb{R})$) ayant des moments exponentiels et admettant une densité. On prouve que P est un opérateur compact sur $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ $k \geq 0$. Il en résulte en particulier que l'unique probabilité ν μ -invariante portée par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ admet une densité C^∞ par rapport à la probabilité invariante par rotation portée par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. L'étude

précédente trouve son application dans la preuve du théorème 2 donnée au paragraphe IV.

Enfin la preuve du théorème 3 est donnée au paragraphe V, ainsi que la justification des remarques concernant les propriétés du plus grand exposant caractéristique de la suite

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad n \geq 1.$$

I. NOTATIONS ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

I.1. Avant l'énoncé des résultats commençons par préciser quelques définitions :

Posons pour $g \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$

$$l(g) = \sup(\|g\|, \|g^{-1}\|)$$

où $\|g\|$ désigne la norme de la matrice g agissant sur l'espace euclidien \mathbb{R}^d .

DÉFINITION 1. — *Une probabilité μ sur $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ admet des moments exponentiels si pour tout $\tau > 0$*

$$\int l^\tau(g) d\mu(g) < +\infty.$$

Pour toute probabilité μ sur $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ on désigne par T_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ .

DÉFINITION 2. — *T_μ est fortement irréductible s'il n'existe pas de famille finie de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^d , invariante par chaque élément de T_μ .*

Deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^d sont dits équivalents s'ils sont proportionnels. L'espace des classes d'équivalence est l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, qui est une variété compacte connexe de dimension $d-1$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, \bar{x} désigne sa direction, et pour $M \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ on pose $M \cdot \bar{x} = \bar{M}x$.

Considérons maintenant une suite $(M_n)_{n \geq 1} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ et soient $a_1(M_n) \geq a_2(M_n) \dots \geq a_d(M_n)$ les racines carrées des valeurs propres de la matrice $M_n^t M_n$.

DÉFINITION 3. — *La suite $(M_n)_{n \geq 1}$ a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ si*

$$\limsup_n \frac{a_1(M_n)}{a_2(M_n)} = +\infty.$$

Remarquons que si la suite $\{M_n, n \geq 1\}$ satisfait à la propriété précédente, et si m est une probabilité sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ qui n'est pas portée par une sous-variété projective de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ il existe une sous-suite de la suite $\{M_n, m \geq 1\}$ qui converge vaguement vers une mesure de Dirac.

DÉFINITION 4. — T_μ a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ si T_μ contient une suite ayant une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple. — Cette propriété est satisfaite si μ admet une densité [8].

Dans la suite nous envisageons la situation suivante :

soit $(\Omega = X^\mathbb{N}, A = \bigotimes B, \mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ un espace probabilisé produit, U un ouvert de \mathbb{R} et $(\lambda, \omega) \mapsto g(\lambda, \omega)$ une application mesurable de $U \times \Omega$ dans $GL(d, \mathbb{R})$ ne dépendant que la première coordonnée de $\omega = (\omega_i)_{i \geq 0}$ c'est-à-dire que

$$g(\lambda, \omega) = g(\lambda, \omega_0).$$

Désignons par μ_λ la loi de la variable aléatoire $\omega \mapsto g(\lambda, \omega)$ à valeurs dans $GL(d, \mathbb{R})$. La suite de variables aléatoires $\{g_k^\lambda(\omega) = g(\lambda, \omega_k) \mid k \geq 1\}$ est alors une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ_λ .

Supposons que $\int \log l(g) d\mu_\lambda(g) < +\infty$, alors d'après Furstenberg [5], la suite de variables aléatoires

$$\left\{ \frac{1}{n} \log \|g_n(\lambda, \omega) g_{n-1}(\lambda, \omega) \dots g_1(\lambda, \omega)\| \mid n \geq 1 \right\}$$

converge presque sûrement vers une constante $\gamma(\lambda)$ qui est le premier exposant caractéristique de la suite $(g_k(\lambda, \omega) \mid k \geq 1)$.

Donnons encore une définition avant d'énoncer les deux théorèmes suivants que nous nous proposons d'établir dans cet article.

DÉFINITION 5. — Une fonction f définie dans un ouvert U de \mathbb{R} est localement höldérienne si pour tout compact $T \subset U$ il existe un nombre $\alpha = \alpha(T)$ strictement positif et une constante $c(T)$ tels que :

$$|f(t) - f(s)| \leq c(T) |t - s|^\alpha, \quad t, s \in T.$$

THÉORÈME 1. — Si

1) Pour tout $\lambda \in U$ T_μ est fortement irreductible et a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

2) Si de plus pour tout intervalle compact $T \subset U$ les propriétés suivantes sont satisfaites :

2.1) Il existe un réel $\varepsilon(T) > 0$ tel que :

$$\sup_{\lambda \in T} \int l^{\varepsilon(T)}(g^\lambda(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) < +\infty.$$

2.2) Il existe un réel $\varepsilon_1(T) > 0$ et une variable aléatoire $C(\omega)$ à valeurs dans $[1 + \infty[$ telles que :

pour $\lambda, \mu \in T$

$$\|g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega)\| \leq C(\omega) |\lambda - \mu|^{\varepsilon_1(T)}, \quad \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

et

$$\int C^{\varepsilon_1(T)}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < +\infty.$$

Alors l'application $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ est localement höldérienne dans U .

THÉORÈME 2. — On suppose que :

- 1) Pour tout $\lambda \in U$ μ_λ a des moments exponentiels.
- 2) Pour tout $\lambda \in U$ μ_λ possède une densité f_λ par rapport à la mesure de Haar dg sur $GL(d, \mathbb{R})$ et que pour tout $p \geq 0$ l'application $\lambda \rightarrow f_\lambda$ de U dans $L^1(GL(d, \mathbb{R}), l^p(g)dg)$ est continue.
- 3) Pour tout $p \geq 1$ l'application $\lambda \rightarrow g^\lambda$ est analytique de U dans $L^p(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$.

Alors l'application $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ est C^∞ sur U .

Remarques. — 1) Les énoncés précédents restent vrais lorsque l'on remplace le groupe $GL(d, \mathbb{R})$ par le groupe $SL(d, \mathbb{R})$.

2) Dans l'énoncé du théorème 2 il est suffisant qu'une puissance de convolution $\mu_{\lambda_0}^{n_0}$ de μ_λ satisfasse à l'hypothèse 2.

I.2. Propriétés de régularité de la répartition d'état dans le modèle d'Anderson de dimension 1

On considère l'opérateur aux différences aléatoires sur $l^2(\mathbb{Z})$ défini par :

$$(H(\omega) u)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + q_n(\omega) u_n \quad (1)$$

où $(q_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi η .

Soit $N(\lambda)$ la répartition d'état de H (voir l'introduction pour sa définition). Grâce à la formule de Thouless (5) et à l'aide des théorèmes 1 et 2 précédents on peut obtenir le

THÉORÈME 3. — 1) On suppose que la probabilité η charge au moins 2 points et admet un moment d'ordre $\beta_0 > 0$, c'est-à-dire que $\int |q|^{\beta_0} \eta(dq) < +\infty$ alors la répartition d'état $N(\lambda)$ est localement höldérienne.

2) Si η admet des moments de tous ordres et si de plus la probabilité η admet une densité f dans $L^1(\mathbb{R})$ la répartition d'état est C^∞ sur \mathbb{R} .

II. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Commençons par préciser quelques notations.

On munit tout d'abord $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ de la distance δ définie par :

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = [1 - \langle x, y \rangle^2]^{1/2} = \|x \Lambda y\| \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \quad (6)$$

où x et y sont des vecteurs unitaires de \mathbb{R}^d de direction \bar{x} et \bar{y} .

Introduisons de plus un espace de fonction höldérienne qui nous sera utile par la suite.

DÉFINITION 6. — Étant donné $\alpha > 0$ on pose pour toute fonction f continue sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$

$$|f| = \sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} |f(\bar{x})|$$

et

$$m_\alpha(f) = \sup_{\bar{x} \neq \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \left[\frac{|f(\bar{x}) - f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \right].$$

\mathcal{L}_α est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|f\|_\alpha = |f| + m_\alpha(f) < +\infty.$$

\mathcal{L}_α est une algèbre de Banach, muni de la norme $\|f\|_\alpha$.

Dans la suite T sera un intervalle compact fixé de U ; de plus μ_λ^n est la n -ième puissance de convolution de la probabilité μ_λ dans $GL(d, \mathbb{R})$.

On a la proposition :

PROPOSITION 1. — Sous les hypothèses du théorème 1, il existe un $\alpha_0 = \alpha_0(T)$ tel que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0]$ on ait :

$$\limsup_n \sup_{\lambda \in T} \left[\sup_{\bar{x} \neq \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg) \right]^{1/n} = \rho(T, \alpha) < 1.$$

Preuve de la proposition 1. — Soit $M = \{(\bar{x}, \bar{y}); \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d), \bar{x} \neq \bar{y}\}$. Nous compactifions M en lui adjointant l'espace $M_{1,2}$ des drapeaux de dimension 2 de \mathbb{R}^d c'est-à-dire l'espace des couples (V_1, V_2) de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^d tel que $V_1 \subset V_2$ avec $\dim V_i = i$ $i=1, 2$, et en munissant $\bar{M} = M \cup M_{1,2}$ de la topologie suivante : M est un ouvert de \bar{M} et une suite (\bar{x}_n, \bar{y}_n) $n \geq 1$ de M converge vers (V_1, V_2) si $\lim_n \delta(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = 0$ et si $\lim_n (V_1^{(n)}, V_2^{(n)}) = (V_1, V_2)$ où $V_i^{(n)}$ est le sous espace de \mathbb{R}^d de dimension 1 défini par \bar{x}_n et $V_2^{(n)}$ le sous-espace de \mathbb{R}^d de dimension 2 défini par \bar{x}_n et \bar{y}_n .

L'application définie par

$$\sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) = \frac{\delta(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} \quad (7)$$

de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \times M$ dans \mathbb{R}_+ est un cocycle multiplicatif, c'est-à-dire que

$$\sigma_1(g \cdot h, (\bar{x}, \bar{y})) = \sigma_1(g, h \cdot (\bar{x}, \bar{y})) \sigma_1(h, (\bar{x}, \bar{y})). \quad (8)$$

Il se prolonge par continuité en un cocycle multiplicatif de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \times \bar{M}$ dans \mathbb{R}_+ : pour $g \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ ($V_1, V_2 \in M_{1,2}$) on a :

$$\sigma_1[g, (v_1, v_2)] = \frac{\|gv_2\|}{\|gv_1\|^2} \quad (9)$$

où v_1 est un vecteur quelconque de norme 1, définissant V_1 et v_2 est un bivecteur quelconque de norme 1, définissant V_2 .

De plus on a :

$$r_1(g) = \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{M}} \sigma_1[g, (\bar{x}, \bar{y})] \leq l^4(g). \quad (10)$$

Considérons la suite

$$u_n(\alpha) = \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \sigma_1^\alpha(g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n(dg). \quad (11)$$

Cette suite est sous multiplicatif et la suite $(u_n(\alpha))^{1/n}$ $n \geq 1$ converge donc vers sa borne inférieure. De l'inégalité

$$e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{|x|} \quad (12)$$

on déduit que pour tout entier $n \geq 1$ et $\alpha > 0$ on a :

$$\begin{aligned} u_n(\alpha) &\leq 1 + \alpha \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \log \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n(dg) + \frac{\alpha^2}{2} \times \\ &\quad \sup_{\lambda \in T} \int \log^2(l^4(g)) l^{4\alpha}(g) \mu_\lambda^n(dg). \end{aligned} \quad (13)$$

Or il existe un entier n_0 tel que

$$\sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \log \sigma_1^\alpha(g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^{n_0}(dg) < 0. \quad (14)$$

Remarquons en effet que la suite

$$\frac{1}{n} \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \log \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n(dg) \quad (15)$$

a une limite supérieure de la forme

$$\int \log \sigma_1(g, \xi) \mu_{\lambda_0}(dg) v_{\lambda_0}(d\xi) \quad (16)$$

où $\lambda_0 \in T$ et v_{λ_0} est une probabilité μ_{λ_0} -invariante sur \bar{M} . Il résulte de [8] que (16) est strictement négative. La proposition 1 se déduit alors immédiatement de l'inégalité (13).

Il nous reste à justifier la remarque précédente : pour tout $n \geq 1$ la fonction $(\xi, \lambda) \rightarrow \int \text{Log } \sigma_1 [g, \xi] \mu_\lambda^n (dg)$ est continue sur le compact $\bar{M} \times T$, il existe donc un élément $(\xi_n, \lambda_n) \in \bar{M} \times T$ tel que

$$\frac{1}{n} \sup_{\substack{(x, y) \in M \\ \lambda \in T}} \int \text{Log } \sigma_1 (g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n (dg) = \frac{1}{n} \int \text{Log } \sigma (g, \xi_n) \mu_{\lambda_n}^n (dg). \quad (17)$$

De plus

$$\frac{1}{n} \int \text{Log } \sigma_1 (g, \xi_n) \mu_{\lambda_0}^n (dg) = \int \text{Log } \sigma_1 (g, \xi) \mu_{\lambda_0} (dg) v_n (d\xi) \quad (18)$$

où v_n est la probabilité sur \bar{M} définie par

$$v_n (f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int f (g \cdot \xi_n) \mu_{\lambda_n}^k (dg). \quad (19)$$

La suite de probabilités $\mu_{\lambda_n} \otimes v_n$, $n \geq 1$ sur $GL(d, \mathbb{R}) \times \bar{M}$ est équitendue. Toute valeur d'adhérence de cette suite pour la topologie étroite est de la forme $\mu_t \otimes v_t$, $t \in T$ où v_t est une probabilité sur \bar{M} invariante par μ_t . En particulier on a :

$$\begin{aligned} \limsup_n \frac{1}{n} \int \text{Log } \sigma_1 (g \cdot \xi_n) \mu_{\lambda_n}^n (dg) \\ = \int_{G \times M} \text{Log } \sigma_1 (g \cdot \xi) \mu_{\lambda_0} (dg) v_{\lambda_0} (d\xi). \end{aligned} \quad (20)$$

Retenant les notations de la proposition 1, nous pouvons maintenant énoncer la

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses du théorème 1 :*

1) *Pour tout $\lambda \in T$ il existe une unique probabilité v_λ μ_λ -invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.*

2) *Pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0(T)$ les opérateurs définis sur \mathcal{L}_α par*

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) f(\bar{x}) &= \int f(\bar{x}) v_\lambda (d\bar{x}) \\ P(\lambda) f(\bar{x}) &= \int f(g \cdot \bar{x}) \mu_\lambda (dg) \end{aligned}$$

sont bornés sur \mathcal{L}_α et l'on a pour tout $n \geq 1$

$$P^n(\lambda) = \pi(\lambda) + Q^n(\lambda)$$

où $Q(\lambda)$ est un opérateur borné sur \mathcal{L}_α pour lequel il existe une constante $C(T, \alpha)$ telle que pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{\lambda \in T} \|Q^n(\lambda)\|_\alpha \leq C(T, \alpha) \rho^n(T, \alpha).$$

Preuve de la proposition 2. — Le fait que $P(\lambda)$ est un opérateur borné sur \mathcal{L}_α résulte des inégalités :

$$|P(\lambda) f| \leq |f| \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{|P(\lambda) f(\bar{x}) - P(\lambda) f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} &\leq m_\alpha(f) \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda(dg) \\ &\leq m_\alpha(f) \int l^{4\alpha}(g) \mu_\lambda(dg). \end{aligned} \quad (22)$$

Par ailleurs on a $\forall m, n \geq 1, f \in \mathcal{L}_\alpha$, puisque $\delta \leq 1$

$$|P^{n+m}(\lambda) f(\bar{x}) - P^n(\lambda) f(\bar{y})| \leq m_\alpha(f) \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in M} \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \quad (23)$$

Il en résulte que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_\alpha$ la suite $P^n(\lambda) f$ $n \geq 1$ converge uniformément vers une limite $v_\lambda(f)$. En raison de la densité de \mathcal{L}_α dans l'espace de Banach $C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ des fonctions continues sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme on en déduit qu'il en est de même pour la suite $P^n(\lambda) f$ $n \geq 1$ $f \in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$. On en déduit immédiatement le 1) de la proposition 2 et également que pour $f \in \mathcal{L}_\alpha$ $n \geq 1, \lambda \in T$

$$|P^n(\lambda) f - \pi(\lambda)(f)| \leq m_\alpha(f) \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \quad (24)$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in M} \frac{|(P^n(\lambda) - \pi(\lambda)) f(\bar{x}) - (P^n(\lambda) - \pi(\lambda)) f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \\ \leq m_\alpha(f) \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \frac{\delta^\alpha(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \end{aligned} \quad (25)$$

Notant que $P^n(\lambda) - \pi(\lambda) = (P(\lambda) - \pi(\lambda))^n$ puisque

$$P(\lambda) \pi(\lambda) = \pi(\lambda) P(\lambda) = \pi(\lambda) \quad \text{et que } \pi^2(\lambda) = \pi(\lambda)$$

le 2) de la proposition 2 résulte alors de la proposition 1 et des inégalités précédentes.

De la proposition 2 on déduit le corollaire.

COROLLAIRE 1. — *Sous les hypothèses du théorème 1, soit $\alpha \in]0, \alpha_0(T)]$ et $\rho_1[T, \alpha] = 1/2 \{1 + \sup \{\rho(T, \alpha), \rho(T, \alpha/2)\}\} < 1$.*

1) Le spectre de l'opérateur $P(\lambda)$, $\lambda \in T$ opérant sur \mathcal{L}_α (resp. $\mathcal{L}_{\alpha/2}$) est contenu dans le compact

$$E_{\alpha, T} = \{1\} \cup \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho_1(T, \alpha)\}.$$

2) Pour tout compact K de $\mathbb{C} - E_{\alpha, T}$ on a

$$\sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in K}} \|(zI - P(\lambda))^{-1}\|_\alpha < +\infty$$

et

$$\sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in K}} \|(zI - P(\lambda))^{-1}\|_{\alpha/2} < +\infty.$$

Preuve du corollaire 1. — Le 1) est immédiat.

D'autre part on a pour $z \in \mathbb{C} - E_{\alpha, T}$

$$(zI - P(\lambda))^{-1} = \frac{\pi(\lambda)}{z-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{Q^n(\lambda)}{z^{n+1}} \quad (26)$$

et

$$\sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in K}} \|(zI - P(\lambda))^{-1}\|_\alpha \leq \sup_{z \in K} \frac{1}{|z-1|} + c(T, \alpha) \sum_{k \geq 0} \frac{\rho^k(T, \alpha)}{\rho^{k+1}(K)} < +\infty \quad (27)$$

où

$$\rho(K) = \sup_{z \in K} \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{\rho_1(T, \alpha)} < \frac{1}{\rho(T, \alpha)}. \quad (28)$$

De même on a l'inégalité

$$\sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in K}} \|[zI - P(\lambda)]^{-1}\|_{\alpha/2} < +\infty. \quad (29)$$

LEMME 1. — Sous les hypothèses du théorème 1, pour $\alpha \in]0, \alpha_0(T)[$ il existe des constantes $c_1(T, \alpha)$ et $\varepsilon_3(T) > 0$ telles que pour $\lambda, \mu \in T$, $f \in \mathcal{L}_\alpha$ on ait

$$\|P(\lambda)f - P(\mu)f\|_{\alpha/2} \leq c_1(\alpha, T) \|f\|_\alpha |\mu - \lambda|^{\varepsilon_3(T)}.$$

Preuve du lemme 1. — Pour $f \in \mathcal{L}_\alpha$, $\lambda, \mu \in T$ on a

$$|P(\lambda)f - P(\mu)f| \leq \|f\|_\alpha \sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \int \delta^\alpha(g^\lambda(\omega) \cdot \bar{x}, g^\mu(\omega) \cdot \bar{x}) d\mathbb{P}(\omega). \quad (30)$$

De plus pour $g, h \in GL(d, \mathbb{R})$, $\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$d(g \cdot \bar{x}, h \cdot \bar{x}) \leq \|g - h\| \text{Inf}(\|g\|, \|h\|) \|g^{-1}\| \|h^{-1}\|. \quad (31)$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} & |P(\lambda)f - P(\mu)f| \\ & \leq \|f\|_\alpha \int \|g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega)\|^\alpha l^{3\alpha/2}(g^\lambda(\omega)) l^{3\alpha/2}(g^\mu(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \\ & \leq \|f\|_\alpha |\mu - \lambda|^{\alpha\varepsilon_2(T)} \int C^\alpha(\omega) l^{3\alpha/2}(g^\lambda(\omega)) l^{3\alpha/2}(g^\mu(\omega)) d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned} \quad (32)$$

D'où l'on déduit par l'inégalité de Hölder que

$$|P(\lambda)f - P(\mu)f| \leq \|f\|_\alpha |\mu - \lambda|^{\alpha\varepsilon_2(T)} \times c_1 \quad (33)$$

où

$$c_1 = \left(\int c^{3\alpha}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \right)^{1/3} \left[\sup_{\lambda \in T} \int l^{9\alpha/2}(g^\lambda(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \right]^{2/3}. \quad (34)$$

Par ailleurs de l'inégalité

$$\frac{\delta(g \cdot \bar{x}, g \cdot \bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} \leq l^4(g), \quad g \in \text{GL}(d, \mathbb{R}), \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \quad (35)$$

il résulte que pour $\lambda \in T$ on a

$$|P(\lambda)f(\bar{x}) - P(\lambda)f(\bar{y})| \leq m_\alpha(f) \delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y}) c_2 \quad (36)$$

où

$$c_2 = \int l^{4\alpha}(g^\lambda(\omega)) d\mathbb{P}(\omega).$$

On obtient à l'aide de (33) et de (36) que

$$\begin{aligned} & |(P(\lambda) - P(\mu))f(\bar{x}) - (P(\lambda) - P(\mu))f(\bar{y})| \leq \|f\|_\alpha \\ & \quad \times \max(c_1, c_2) \times \inf \{|\mu - \lambda|^{\alpha\varepsilon_2(T)}, \delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})\} \end{aligned} \quad (37)$$

d'où

$$m_{\alpha/2}[(P(\lambda) - P(\mu))f] \leq \|f\|_\alpha \max(c_1, c_2) |\mu - \lambda|^{\alpha\varepsilon_2(T)/2}. \quad (38)$$

On peut supposer le choix de $\alpha_0(T)$ suffisamment petit pour assurer que les constantes c_1 et c_2 sont finies.

LEMME 2. — Pour $\alpha \in]0, \alpha_0(T)]$ il existe une constante $c_2(\alpha, T)$ telle que pour $f \in \mathcal{L}_\alpha$, $\lambda, \mu \in T$ on ait

$$|v_\lambda[f] - v_\mu[f]| \leq c_2[\alpha, T] |\lambda - \mu|^{\varepsilon_3(T)/2} \|f\|_\alpha.$$

Preuve du lemme 2. — Pour $z \in \mathbb{C} - E_{\alpha, T}$ soit

$$R_\lambda(z) = (zI - P(\lambda))^{-1} \quad (39)$$

la résolvante de $P(\lambda)$. On a la relation

$$R_\lambda(z) - R_\mu(z) = R_\mu[P(\lambda) - P(\mu)]R_\lambda(z). \quad (40)$$

D'autre part il existe un cercle, Γ de centre 1, contenu dans $\mathbb{C} - E_{\alpha, T}$ et l'on a

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R_{\lambda}(z) dz. \quad (41)$$

On en déduit donc d'après le lemme 1 et le corollaire 1 que

$$|v_{\lambda}(f) - v_{\mu}(f)| \leq \rho(\Gamma) c_1(\alpha, T) \\ \times \sup_{\substack{\mu \in T \\ z \in \Gamma}} \|R_{\mu}(z)\|_{\varepsilon_3(T)/2} |\lambda - \mu|^{\varepsilon_3(T)/2} \sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in \Gamma}} \|R_{\lambda}(z)\|_{\alpha} \|f\|_{\alpha} \quad (42)$$

où $\rho(\Gamma)$ désigne le rayon du cercle Γ ce qui établit le lemme 2.

Soit σ le cocycle multiplicatif sur $GL(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$\sigma(g, \bar{x}) = \|gx\|, \quad g \in GL(d, \mathbb{R}), \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \quad (43)$$

où x est un vecteur de norme 1, d'image \bar{x} dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Posons

$$\Phi_{\lambda}(\bar{x}) = \int \text{Log } \sigma[g^{\lambda}(\omega), \bar{x}] d\mathbb{P}(\omega). \quad (44)$$

D'après la formule de Fürstenberg on sait que :

$$\gamma(\lambda) = \int_{\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \Phi_{\lambda}(\bar{x}) v_{\lambda}(d\bar{x}) = v_{\lambda}(\Phi_{\lambda}). \quad (45)$$

Grâce à cette formule, au lemme 2 et au lemme 3 qui suit nous pourrons achever la démonstration du théorème 1.

LEMME 3.

$$1) \sup_{\lambda \in T} \|\Phi_{\lambda}\|_{\alpha} < +\infty$$

2) Il existe des constantes $c_3(T)$ et $\varepsilon_4(T) > 0$ telles que pour $\lambda, \mu \in T$ on ait

$$\sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} |\Phi_{\lambda}(\bar{x}) - \Phi_{\mu}(\bar{x})| \leq c_3(T) |\lambda - \mu|^{\varepsilon_4(T)}$$

Preuve du lemme 3.

1° On a tout d'abord

$$\sup_{\lambda \in T} |\Phi_{\lambda}| \leq \sup_{\lambda \in T} \int \text{Log } l(g^{\lambda}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) < +\infty. \quad (46)$$

D'autre part en raison de l'inégalité

$$\left| \text{Log} \frac{x}{y} \right| \leq c(\alpha) \text{Inf}[u(x, y), u^{\alpha/4}(x, y)] \quad (47)$$

où

$$x, y > 0, \quad u(x, y) = \frac{|x-y|}{\text{Inf}(x, y)}$$

on a

$$\begin{aligned} |\Phi_\lambda(\bar{x}) - \Phi_\lambda(\bar{y})| \\ \leq c(\alpha) \int \text{Inf}\{l^2(g^\lambda(\omega)) \|x-y\|, l^{\alpha/2}(g^\lambda(\omega)) \|x-y\|^{\alpha/4}\} d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned} \quad (48)$$

où x, y sont deux vecteurs de norme 1, d'image \bar{x}, \bar{y} dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et tels que l'angle de x et y soit inférieur à $\pi/2$.

En raison des inégalités

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \|x-y\| \quad (49)$$

et

$$\text{Inf}(u, v) \leq u^\alpha v^{1-\alpha} \quad (50)$$

il vient alors

$$\sup_{\lambda \in T} m_\alpha(\Phi_\lambda) \leq c(\alpha) (\sqrt{2})^{\alpha/4(5-\alpha)} \sup_{\lambda \in T} \int l^{\alpha(3\alpha+1)/2}(g^\lambda(\omega)) d\mathbb{P}(\omega). \quad (51)$$

Un choix de $\alpha_0(T)$ suffisamment petit c'est-à-dire tel que $(\alpha/2)(3\alpha+1) < \varepsilon_1(T)$ assure que le second membre de (51) est fini et la démonstration du 1) du lemme 3 est ainsi obtenue à l'aide de (46) et de (51).

2) En utilisant à nouveau l'inégalité (47) il vient, pour $\lambda, \mu \in T \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$

$$|\Phi_\lambda(\bar{x}) - \Phi_\mu(\bar{x})| \leq c(\alpha) \int \text{Inf}(A_{\lambda, \mu}(\omega), A_{\lambda, \mu}^{\alpha/4}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \quad (52)$$

où

$$A_{\lambda, \mu}(\omega) = \|g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega)\| \text{Inf}[l(g^\lambda(\omega)), l(g^\mu(\omega))]. \quad (53)$$

D'après (50) on a donc

$$|\Phi_\lambda(\bar{x}) - \Phi_\mu(\bar{x})| \leq c(\alpha) |\lambda - \mu|^{\alpha/4(5-\alpha)} \times c_3(T) \quad (54)$$

où

$$c_3(T) = \sup_{\lambda, \mu \in T} \int c^{\alpha/4(5-\alpha)}(\omega) \{\text{Inf}(l(g^\lambda(\omega)), l(g^\mu(\omega)))\}^{\alpha/4(5-\alpha)} d\mathbb{P}(\omega). \quad (55)$$

La constante $c_3(T)$ est finie pour un choix suffisamment petit de $\alpha_0(T)$ en raison des hypothèses du théorème 1.

La démonstration du lemme 3 est ainsi achevée.

La preuve du théorème se termine maintenant facilement en décomposant $\gamma(\lambda) - \gamma(\mu)$ sous la forme

$$\gamma(\lambda) - \gamma(\mu) = \int [\Phi_\lambda(\bar{x}) - \Phi_\mu(\bar{x})] v_\lambda(d\bar{x}) + \int \Phi_\mu(\bar{x}) [v_\lambda(d\bar{x}) - v_\mu(d\bar{x})] \quad (56)$$

et en utilisant les résultats des lemmes 2 et 3.

III. ÉTUDE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS

Désignons par :

$K = O(d)$ le groupe orthogonal de \mathbb{R}^d ;

$A =$ le sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices diagonales à coefficients positifs;

$N =$ le sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures ayant des coefficients diagonaux égaux à 1.

Rappelons que l'on a la décomposition d'Iwasawa : l'application qui au triplet $(k, a, n) \in K \times A \times N$ associe le produit kan est un isomorphisme de variétés analytiques de $K \times A \times N$ sur $GL(d, \mathbb{R})$.

Pour $g \in GL(d, \mathbb{R})$ nous écrivons $g = k(g)a(g)n(g)$, $k(g) \in K$, $a(g) \in A$, $n(g) \in N$.

La décomposition précédente induit une action du groupe $GL(d, \mathbb{R})$ sur K en posant :

$$g \cdot k_1 = k[gk_1], \quad g \in GL(d, \mathbb{R}), \quad k_1 \in K. \quad (57)$$

On a d'autre part le

LEMME 4. — *Tout cocycle multiplicatif ρ continu de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ K -invariant à gauche [i.e. tel que $\forall k, k' \in K, g \in GL(d, \mathbb{R})$ on ait $\rho(k'g, k) = \rho(g, k)$] s'écrit*

$$\rho[g, k] = \chi[a(gk)] \quad (58)$$

où χ est un caractère continu de A dans $\mathbb{C} - \{0\}$.

Preuve du lemme 4. — En raison de la relation

$$a(gg'k) = a(gg' \cdot k) a(g'k), \quad g, g' \in GL(d, \mathbb{R}), \quad k \in K \quad (59)$$

il est clair que (58) définit un cocycle multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$, K -invariant à gauche.

Réiproquement si ρ est un cocycle multiplicatif sur $G \times K$ et K -invariant à gauche on a

$$\rho(g, k) = \rho(gk, I) \quad (60)$$

et donc ce cocycle est défini par la fonction $\rho(s, I)$, $s \in S = AN$ qui est un caractère du groupe S car pour tout $s \in S$ on a $s \cdot I = I$. Un tel caractère envoie N sur 1 et donc est défini par un caractère de A , ce qui justifie la relation (58).

Remarque. — Il résulte du lemme qui précède que tout cocycle multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ continu K -invariant à gauche est analytique sur $G \times K$, car tout caractère continu de A dans $\mathbb{C} - \{0\}$ est analytique sur A .

Dans la suite μ désignera une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$ ayant des moments exponentiels, et ρ un cocycle continu multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$, K -invariant à gauche.

$C^p(K)$ est l'espace de Banach des fonctions p fois continûment dérивables de K dans \mathbb{C} .

Nous nous proposons d'étudier l'opérateur P_p défini sur $C^p(K)$ $p \geq 0$ par

$$P_p f(k) = \int \rho(g^{-1}, k) f(g^{-1} \cdot k) \mu(dg), \quad f \in C^p(K) \quad (61)$$

on a le

THÉORÈME 4. — Soit μ une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$, ayant des moments exponentiels, et absolument continue par rapport à la mesure de Haar de $GL(d, \mathbb{R})$, alors l'opérateur P_p est un opérateur compact sur $C^p(K)$, $p \geq 0$.

Preuve du théorème 4. — L'algèbre de Lie \mathcal{K} des champs de vecteurs invariants à gauche sur K s'identifie à l'ensemble des matrices réelles antisymétriques $\mathbb{O}(d)$: si f est une fonction continûment dérivable au voisinage d'un point $k \in K$, et $X \in \mathbb{O}(d)$. On a

$$Xf(k) = \frac{d}{dt} \{f(k \exp t X)\}_{t=0} \quad (62)$$

où $\exp t X$ désigne l'exponentielle de la matrice $t X$. Soit $E_{i,j}$ la matrice $d \times d$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui se trouvant à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui est égal à 1. Les matrices $(X_{i,j})_{j > i} = E_{i,j} - E_{j,i}$ forment une base de dimension $d(d-1)/2$ de $\mathbb{O}(d)$. Soient $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$ des indices multiples où $\alpha_m \in \{(i, j)/d \geq j > i \geq 1\}$. On pose $X_\alpha = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_l}$ et $|\alpha| = l$.

On munit $C^p(K)$ d'une structure d'espace de Banach à l'aide de la norme

$$\|f\|_p = \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{k \in K} |X_\alpha f(k)|. \quad (63)$$

La formule

$$\rho(g)f(k) = \sigma(g^{-1}, k) f(g^{-1} \cdot k), \quad g \in GL(d, \mathbb{R}), f \in C^p(K), k \in K \quad (64)$$

définit une représentation de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^p(K)$ telle que l'application $(g, f) \rightarrow \rho(g)f$ est continue de $G \times C^p(K)$ dans $C^p(K)$. La fonction

$$\|\rho(g)\|_p = \sup_{\|f\|_p=1} \|\rho(g)f\|_p \quad (65)$$

est sous additive et localement bornée; on a donc [7]:

$$\int \|\rho(g)\|_p d\mu(g) < +\infty, \text{ et puisque}$$

$$\|P_p f\|_p \leq \int \|\rho(g)\|_p d\mu(g) \times \|f\|_p \quad (66)$$

P_ρ opère sur $C^p(K)$.

Montrons maintenant que P_ρ est un opérateur compact sur $C^p(K)$. Pour cela considérons une partie bornée B de $C^p(K)$ et montrons que pour tout opérateur différentiel D invariant à gauche sur K et de degré inférieur ou égal à p l'ensemble $\{D(P_\rho f); f \in B\}$ est une partie équicontinue de $C(K)$. Le théorème d'Arzela-Ascoli permet alors de conclure que $P_\rho(B)$ est une partie compacte de $C^p(K)$. Désignons par R (resp. L) la représentation de K dans $C^p(K)$ définie par

$$R(k') f(k) = f(kk') \quad [\text{resp. } L(k') f(k) = f(k'^{-1} k)]. \quad (67)$$

Pour tout opérateur différentiel Δ de degré $j \leq p$ c'est-à-dire de la forme

$$\Delta = \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha X_\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

invariant à gauche sur K , $R(\Delta)$ est un opérateur borné de $C^j(K)$ dans $C(K)$ de norme $\|R(\Delta)\|_{j,0}$ et l'on a

$$\|R(\Delta) \rho(g) f\|_0 \leq \|R(\Delta)\|_{j,0} \|\rho(g)\|_j \|f\|_j. \quad (68)$$

De plus l'application $(g, k) \rightarrow R(\Delta) \rho(g) f(k)$ est continue sur $G \times K$. On en conclut en raisonnant par récurrence sur le degré de Δ que

$$\Delta(P_\rho f)(k) = \int R(\Delta)[\rho(g)f](k) d\mu(g) \quad (69)$$

car pour tout $l \geq 0$ $\int \|\rho(g)\|_l d\mu(g) < +\infty$.

De plus on a pour tout $k \in K$

$$L(k^{-1}) R(\Delta) = R(\Delta) L(k^{-1}) \quad (70)$$

et

$$L(k^{-1}) \rho(g) = \rho(k^{-1}g) \quad (71)$$

et donc en supposant que

$$d\mu(g) = \Phi(g) dg \quad (72)$$

où dg est la mesure de Haar sur $GL(d, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Delta(P_\rho f)(k) &= \int R(\Delta)[\rho(k^{-1}g)](f)(e) \Phi(g) dg \\ &= \int R(\Delta) \rho(g)(f)(e) \Phi(kg) dg. \end{aligned} \quad (73)$$

Pour tous $k, k' \in K$ on a

$$\begin{aligned} |\Delta[P_\rho f](k'k) - \Delta[P_\rho f](k)| &\leq \int |R(\Delta) \rho[k^{-1}g] f(e)| |\Phi(k'g) - \Phi(g)| dg. \end{aligned} \quad (74)$$

Comme

$$|\mathbf{R}(\Delta) \rho[k^{-1}g] f(e)| \leq \|\mathbf{R}(\Delta)\|_{j,0} \sup_{k \in K} \|\rho(k^{-1})\|_j \|\rho(g)\|_j \|f\|_j \quad (75)$$

on a donc

$$\begin{aligned} \sup_{k \in K} |\Delta[\mathbf{P}_\rho f](k'k) - \Delta[\mathbf{P}_\rho f](k)| &\leq \|\mathbf{R}(\Delta)\|_{i,0} \sup_{k \in K} \|\rho(k^{-1})\|_i \\ &\times \int_G \|\rho(g)\|_i |\Phi(k'g) - \Phi(g)| dg \times \|f\|_i. \end{aligned} \quad (76)$$

L'intégrale du second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro quand k' tend vers l'identité : ceci est évident lorsque Φ est continue et à support compact, et s'obtient dans le cas général en approchant Φ dans $L^1(\|\rho(g)\|_i dg)$ par des fonctions du type précédent. La conclusion souhaitée résulte alors immédiatement de l'inégalité (76).

COROLLAIRE 1. — Soit μ une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$ admettant des moments exponentiels et absolument continue par rapport à la mesure de Haar de $GL(d, \mathbb{R})$. Il existe alors une unique probabilité μ -invariante portée par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Cette probabilité est absolument continue par rapport à la probabilité m K -invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et admet une densité C^∞ par rapport à m .

Preuve du corollaire 1. — La première assertion de ce corollaire se justifie comme le 1) de la proposition 2 car T_μ a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Considérons le cocycle multiplicatif de $GL(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ dans \mathbb{R}_+ défini par

$$\sigma_2(g, \bar{x}) = \frac{1}{\|gx\|^d} \quad (77)$$

où $x \in \mathbb{R}^d$ est tel que $\|x\|=1$ et a pour image \bar{x} dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\sigma_2(g, \bar{x}) = \frac{dg^{-1}m}{dm}(\bar{x}). \quad (78)$$

Remarquons de plus que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d) = \{k \cdot \bar{e}_1, k \in 0(d)\}$ et que la formule

$$\tilde{\sigma}_2(g, k) = \sigma_2(g, k \cdot \bar{e}_1) \quad (79)$$

définit un cocycle multiplicatif continu, K -invariant à gauche de $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ dans \mathbb{R}_+ . D'après le théorème précédent l'opérateur $P_{\tilde{\sigma}_2}$ est compact sur $C^p(K)$ $p \geq 0$; il en est donc de même de l'opérateur $P(\sigma_2)$ sur $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ où

$$\begin{aligned} P(\sigma_2) f(\bar{x}) &= \int \sigma_2(g^{-1}, \bar{x}) f(g^{-1} \cdot \bar{x}) d\mu(g), \\ f &\in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)), \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (80)$$

Fixons-nous un entier $p_0 \geq 1$. Le rayon spectral de $P(\sigma_2)$ sur l'espace $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ est égal à 1. En effet tout d'abord l'application de $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $\mathbb{C}f \mapsto m(f)$ est une forme linéaire continue sur $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ et de plus

$$m(P(\sigma_2)f) = m(f), \quad f \in C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)). \quad (81)$$

Par ailleurs $P(\sigma_2)$ n'admet pas de valeur propre sur $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ de module strictement supérieur à 1. En effet s'il existait une telle valeur propre λ et une fonction propre φ non nulle on aurait :

$$m(|\varphi|) \geq m(P(\sigma_2)|\varphi|) \geq |\lambda| m(|\varphi|) \quad (82)$$

ce qui est impossible.

Les deux remarques précédentes permettent de conclure, en raison de la compacité de l'opérateur $P(\sigma_2)$.

La suite $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(\sigma_2)(1) n \geq 1$ converge alors dans $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ vers une fonction φ , et l'on a de plus $m(\varphi)=1$. Le raisonnement précédent étant valide pour tout $p_0 \geq 1$ on en conclut que φ est infiniment dérivable sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

La fonction φ satisfait de plus à l'égalité :

$$P(\sigma_2)\varphi = \varphi. \quad (83)$$

Pour toutes fonctions $f, h \in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ on a

$$\int P f(\bar{x}) h(\bar{x}) dm(\bar{x}) = \int f(\bar{y}) P(\sigma_2) h(\bar{y}) dm(\bar{y}) \quad (84)$$

d'où en particulier

$$\int P f(\bar{x}) \varphi(\bar{x}) dm(\bar{x}) = \int f(\bar{y}) \varphi(\bar{y}) dm(\bar{y}) \quad (85)$$

ce qui établit que $\varphi \cdot m$ est une probabilité μ -invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Cette probabilité est unique et elle admet donc une densité C^∞ par rapport à m .

IV. PREUVE DU THÉORÈME

L'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ s'identifie à l'espace homogène K/K_1 de K , K_1 désignant le sous-groupe fermé de K formé des matrices réelles $d \times d$ orthogonales et telles que la première colonne a tous ses coefficients nuls sauf le premier qui est égal à ± 1 . L'espace $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ des fonctions p fois continûment différentiables sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ s'identifie alors au sous-espace de Banach de $C^p(K)$ formé des fonctions p fois continûment différentiables

sur K et K_1 -invariante à droite. Compte tenu du théorème 4 $P(\lambda)$ est un opérateur compact sur $C^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \geq 0$. De la proposition 2 il résulte que le spectre de l'opérateur $P(\lambda)$ $\lambda \in T$ sur $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ est contenu dans

$$E_{\alpha(T), T} = \{1\} \cup \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho_1(T, \alpha_0(T)) < 1\}.$$

Pour $\lambda \in T$, $z \in \mathbb{C} - E_{\alpha(T), T}$ et $f \in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ on note

$$R_\lambda(z) f = (z I - P(\lambda))^{-1}(f) \in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)), \quad p \geq 0.$$

Soit Γ un cercle de centre 1 contenu dans $\mathbb{C} - E_{\alpha(T), T}$. On a alors comme dans la preuve du théorème 1.

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R_\lambda(z) [\Phi_\lambda](\bar{x}) dz \quad (86)$$

pour $\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in T$.

Commençons par établir la

PROPOSITION 3. — Soit ρ un cocycle multiplicatif continu de $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ dans $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ et K -invariant à gauche.

Alors ρ est analytique dans $GL(d, \mathbb{R}) \times K$, de plus sous les hypothèses du théorème 2 la fonction

$$\varphi_\lambda(k) = \int \text{Log } \rho[g^\lambda(\omega), k] d\mathbb{P}(\omega) \quad (87)$$

est C^∞ sur $U \times K$.

COROLLAIRE 2. — Sous les hypothèses du théorème 2

$$(\lambda, \bar{x}) \rightarrow \Phi_\lambda(\bar{x}) = \int \text{Log } \sigma[g^\lambda(\omega), \bar{x}] d\mathbb{P}(\omega) \quad (88)$$

est C^∞ sur $U \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration de la proposition 3. — L'analyticité de ρ résulte du lemme 4 et de la remarque qui suit.

D'autre part désignons par G l'algèbre de Lie de $GL(d, \mathbb{R})$ c'est-à-dire l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur $GL(d, \mathbb{R})$. G s'identifie à $\mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ de la façon suivante : pour $X \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ et f dérivable sur G on définit

$$X f(g) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g \exp t X) - f(g)}{t} \quad (89)$$

\exp désignant ici l'exponentielle de la matrice $t X$.

Le lemme suivant sera utile à la preuve de la proposition 3.

LEMME 5. — Pour toute fonction $\Phi \in C^{p+k}(\mathbb{K})$, $k \geq 0$, $p \geq 0$ il existe une fonction

$$\varphi_{p,k}(\cdot) \in \bigcap_{k \geq 1} L^k(\Omega, \mathbb{P})$$

telle que

$$\sup_{\lambda \in T} \left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} [\rho(g^\lambda(\omega), \cdot) \Phi(g^\lambda(\omega), \cdot)] \right\|_p \leq \varphi_{p,k}(\omega) \|\Phi\|_{k+p}, \quad \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

Preuve du lemme 5. — $GL(d, \mathbb{R})$ peut être considéré comme un ouvert de \mathbb{R}^{d^2} ; soit $(g_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ un système de coordonnées sur $GL(d, \mathbb{R})$ et $(\partial/\partial g_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ les champs de vecteurs associés, c'est-à-dire que si f est différentiable sur $GL(d, \mathbb{R})$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial g_{i,j}} f(g) = \frac{d}{dt} f(g + t E_{i,j}) \Big|_{t=0} \quad (90)$$

où $E_{i,j}$ désigne la matrice $d \times d$ ayant tous ses termes nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne et qui est égal à 1.

Pour tout $X \in \mathbb{G}$ on a la relation

$$X g_{i,j}(g) = \langle g X e_i, e_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (91)$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^d pour un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tels que $g_{i,j} = \langle g e_i, e_j \rangle$ $1 \leq i, j \leq d$.

Il en résulte que l'on a :

$$E_{k,l} = \sum_{j=1}^d g_{k,j} \frac{\partial}{\partial g_{l,j}}, \quad 1 \leq k, l \leq d. \quad (92)$$

Soit $M(g)$ la matrice $d^2 \times d^2$ de passage de la base $(E_{k,l})_{1 \leq k, l \leq d}$ à la base $(\partial/\partial g_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ de l'espace tangent au point g de $GL(d, \mathbb{R})$. De (92) il résulte que $\|M(g)\| \leq \|g\|$ et également que $|\det[M(g)]| = |\det g|^d$ et par conséquent que

$$\|M^{-1}(g)\| \leq \|g\|^{d-1} \|g^{-1}\|^{d^2}. \quad (93)$$

Supposons que $T = [a-r, a+r]$. Il résulte des hypothèses d'analyticité du théorème 2 que l'on a pour $\lambda \in T$

$$g^\lambda(\omega) = \sum_{k \geq 0} (\lambda - a)^k A_k(\omega), \quad \mathbb{P} \text{ p. s.}, \quad (A_k(\omega))_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \quad (94)$$

et de même

$$[g^\lambda(\omega)]^{-1} = \sum_{k \geq 0} (\lambda - a)^k B_k(\omega), \quad \mathbb{P} \text{ p. s.}, \quad (B_k(\omega))_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \quad (95)$$

où pour tout $p \geq 1$ la série $\sum_{k \geq 0} r^k \{N_p(A_k) + N_p(B_k)\}$ est convergente, où l'on a noté

$$N_p(A) = \left\{ \int \|A(\omega)\|^p dP(\omega) \right\}^{1/p} \quad (96)$$

pour toute matrice aléatoire A de Ω dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction φ différentiable sur $GL(d, \mathbb{R})$ on a

$$\frac{d}{d\lambda} \varphi(g^\lambda(\omega)) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{dg_{i,j}^\lambda(\omega)}{d\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial g_{i,j}}(g^\lambda(\omega)), \quad \mathbb{P} \text{ p. s.} \quad (97)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \varphi(g^\lambda(\omega)) \\ &= \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \frac{dg_{i,j}^\lambda(\omega)}{d\lambda} m'_{i,j,k,l}(g^\lambda(\omega)) E_{k,l}(\varphi)(g^\lambda(\omega)), \quad \mathbb{P} \text{ p. s.} \end{aligned} \quad (98)$$

où

$$(m'_{i,j,k,l}(g)) = [M(g)]^{-1}. \quad (99)$$

Considérons d'autre part l'espace vectoriel V_p engendré par les fonctions de la forme

$$F(g, k) = \rho(g, k) f(g \cdot k) \quad \text{où } f \in C^p(K). \quad (100)$$

Soit X un élément de \mathbb{G} alors $XF(g, k) = (d/dt) F(\exp t X g, k)|_{t=0}$ est un élément de V_{p-1} on a en effet en utilisant la propriété de cocycle de ρ .

$$XF(g, k) = \rho(g, k) [\bar{X}(f)(g \cdot k) + X \rho(e, g \cdot k) f(g \cdot k)] \quad (101)$$

où

$$\bar{X}(f)(k) = \frac{d}{dt} f(\exp t X \cdot k) |_{t=0}. \quad (102)$$

Par ailleurs l'application $g \rightarrow \rho(g^{-1}, k) f(g^{-1} \cdot k)$ définit une représentation de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^p(K)$ $p \geq 1$. Il en résulte [7] qu'il existe une constante $c(p)$ telle que $f \in C^p(K)$ on ait :

$$\|\rho(g^{-1}, \cdot) f(g^{-1}, \cdot)\|_p \leq c(p) l^c(p)(g) \|f\|_p. \quad (103)$$

On déduit de (98), de (99) et de (103) qu'il existe une constante $K(p) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in T} \left\| \frac{d}{d\lambda} \rho(g^\lambda(\omega), \cdot) \Phi(g^\lambda(\omega), \cdot) \right\|_p &\leq K(p) l^c(p)(g^\lambda(\omega)) \\ &\times \sum_{k \geq 0} k r^{k-1} \|A_k(\omega)\| \\ &\times \left(\sum_{k \geq 0} r^k \|A_k(\omega)\| \right)^{d-1} \times \left(\sum_{k \geq 0} r^k \|B_k(\omega)\| \right)^{d^2} \\ &\times \sum_{1 \leq k, l \leq d} (\|\bar{E}_{k,l} \Phi\|_p + \|\bar{E}_{k,l} [\rho(e, \cdot) \Phi(\cdot)]\|_p). \end{aligned} \quad (104)$$

En raison de la compacité de K il existe une constante a_p telle que pour toute fonction $\Phi \in C^{p+1}(K)$ on ait :

$$\sum_{1 \leq k, l \leq d} \|\bar{E}_{k,l}\Phi\|_p + \|E_{k,l}[\rho(e, \cdot) \Phi(\cdot)]\|_p \leq a_p \|\Phi\|_{p+1}. \quad (105)$$

Les inégalités (104), (105), l'inégalité de Hölder et l'hypothèse d'analyticité du théorème 2 permettent d'obtenir le résultat du lemme pour $k=1$.

Le cas où $k \geq 2$ s'obtient de manière analogue en dérivant à nouveau $\frac{d}{d\lambda} [\rho(g^\lambda(\omega), \cdot) \Phi(g^\lambda(\omega), \cdot)]$ par rapport à la variable λ , le seul élément nouveau étant de contrôler les quantités $\sup_{\lambda \in T} \left| \frac{d^p}{d\lambda^p} g_{i,j}^\lambda(\omega) \right|_{1 \leq i, j \leq d}$ pour $2 \leq p \leq k$ et

$$\sup_{\lambda \in T} \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} [M(g^\lambda(\omega))]^{-1} \right\|, \quad 2 \leq p \leq k.$$

On a

$$\sup_{\lambda \in T} \left| \frac{d^p}{d\lambda^p} g_{i,j}^\lambda(\omega) \right| \leq \sum_{k \geq p} k^p r^{k-p} \|A_k(\omega)\|, \quad \text{P. s.} \quad (106)$$

D'autre part la matrice $[M(g^\lambda(\omega))]^{-1}$ et ses dérivées par rapport à λ sont des matrices dont les coefficients sont des expressions rationnelles en les coefficients de la matrice $M(g^\lambda(\omega))$ et de ses dérivées, et dont le dénominateur est une puissance de $\det M(g^\lambda(\omega))$. Il en résulte que pour tout $k \geq 1$

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} [M(g^\lambda(\omega))]^{-1} \right\|$$

est majorée P. s. par une combinaison finie de produits de termes de la forme

$$\sum_{k \geq q} k^q r^{k-q} \|A_k(\omega)\|, \quad 0 \leq q \leq p \quad (107)$$

$$\sum_{k \geq 0} r^k \|B_k(\omega)\| \quad (108)$$

ce qui permet de conclure.

La proposition se justifie aisément à partir du lemme précédent et du fait que pour tout cocycle multiplicatif continu η sur $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ la variable aléatoire $\sup_{\lambda \in T} \sup_{k \in K} \eta(g^\lambda(\omega), k)$ appartient à $\bigcap_{k \geq 0} L^k(\Omega, \mathbb{P})$ en utilisant un théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Preuve du corollaire 2. — Le corollaire découle de la proposition 3 en considérant le cocycle $\rho(g, k) = \sigma(g, k \cdot \bar{e}_1)$.

Définissons d'autre part les opérateurs $P^{(k)}(\lambda)$ $k \geq 1$ par :

$$P^{(k)}(\lambda)(f)(\bar{x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k} \{ P(\lambda)(f)(\bar{x}) \} = \int \frac{d^k}{d\lambda^k} (f(g^\lambda(\omega) \cdot \bar{x})) d\mathbb{P}(\omega) \\ f \in C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)), \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d). \quad (109)$$

La formule précédente se justifie à l'aide du lemme 5.

On désigne par T un intervalle de U et pour k et p entiers ≥ 0 par $\mathcal{L}(k, p)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$. Énonçons et démontrons des lemmes utiles à la preuve du théorème 2.

LEMME 6

- 1) $P^{(k)}(\lambda)$ appartient à $\mathcal{L}(k+p, p)$ $k \geq 0, p \geq 0$.
- 2) L'application $\lambda \rightarrow P(\lambda)$ est continue de U dans $\mathcal{L}(k, k)$ $k \geq 0$
- 3) Pour tous $k \geq 0, p \geq 0$ il existe une constante $c_{p,k}(T)$ telle que pour toute fonction f de $C^{p+k+2}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ on ait

$$\sup_{\lambda, \lambda_0 \in T} \| P^{(k)}(\lambda)(f) - P^{(k)}(\lambda_0)(f) - (\lambda - \lambda_0) P^{(k+1)}(\lambda_0)(f) \|_p \\ \leq c_{p,k}(T) (\lambda - \lambda_0)^2 \| f \|_{p+k+2}, \quad (110)$$

Démonstration du lemme 6. — L'assertion 1) est une conséquence immédiate du lemme 5.

Considérons par ailleurs la représentation r continue de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ définie par la formule :

$$r(g)f(\bar{x}) = f(g^{-1} \cdot \bar{x}). \quad (111)$$

Il résulte de [7] qu'il existe une constante $c_k > 0$ telle que

$$\| r(g)f \|_k \leq c_k l^k(g) \| f \|_k. \quad (112)$$

Or on a :

$$P(\lambda)(f) - P(\lambda_0)(f) = \int r(g^{-1})(f) [f_\lambda(g) - f_{\lambda_0}(g)] dg \quad (113)$$

et par conséquent

$$\| P(\lambda)(f) - P(\lambda_0)(f) \|_k \leq c_k \int l^k(g) |f_\lambda(g) - f_{\lambda_0}(g)| dg. \quad (114)$$

L'hypothèse 2) du théorème 2 permet alors d'obtenir le 2) du lemme.

Établissons maintenant le 3) de ce lemme. Par application de la formule de Taylor il vient :

$$P^{(k)}(\lambda)(f) - P^{(k)}(\lambda_0)(f) - (\lambda - \lambda_0) P^{(k+1)}(\lambda_0)(f) \\ = (\lambda - \lambda_0)^2 \int d\mathbb{P}(\omega) \int_0^1 (1-t) \frac{d^{k+2}}{d\lambda^{k+2}} [f(g^{\lambda_0+t(\lambda-\lambda_0)}(\omega) \cdot)] dt. \quad (115)$$

L'énoncé du lemme 5 permet d'obtenir facilement le résultat souhaité.

LEMME 7. — Soient $(E_i, |\cdot|_i)$ $i=1, 2$ deux espaces de Banach et $T(\lambda)$ $\lambda \in \Omega$ où 0 est un ouvert de \mathbb{R} une famille d'opérateurs bornés de E_i dans E_i $i=1, 2$.

On suppose que :

- 1) $E_1 \subset E_2$ et que l'injection de E_1 dans E_2 est continue.
- 2) L'application $\lambda \rightarrow T(\lambda)$ est continue de 0 dans $\mathcal{L}(E_i, E_i)$ $i=1, 2$ espace de Banach des applications linéaires continues de E_i dans E_i .
- 3) L'application $\lambda \rightarrow T(\lambda)$ de 0 dans $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ espace de Banach des applications linéaires continues de E_1 dans E_2 est dérivable en $\lambda_0 \in \Omega$, de dérivée $T'(\lambda_0)$.

Soit d'autre part z_0 un élément de l'ensemble résolvant de $T(\lambda_0)$ considéré comme opérateur sur E_1 et E_2 . On note $R(T(\lambda), z_0) = \{z_0 I - T(\lambda)\}^{-1}$ la résolvante de $T(\lambda)$ sur E_1 et E_2 qui d'après 2) existe sur un voisinage V_{λ_0} . L'application $\lambda \rightarrow R(T(\lambda), z_0)$ de V_{λ_0} dans $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est alors dérivable en λ_0 et de dérivée égale à $R(T(\lambda_0), z_0) T'(\lambda_0) R(T(\lambda_0), z_0)$.

Démonstration du lemme 7. — Il résulte de l'hypothèse 3) que pour $f \in E_1$ on a

$$|\langle T(\lambda) f - T(\lambda_0) f - (\lambda - \lambda_0) T'(\lambda_0) f \rangle|_2 = |\lambda - \lambda_0| \varepsilon_1(\lambda - \lambda_0) \|f\|_1 \quad (116)$$

où

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon_1(\lambda) = 0.$$

Soit $f \in E_1$, notons

$$\Delta(\lambda, \lambda_0, f) = \frac{\langle R(T(\lambda), z_0) f - R(T(\lambda_0), z_0) f \rangle}{\lambda - \lambda_0} - R(T(\lambda_0), z_0) T'(\lambda_0) R(T(\lambda_0), z_0) f. \quad (117)$$

D'après l'équation résolvante

$$\begin{aligned} R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0) \\ = R(T(\lambda), z_0) [T(\lambda) - T(\lambda_0)] R(T(\lambda_0), z_0) \end{aligned} \quad (118)$$

on a

$$\Delta(\lambda, \lambda_0, f) = \Delta_1(\lambda, \lambda_0, f) + \Delta_2(\lambda, \lambda_0, f) \quad (119)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda, \lambda_0, f) &= \{R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0)\} \\ &\circ \left[\frac{T(\lambda) - T(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right] R(T(\lambda_0), z_0) f \end{aligned} \quad (120)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_2(\lambda, \lambda_0, f) \\ = \left\{ R(T(\lambda_0), z_0) \left[\frac{T(\lambda) - T(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - T'(\lambda_0) \right] R(T(\lambda_0), z_0) \right\} f. \end{aligned} \quad (121)$$

De (116) il résulte que

$$|\Delta_2(\lambda, \lambda_0, f)|_2 \leq \varepsilon_1(\lambda - \lambda_0) |R(T(\lambda_0), z_0)|_2 |R(T(\lambda_0), z_0)|_1 |f|_1 \quad (122)$$

et également que

$$|\Delta_2(\lambda, \lambda_0, f)|_2 \leq |R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0)|_2 \times (|T'(\lambda_0)|_{1,2} + \varepsilon_1(\lambda - \lambda_0)) |f|_1 \quad (123)$$

où l'on a adopté les notations

$$|A|_i = \sup_{\|f\|_i} |Af|_i \quad (124)$$

pour tout opérateur A linéaire de E_i dans E_i $1 \leq i \leq 2$

$$|A|_{1,2} = \sup_{\|f_1\|=1} |Af|_2 \quad (125)$$

pour tout opérateur A linéaire de E_1 dans E_2 .

De l'hypothèse 2) du lemme il résulte que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} |R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0)|_2 = 0 \quad (126)$$

et la conclusion résulte alors de (119), (122) et (123).

LEMME 8. — Soient $(i_l)_{1 \leq l \leq k}$ une suite de k entiers ≥ 0 et $j \geq 0$ et
 $H(\lambda, z, \cdot) = R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots$

$$\dots R(\lambda, z) P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right].$$

Pour tout $p \geq 0$ et $z \in \Gamma$ l'application $\lambda \rightarrow H(\lambda, z, \cdot)$ de T dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ est dérivable et $(\lambda, z) \rightarrow (\partial/\partial\lambda) H(\lambda, z, \cdot)$ est continue de $T \times \Gamma$ dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration du lemme 8. — Il résulte facilement du fait que $(\lambda, \bar{x}) \rightarrow \Phi_\lambda(\bar{x})$ est C^∞ sur $U \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ des lemmes 6 et 7 que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} H(\lambda, z, \cdot) = R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots$$

$$\dots R(\lambda, z) P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^{j+1} \Phi_\lambda}{\partial \lambda^{j+1}} \right]$$

$$+ \sum_{l=1}^k R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots$$

$$\dots P^{(i_{l-1})}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_l+1)}(\lambda) R(\lambda, z) \dots P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right]$$

$$+ \sum_{l=1}^k R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots$$

$$\dots R(\lambda, z) P'(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_l)}(\lambda) R(\lambda, z) \dots$$

$$\dots P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right] + R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots \\ \dots R(\lambda, z) P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) P'(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right]. \quad (127)$$

La continuité de $(\lambda, z) \rightarrow (\partial/\partial\lambda) H(\lambda, z, .)$ de $T \times \Gamma$ dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$, $p \geq 0$ est une conséquence de la formule précédente, de la continuité de $(\lambda, z) \rightarrow R(\lambda, z)$ de $T \times \Gamma$ dans $\mathcal{L}(k, k)$ pour tout $k \geq 0$ et du 3) du lemme 6.

Terminons maintenant la preuve du théorème 2. Le lemme 8 permet de justifier la dérivation par rapport à λ sous le signe intégrale dans la formule

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(\lambda, z) [\Phi_\lambda](\bar{x}) dz, \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda \in T \quad (128)$$

d'où

$$\gamma'(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(\lambda, z) \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\Phi_\lambda) \right] (\bar{x}) \\ + R(\lambda, z) P'(\lambda) R(\lambda, z) [\Phi_\lambda](\bar{x}) dz. \quad (129)$$

Les dérivations successives se justifiant par le même lemme on voit et que $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ est infiniment dérivable sur T et

$$\gamma^{(p)}(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \\ \times \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^p \sum_{\{(j, i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^{k+1}; j+i_1+i_2+\dots+i_k=p\}} \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_k! j!} \\ \times R(\lambda, z) P^{(i_1)}(\lambda) R(\lambda, z) P^{(i_2)}(\lambda) \dots \\ \dots R(\lambda, z) P^{(i_k)}(\lambda) R(\lambda, z) \left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j} \right] (\bar{x}) dz. \quad (130)$$

V.1. PREUVE DU THÉORÈME 3

Soit $A > 0$ et

$$\Psi_A(\lambda) = N(\lambda) 1[-A, A](\lambda) \quad (131)$$

Ψ_A est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Soit $\tilde{\Psi}_A$ sa transformée de Hilbert.

$$\tilde{\Psi}_A(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > \varepsilon} \frac{\Psi_A(t)}{x-t} dt. \quad (132)$$

Par intégration par parties à partir de la formule de Thouless (5) on obtient :

$$\begin{aligned}\Psi_A(x) = & -\frac{1}{\pi} \Psi_A(A) \operatorname{Log}|A-x| + \frac{1}{\pi} \Psi_A(-A) \operatorname{Log}|A+x| \\ & + \frac{1}{\pi} \gamma(x) - \frac{1}{\pi} \int_{|t|>A} \operatorname{Log}|x-t| dN(t).\end{aligned}\quad (133)$$

Supposons tout d'abord les hypothèses du 1) du théorème 3 vérifiées. La suite de matrices indépendantes $\begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n \geq 0$ satisfait alors aux hypothèses du théorème 1. La vérification de 2.1 et de 2.2 est en effet immédiate. De plus comme η charge au moins 2 points le sous-groupe fermé engendré par μ_λ est non compact et ne contient pas de sous-groupe d'indice fini ayant une action irréductible sur \mathbb{R}^2 [14]. On en déduit [1] que μ_λ satisfait l'hypothèse 1) du théorème 1.

Il résulte alors de (133) que $\tilde{\Psi}_A$ est höldérienne dans $[-(A/2), A/2]$, d'où l'on déduit que sa transformée de Hilbert θ_A est höldérienne sur $[-(A/4), A/4]$.

En raison de la continuité [15] de la fonction $N(\lambda)$ sur \mathbb{R} et de la théorie de l'inversion de la transformée de Hilbert dans $L^2(\mathbb{R})$ [13] on a

$$-\theta_A(\lambda) = N(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \in [-A/4, A/4] \quad (134)$$

ce qui assure que N est höldérienne sur l'intervalle $[-(A/4), A/4]$. Ceci justifie la première assertion du théorème 3 en raison de l'arbitraire de A .

Supposons maintenant les hypothèses du 2) du théorème 3 satisfaites et vérifions que la suite de matrices aléatoires indépendantes

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad n \geq 0$$

satisfait alors aux hypothèses du théorème 2. (Compte tenu de la remarque qui suit.)

Il est immédiat que les hypothèses 1) et 2) de ce théorème 2 sont satisfaites par la suite précédente. Par ailleurs (en adoptant les notations du théorème 2) μ_λ^3 admet une densité f_λ par rapport à la mesure de Haar de $SL(2, \mathbb{R})$. En désignant par $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $SL(2, \mathbb{R})$ l'expression de cette densité est [17]

$$f_\lambda(g) = \frac{1}{|d|} f\left(\frac{b-1}{d} - \lambda\right) f(-d - \lambda) f\left(\frac{1-b-ad}{bd} - \lambda\right) \quad (135)$$

la mesure de Haar étant

$$dg = \frac{1}{|b|} da db dd. \quad (136)$$

Soit k un entier, considérons

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) = \int l^k(g) |f_\lambda(g) - f_{\lambda_0}(g)| dg. \quad (137)$$

L'égalité

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xyz - x - z & -xy + 1 \\ yz - 1 & -y \end{pmatrix} = g(x, y, z)$$

les relations (135) et (137) permettent d'obtenir par le changement de variable

$$x = \frac{b-1}{d}, \quad y = d, \quad z = \frac{1-b-ad}{bd}$$

l'égalité

$$\begin{aligned} \delta_k(\lambda, \lambda_0) = \int & l^k[g(x, y, z)] |f(x-\lambda) f(y-\lambda) f(z-\lambda) \\ & - f(x-\lambda_0) f(y-\lambda_0) f(z-\lambda_0)| dx dy dz. \end{aligned} \quad (138)$$

Comme d'autre part

$$l(g(x, y, z)) \leq (1 + |x|)(1 + |y|)(1 + |z|) \leq (1 + \| (x, y, z) \|)^3$$

en notant dL la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^3

$$H(x, y, z) = f(x) f(y) f(z) \quad \text{et} \quad \Lambda = (\lambda, \lambda, \lambda) \quad (139)$$

on a

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) \leq 2^{3k-1} \int (1 + \|x\|^{3k}) |H(x-\Lambda) - H(x-\Lambda_0)| dL(x). \quad (140)$$

Notons que le second membre de l'inégalité précédente est bien défini car H est une densité de probabilité sur \mathbb{R}^3 qui comme f a des moments de tous ordres.

Soit B une boule ouverte bornée de \mathbb{R}^3 et $M = \sup_{\Lambda \in B} \|\Lambda\|$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction φ_ε continue à support compact dans \mathbb{R}^3 telle que

$$\int [1 + 2^{3k-1} (\|y\|^{3k} + M^{3k})] |\varphi_\varepsilon(y) - H(y)| dy < \varepsilon. \quad (141)$$

Il en résulte que

$$\sup_{\Lambda \in B} \int (1 + (\|y\|^{3k}) |\varphi_\epsilon(y - \Lambda) - H(y - \Lambda)| dy < \varepsilon \quad (142)$$

et donc que si $\Lambda = (\lambda, \lambda, \lambda)$, $\Lambda_0 = (\lambda_0, \lambda_0, \lambda_0)$ sont dans B

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) \leq 2^{3k} \varepsilon + 2^{3k-1} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \|x\|^{3k}) |\varphi_\epsilon(x - \Lambda) - \varphi_\epsilon(x - \Lambda_0)| dx. \quad (143)$$

De (143) on déduit que $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \sup \delta_k(\lambda, \lambda_0) \leq \varepsilon$ ce qui en raison de l'arbitraire de ε prouve que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \delta_k(\lambda, \lambda_0) = 0. \quad (144)$$

L'hypothèse 2) du théorème 2 est donc satisfaite par la famille de probabilités μ_λ^3 , $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc $\gamma(\lambda)$ est C^∞ sur \mathbb{R} . On en déduit que $\tilde{\Psi}_A$ est C^∞ sur $[-A/2, A/2]$, d'où θ_A est C^∞ sur $[-A/4, A/4]$ et donc également $N(\lambda)$ en raison de (134). La preuve du théorème 3 est ainsi achevée.

V.2.

Dans [17] Simon et Taylor établissent en utilisant un argument de Halperin, que si $\eta = (1/2)(\delta_a + \delta_b)$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un choix de a et b tels que N ne peut être höldérienne d'ordre supérieur à ε sur le support $\{a, b\} + [-2, 2]$ de la probabilité dN [15] (il suffit que $|a - b| \rightarrow +\infty$). Le raisonnement utilisé plus haut montre alors facilement qu'il en est de même pour $\gamma(\lambda)$.

Notons enfin que si le support de η est compact et si η admet une densité dans $L^1(\mathbb{R})$ la fonction N ne peut être analytique sur \mathbb{R} puisqu'elle prend la valeur 1 (resp. 0) sur un intervalle ouvert I_1 (resp. I_0) du complémentaire de $[-2, 2] + \text{supp } \eta$ [15]. de même d'après la proposition A (appendice) γ n'est pas analytique sur \mathbb{R} .

APPENDICE

On a la proposition

PROPOSITION A. — Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que f soit analytique dans l'intervalle $[a, b]$ sa transformée de Hilbert

$$H(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > \varepsilon} \frac{f(t) dt}{x-t}$$

est alors analytique dans $]a, b[$.

Preuve de la proposition A. — Soit x_0 un point de $]a, b[$, en raison de l'analyticité de f il existe un intervalle $I_{x_0} = [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \subset]a, b[$ $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{R_{x_0}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \left(\sup_{x \in I_{x_0}} \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \right)^{1/k} < +\infty. \quad (1')$$

Pour $x \in \left[x_0 - \frac{\varepsilon_0}{4}, x_0 + \frac{\varepsilon_0}{4}\right] = J_{x_0}$ on a :

$$\begin{aligned} \pi H(f)(x) &= \int_0^{\varepsilon_0/4} \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} du \\ &\quad + \int_{x+\varepsilon_0/4}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{x-t} + \int_{-\infty}^{x-\varepsilon_0/4} \frac{f(t) dt}{x-t}. \end{aligned} \quad (2')$$

On en déduit que pour $x \in J_{x_0}$ $k \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \pi[H(f)]^{(k)}(x) &= \int_0^{\varepsilon_0/4} \frac{f^{(k)}(x+u) - f^{(k)}(x-u)}{u} du \\ &\quad + \sum_{j=0}^k (j-1)! \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-j} \left\{ f^{(k-j)}\left(x + \frac{\varepsilon_0}{4}\right) + f^{(k-j)}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{4}\right) \right\} \\ &\quad + (-1)^k k! \int_{x+\varepsilon_0/4}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{k+1}} + (-1)^k k! \int_{-\infty}^{x-\varepsilon_0/4} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (3')$$

Il en résulte et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\begin{aligned} \pi \sup_{x \in J_{x_0}} \frac{[H(f)]^{(k)}(x)}{k!} &\leq \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \sup_{z \in I_{x_0}} \frac{|f^{(k+1)}(z)|}{k!} \\ &\quad + 2 \sum_{j=0}^k \frac{1}{C_k^j} \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-j} \sup_{z \in I_{x_0}} \frac{|f^{(k-j)}(z)|}{k-j!} \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \times \frac{2}{\sqrt{2k+1}} \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-k-1/2}. \end{aligned} \quad (4')$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \left[\sup_{x \in J_{x_0}} \frac{[H(f)]^{(k)}(x)}{k!} \right]^{1/k} &\leq \frac{1}{R_{x_0}} + \frac{1}{R_{x_0}} \times \sup \left(1, \left[\frac{\varepsilon_0}{4R_{x_0}} \right]^{-1} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\rho_{x_0}} < +\infty. \end{aligned} \quad (5')$$

Soit u tel que $|u| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ d'après la formule de Taylor pour tout $n \geq 1$ on a

$$|H(f)(x_0 + u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^k}{k!} [H(f)]^{(k)}(x_0)| \leq \frac{|u|^n}{n!} \sup_{z \in J_{x_0}} |[H(f)]^{(n+1)}(z)|. \quad (6')$$

L'inégalité précédente et l'inégalité (5') montrent que pour

$$0 \leq |u| < \text{Inf}(\varepsilon_0/4, \rho_{x_0})$$

on a

$$H(f)(x_0 + u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} [H(f)]^{(k)}(x_0) \quad (7')$$

ce qui achève la preuve de la proposition A.

RÉFÉRENCES

- [1] P. BOUGEROL et J. LACROIX, Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger operators, Birkhäuser Progress in Probability and Statistics, vol. **8**, 1985.
- [2] M. CAMPANINO et A. KLEIN, A Supersymmetric Matrix and Differentiability of the Density of States in the one Dimensional Anderson Model, *Commun. Math. Physics*, n° **104**, 1986, p. 227-241.
- [3] R. CARMONA, A. KLEIN et F. MARTINELLI, Anderson Localisation for Bernouilli and Other Singular Potentials, *Comm. Math. Physics*, n° **108**, 1987, p. 66.
- [4] W. CRAIG et B. SIMON, Log Hölder Continuity of the Integrated Density of States for Stochastic Jacobi Matrices, *Comm. Math. Physics*, n° **90**, 1983, p. 207-218.
- [5] H. FURSTENBERG, Non Commuting Random Products, *T.A.M.S.*, n° **108**, 1963, p. 377-428.
- [6] H. FURSTENBERG et Y. KIEFER, Random Matrix Products and Measures on Projective Spaces, *Israël Journal of Math.*, vol. **46**, n° 1, 2, 1983, p. 12-32.
- [7] L. GARDING, Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie, *Bulletin S.M.F.*, tome **88**, 1960, p. 73-93.
- [8] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Z. Wahr.*, n° **69**, 1985, p. 187-242.
- [9] H. HENNION, Loi des grands nombres et perturbations pour les produits réductibles de matrices aléatoires indépendantes, *Z. Wahr.*, n° **67**, 1984, p. 265-278.
- [10] E. LE PAGE, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° **928**, 1982, p. 258-303.
- [11] E. LE PAGE, Répartition d'état d'un opérateur de Schrödinger aléatoire. Distribution empirique des valeurs propres d'une matrice de Jacobi, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° **1064**, 1983.
- [12] P. MARCH et A. S. SZNITMAN, Some Connections between Excursion Theory and the Discrete Schrödinger Equation with Random Potentials. *Probability theory and related fields*, vol. **75**, n° 1, 1987.

- [13] U. NERI, Singular Integrals, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 200, 1971.
- [14] O. CONNOR, Disordered Harmonic Chain, *Comm. Math. Physics*, n° 45, 1975, p. 63-77.
- [15] L. PASTUR, Spectral Properties of Disordered Systems in the One Body Approximation, *Comm. Math. Physics*, n° 75, 1980, p. 179-196.
- [16] D. RUELLE, Analyticity Properties of the Characteristic Exponents of Random Matrix Products, *Advances in Math.*, n° 32, 1980, p. 68-80.
- [17] B. SIMON et M. TAYLOR, Harmonic Analysis on $SL(2, \mathbb{R})$ and Smoothness of the Density of States in the One Dimensional Anderson Model, *Comm. Math. Physics*, n° 101, 1985, p. 1-19.

(Manuscrit reçu le 11 avril 1988.)