ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ELLEN SAADA

Mesures invariantes pour les systèmes à une infinité de particules linéaires à valeurs dans $[0, \infty[^s$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, nº 4 (1988), p. 427-437
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_4_427_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 4, 1988, p. 427-437. *Probabilités et Statistiques*

Mesures invariantes pour les systèmes à une infinité de particules linéaires à valeurs dans $[0, \infty[^S$

par

Ellen SAADA

C.N.R.S., U.A. n° 759, Calcul des Probabilités et Statistique,
Université de Rouen, B.P. n° 67, 76130 Mont-Saint-Aignan

RÉSUMÉ. — Pour les systèmes à une infinité de particules linéaires à valeurs dans $[0, \infty[^S$ dont les coefficients de transition sont invariants par translation, on connaissait l'ensemble $(\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e$ des probabilités invariantes et invariantes par translation extrémales. Nous montrons que sous des hypothèses supplémentaires sur les coefficients (dont la récurrence d'une probabilité de transition qui leur est associée), $\mathscr{I}_e = (\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e$. Nous appliquons ce résultat à des exemples, et enfin, nous obtenons $\mathscr{I}_e$ de façon simple pour le processus d'exclusion simple symétrique dans le cas irréductible et récurrent.

Mots clés : Systèmes à une infinité de particules linéaires à valeurs dans $[0, \infty[^S$, mesures invariantes, récurrence.

ABSTRACT. — For the linear infinite particle systems with values in $[0, \infty)^S$ whose transition rates are translation invariant, the set $(\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e$ of extremal invariant and translation invariant probability measures was known. We prove that under additional assumptions on the transition rates (including the recurrence of a transition probability associated to the process), $\mathscr{I}_e = (\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e$. We apply this result to some examples, and we finally obtain $\mathscr{I}_e$ in a simple way for the symmetric simple exclusion process in the irreducible and recurrent case.

Classification A.M.S. : 60 K 35.

1. INTRODUCTION

Dans [6], Liggett a introduit une classe particulière de systèmes à une infinité de particules en interaction : les systèmes linéaires à valeurs dans $[0, \infty[^S$. Il voulait ainsi unifier et étendre des résultats déjà obtenus pour des exemples, comme les processus de potlatch, lissage, etc. ([3], [7], [8]). Ces systèmes ont pour prégénérateur

$$\Omega f(\eta) = \sum_{x \in S} [E f(A_x \eta) - f(\eta)] + \sum_{u,\, v \in S} f_u(\eta)\, a(u, v)\, \eta(v)$$

où :

– Pour chaque site x de S, la famille de variables aléatoires positives $\{A_x(u, v),\ u, v \in S\}$ vérifie

$$(A_x \eta)(u) = \sum_{v \in S} A_x(u, v)\, \eta(v)$$

– Les $a(u, v)$, $u, v \in S$ sont des réels tels que $a(u, v) \geqq 0$ si $u \neq v$.

– La fonction f ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées, et $f_u(\eta)$ est sa dérivée partielle par rapport à $\eta(u)$.

L'hypothèse

$$\left\{\begin{array}{l} \sup\limits_{u \in S} \sum\limits_{v \in S} |a(u, v)| < +\infty \\ \sup\limits_{u \in S} \sum\limits_{x \in S} \sum\limits_{v : v \neq u} E A_x(u, v) < +\infty \\ E \sum\limits_{x \in S} |A_x(u, u) - 1| < +\infty \end{array}\right.$$

permet de démontrer l'existence d'un processus de Markov de semi-groupe $S(t)$ et de prégénérateur Ω construit sur l'ensemble $X = \{\eta \in [0, \infty[^S;\ \sum_{x \in S} \eta(x)\, \alpha(x) < \infty\}$, où α est une fonction strictement positive définie sur S telle que $\sum_{x \in S} \alpha(x) < \infty$ ([6], chap. IX, [7]).

Pour étudier l'ensemble $\mathscr{I}$ des probabilités sur X invariantes pour ces systèmes, on suppose que $S = \mathbf{Z}^d$, que les coefficients $A_x(.,.)$ et $a(.,.)$ sont invariants par translation [c'est-à-dire $a(x, y) = a(0, y - x)$, et les lois conjointes de $\{A_x(u + x, v + x),\ u, v \in S\}$ sont indépendantes de x], et que la masse du système est conservée en moyenne, soit

$$\sum_{y \in S} a(0, y) + \sum_{u \in S} \Big\{ \sum_{y \in S} E A_u(0, y) - 1 \Big\} = 0 \tag{1}$$

Quand la distribution initiale est la masse de Dirac δ_β sur la configuration constante $\eta \equiv \beta$ (pour $\beta \geqq 0$), la mesure invariante limite $\nu_\beta = \lim\limits_{t \to \infty} \delta_\beta S(t)$ vérifie soit $\int \eta(x)\, d\nu_\beta = \beta$ pour tous x et β, soit $\nu_\beta = \delta_0$ pour tout β. Autrement dit, il y a survie ou mort du système [6].

D'autre part, si $\gamma(.,.)$ est définie sur $S \times S$ par

$$\begin{cases} \gamma(x, y) = a(x, y) + E \sum_{u \in S} A_u(x, y) & \text{pour} \quad x \neq y \\ \gamma(x, x) = a(x, x) + E \sum_{u \in S} [A_u(x, x) - 1] \end{cases}$$

les propriétés des fonctions $A.(.,.)$ et $a(.,.)$ ainsi que la relation (1) assurent que $\gamma(x, y) = \gamma(0, y-x)$, $\gamma(x, y) \geqq 0$ si $x \neq y$, $\gamma(x,x) \leqq 0$ pour tous $x, y \in S$, et que $\sum_{y \in S} \gamma(0, y) = 0$. Par conséquent, $\gamma(.,.)$ est la matrice génératrice d'un processus de Markov de saut $\gamma_t(.,.)$ qui vérifie pour tout $t \geqq 0$:

(2) $$E^{\eta} \eta_t(x) = \sum_{y \in S} \gamma_t(x, y) \eta(y) \quad \text{pour tous } x \in S, \ \eta \in X.$$

Enfin par la linéarité du processus, il existe une famille de matrices aléatoires à coefficients positifs $\{A_t(x, y), x, y \in S, t \geqq 0\}$ telles que

(3) $$\eta_t(x) = \sum_{y \in S} A_t(x, y) \eta_0(y) \quad \text{pour tous } x \in S, \ \eta_0 \in X,$$

où $\{A_t(x, y), x, y \in S, t \geqq 0\}$ et la configuration initiale η_0 sont indépendantes. [On notera $\eta_t(x) = (A_t \eta_0)(x)$.]

(4) $$EA_t(x, y) = \gamma_t(x, y) \quad \text{pour tous } x, y \in S.$$

(Ces résultats sont détaillés dans [6], chap. IX, sections 1, 2.)

On connaissait alors le

THÉORÈME ([6], chap. IX, section 2). — *Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des probabilités sur* X *invariantes par translation, et* $(\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e$ *l'ensemble des éléments extrémaux de* $\mathscr{I} \cap \mathscr{S}$.

Si on suppose que le système survit, et que

(5) *Pour tous* $y, z \in S$, il existe $x \in S$ *tel que*

$$P\{A_t(x, y) > 0, A_t(x, z) > 0\} > 0.$$

Alors $(\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e = \{\nu_\beta, \beta \geqq 0\}$.

Nous prouvons ici que moyennant une condition supplémentaire, $\mathscr{I}_e = (\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e$. Soit $q(.,.)$ définie sur $S \times S$ par

$$\begin{cases} q(x, y) = -\dfrac{\gamma(x, y)}{\gamma(x, x)} & \text{pour} \quad x \neq y \\ q(x, x) = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie : En effet, $\gamma(x, x) = 0$ implique (car $\sum_{y \in S} \gamma(x, y) = 0$) que $\gamma(x, y) \equiv 0$ pour $y \neq x$ [puisque $\gamma(x, y) \geqq 0$ pour $y \neq x$], c'est-à-dire :

$$\text{Pour tous } y \neq x \begin{cases} a(x, y) = 0 \\ \text{pour tout } u \in S,\ A_u(x, y) = 0 \end{cases}$$

Il est facile de voir que ceci contredit l'hypothèse (5). De plus, $q(x, y) \geqq 0$ pour tous $x, y \in S$, et comme pour tout $x \in S$, $\sum_{y \in S} \gamma(x, y) = 0$, on a $\sum_{y \in S} q(x, y) = 1$. Cette fonction est donc une probabilité de transition sur $S \times S$.

Alors :

THÉORÈME 1. — *Supposons les hypothèses du théorème précédent satisfaites, ainsi que*

(6) *La chaîne de Markov de probabilité de transition $q(.,.)$ est récurrente.*

Alors $\mathscr{I}_e = (\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e = \{ \nu_\beta, \beta \geqq 0 \}$.

La démonstration généralise une méthode employée par E. D. Andjel pour le processus de « zero range », qui a une famille à un paramètre de mesures invariantes [1]. Nous appliquons ensuite le résultat aux processus étudiés par Liggett et Spitzer dans [7]. Enfin, nous adaptons la démonstration au processus d'exclusion simple symétrique, pour obtenir de façon simple $\mathscr{I}_e$ dans le cas récurrent.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Elle consiste en une suite de propositions dans lesquelles l'outil principal est l'harmonicité des fonctions pour la probabilité $q(.,.)$.

LEMME 2. — *Si ν est un élément de $\mathscr{I}$ de premier moment fini, la fonction $h(u) = \int \eta(u)\, d\nu$ satisfait $h(u) = \sum_{v \in S} \gamma_t(u, v)\, h(v)$ pour tout $t \geqq 0$.*

Démonstration. — Le semi-groupe $S(t)$ du processus est défini par $S(t) f(\eta) = E^\eta f(\eta_t)$ pour tout $t \geqq 0$, toute configuration η de X et toute fonction f de l'ensemble $\mathscr{L} = \Big\{ f$ continue sur X, ayant des dérivées partielles continues f_x par rapport aux $\eta(x)$, $x \in S$, et telles que $L(f) = \sup_{x \in S} \frac{\|f_x\|}{\alpha(x)} < +\infty$, où $\|f_x\|$ est la norme infinie de $f_x \Big\}$.

Si $f \in \mathscr{L}$, $S(t) f \in \mathscr{L}$. (Les propriétés de $S(t)$ sont résumées dans [6], théorème IX.1.14.) Nous avons donc pour tout $t \geqq 0$,

$$h(u) = \int \eta(u)\, d\nu = \int \eta(u)\, d(\nu S(t))$$

car $\nu \in \mathscr{I}$

$$= \int E^{\eta}(\eta_t(u))\, d\nu = \sum_{v \in S} \gamma_t(u, v) \int \eta(v)\, d\nu$$

par la relation (2) et l'indépendance de $\{A_t(u, v),\ u, v \in S,\ t \geqq 0\}$ et $\{\eta(v),\ v \in S\}$.

$$= \sum_{v \in S} \gamma_t(u, v)\, h(v). \quad \blacksquare$$

Soit μ un élément quelconque de $\mathscr{I}_e$. Nous allons comparer, au sens de l'ordre stochastique, μ à une mesure ν_β, afin de prouver que $\mathscr{I}_e$ est réduit aux ν_β. Par définition, $\mu \leqq \nu_\beta$ s'il existe une probabilité $\bar{\nu}$ sur $\bar{X} = X \times X$ de marginales μ et ν_β, telle que $\bar{\nu}\{(\eta, \xi) : \eta \leqq \xi\} = 1$ ([6], chap. II, section 2). Il est donc naturel d'introduire le couplage suivant : (η_t, ξ_t) est le processus de Markov défini sur $\bar{X}$ par $(\eta_t, \xi_t) = (A_t \eta, A_t \xi)$, autrement dit η_t et ξ_t sont deux réalisations du processus obtenues simultanément à partir de deux configurations initiales η et ξ de X, à l'aide de la même matrice A_t. Nous notons $\bar{S}(t)$ le semi-groupe, et $\bar{\mathscr{I}}$ l'ensemble des mesures invariantes de ce processus (pour plus de détails, *voir* [7], [6], chap. IX).

PROPOSITION 3. — *Si $\bar{\mu}$ est un élément de $\bar{\mathscr{I}}$ de premier moment fini par rapport à la deuxième composante* $\left[\textit{soit } \int \xi(x)\, d\bar{\mu} < +\infty \textit{ pour tout } x \textit{ de } S\right]$, $\bar{\mu}\{(\eta, \xi) : \eta \geqq \xi \text{ ou } \eta \leqq \xi\} = 1.$

Démonstration. — Soient u un site fixé de S, et g la fonction définie sur S par

$$g(u) = \int [\xi(u) - \eta(u)]^+\, d\bar{\mu}(\eta, \xi)$$

Alors, par l'invariance de $\bar{\mu}$, pour $t \geqq 0$,

$$g(u) = \int [\xi(u) - \eta(u)]^+ \, d(\bar{\mu}\bar{S}(t))(\eta, \xi)$$

$$= \int E^{(\eta, \xi)} [\xi_t(u) - \eta_t(u)]^+ \, d\bar{\mu}(\eta, \xi)$$

$$= \int E^{(\eta, \xi)} \left[\sum_{v \in S} A_t(u, v)(\xi(v) - \eta(v)) \right]^+ d\bar{\mu}(\eta, \xi)$$

$$(7) \qquad g(u) \leqq \int \sum_{v \in S} E^{(\eta, \xi)} A_t(u, v) [\xi(v) - \eta(v)]^+ \, d\bar{\mu}(\eta, \xi)$$

car $A_t(u, v) \geqq 0$ pour tous u, $v \in S$

$$\leqq \sum_{v \in S} \gamma_t(u, v) \int [\xi(v) - \eta(v)]^+ \, d\bar{\mu}(\eta, \xi)$$

par l'indépendance de $\{A_t(u, v), u, v \in S, t \geqq 0\}$ et de $\{\eta(v), \xi(v), v \in S\}$.

$$(8) \qquad g(u) \leqq \sum_{v \in S} \gamma_t(u, v) g(v)$$

La fonction g est donc sous-harmonique positive pour la chaîne de Markov discrète (à t fixé) $\gamma_t(.,.)$. Mais d'une part, comme les coefficients $\gamma(.,.)$ sont tous finis, la récurrence de $q(.,.)$ implique celle de $\gamma_t(.,.)$; d'autre part, $g(u)$ est majoré par la fonction $\int \xi(u) \, d\bar{\mu}$ qui est harmonique pour $\gamma_t(.,.)$ par le lemme 2. Par conséquent les inégalités (7) et (8) sont en fait des égalités (ce résultat sur les fonctions sous-harmoniques des chaînes de Markov récurrentes est établi dans [4], propositions 6.3 et 6.4).

Enfin, soient v et w deux sites quelconques. Par l'hypothèses (5), il existe $u \in S$ tel que $P\{A_t(u, v) > 0, A_t(u, w) > 0\} > 0$. En appliquant l'égalité (7) au site u, nous obtenons $\bar{\mu}\{\xi(v) - \eta(v) > 0; \xi(w) - \eta(w) < 0\} = 0$, d'où le résultat. ■

PROPOSITION 4. — *Si* μ *est un élément de* $\mathscr{I}_e$, *il existe un réel* $\beta_0 \geqq 0$ *tel que* $\mu = \nu_{\beta_0}$.

Démonstration. — Pour tout $\beta \geqq 0$, il existe une mesure $\bar{\mu}_\beta$ dans $\bar{\mathscr{I}}$ de marginales μ et ν_β ([1], section 4). Par la proposition 3, $\bar{\mu}_\beta\{(\eta, \xi) : \eta \leqq \xi$ ou $\eta \geqq \xi\} = 1$, mais en réalité, sauf peut-être pour une valeur de β, $\bar{\mu}_\beta\{\eta \leqq \xi\}$ ou $\lambda_\beta = \bar{\mu}_\beta\{\eta \geqq \xi\}$ vaut 1. En effet, supposons que $0 < \lambda_\beta < 1$. Alors $\bar{\mu}_\beta = \lambda_\beta \bar{\mu}_\beta^1 + (1 - \lambda_\beta) \bar{\mu}_\beta^2$, où les mesures $\bar{\mu}_\beta^1$ et $\bar{\mu}_\beta^2$ sont dans $\bar{\mathscr{I}}$, vérifient $\bar{\mu}_\beta^1\{\eta \geqq \xi\} = \bar{\mu}_\beta^2\{\eta \leqq \xi\} = 1$. Elles ont pour première loi marginale μ, puisque μ est invariante extrémale. Leurs secondes lois marginales μ_β^1 et μ_β^2 sont absolument continues par rapport à ν_β, et telles que $\mu_\beta^1 \leqq \mu$, $\mu_\beta^2 \geqq \mu$.

De plus, comme ν_β est invariante par translation et $\int \xi(x)\,d\nu_\beta = \beta$, le théorème ergodique VI.3.5 de [5] implique que lorsque n tend vers $+\infty$, pour tout $z \in S$, $A(n, z) = \frac{1}{n^d} \sum_{\{y \in S : 0 \leqq y_i \leqq n \text{ pour } 1 \leqq i \leqq d\}} \xi(y+z)$ converge ν_β-p.s. vers une fonction $f_z(\xi)$. En fait la convergence a lieu dans $\mathbb{L}^1(\nu_\beta)$ quitte à remplacer $\xi(y+z)$ par $\xi(y+z) \wedge N$ (puis à faire tendre N vers $+\infty$), et comme la limite dans $\mathbb{L}^1(\nu_\beta)$ est indépendante de z (puisque ν_β est invariante par translation), il existe une fonction $f \in \mathbb{L}^1(\nu_\beta)$ telle que $A(n, z)$ converge vers $f(\xi)$ ν_β-p.s., et pour tout $z \in S$.

Il nous reste à montrer, par l'absurde, que $f\{\xi) = \beta$ ν_β-p.s. En appliquant aux mesures $\mu_1 = \nu_\beta(\,.\,/f(\xi) < \beta)$ et $\mu_2 = \nu_\beta(\,.\,/f(\xi) \geqq \beta)$ le lemme IX.2.9 de [6], nous obtenons que $\mu_1 S(t)$ converge faiblement vers ν_β, ce qui contredit le lemme IX.2.8 de [6].

La convergence vers β a lieu ν_β-p.s., et donc μ-p.s. Ceci ne peut se produire que pour une seule valeur β_0 : Pour tout β distinct de β_0, $\mu \geqq \nu_\beta$ ou $\mu \leqq \nu_\beta$. Nous ne pouvons pas avoir $\mu \geqq \nu_\beta$ pour tout β, car alors μ serait de moyenne infinie, ce qui est impossible (l'argument utilisé à la fin de la démonstration du théorème IX.2.19 de [6] permet de le voir). Alors $\mu = \nu_{\beta_0}$ (pour les détails de cette démonstration, *voir* [1], sections 4, 5, 6). ■

Remarque. — Si le processus vérifie $\lim_{x \to \infty} \int \xi(x)\,\xi(0)\,d\nu_\beta = \beta^2$, la démonstration de la proposition 4 est plus rapide : En effet, par cette convergence, l'invariance par translation de ν_β et $\int \xi(x)\,d\nu_\beta = \beta$, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{|y \in S : 0 \leqq y \leqq x|} \sum_{y : 0 \leqq y \leqq x} \xi(y)$ converge vers β ν_β-p.s. et donc μ-p.s.

D'autre part, l'invariance par translation des coefficients permettait de démontrer que $(\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e = \{\nu_\beta, \beta \geqq 0\}$. Pour la démonstration du théorème 1, nous avons seulement utilisé que $(\mathscr{I} \cap \mathscr{S})_e$ était une famille à un paramètre de mesures invariantes.

3. EXEMPLES

A. Pour chacun des six processus étudiés par Liggett et Spitzer dans [7] et [8], $a(u, v) = 0$, et les coefficients $A_x(u, v)$ s'expriment en fonction d'une probabilité de transition invariante par translation $p(x, y)$, et d'un réel $0 < p < 1$. On constate tout d'abord que le système survit dans chaque cas, en appliquant le théorème IX.3.12 de [6]. Il reste ensuite à vérifier les hypothèses du théorème 1. Nous supposerons pour cela que $p(x, y)$ est récurrente. Comme la matrice $q(x, y)$ est égale soit à $p(x, y)$, soit à sa transposée dans ces exemples, l'invariance par translation de $p(x, y)$ implique que $q(x, y)$ est également récurrente.

(1) *Le processus d'agglomération* (*coalescing process*)

$$\begin{cases} \mathrm{A}_x(x, x)=p; \qquad \mathrm{A}_x(y, y)=1 \quad \text{si } y\neq x \\ \mathrm{A}_x(y, x)=1-p \quad \text{avec probabilité } p(x, y) \text{ si } y\neq x \\ \mathrm{A}_x(u, v)=0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici,

$$q(x, y)=p(y, x),$$

$$\int \eta^2(0)\, d\nu_\beta=\frac{\beta^2}{p} \qquad \text{et} \qquad \int \eta(0)\,\eta(x)\, d\nu_\beta=\beta^2 \quad \text{pour } x\neq 0.$$

(Tous les calculs de seconds moments sont effectués dans [7].)

(2) *Le processus de potlatch*

$$\begin{cases} \mathrm{A}_x(y, y)=1 \quad \text{si } y\neq x; \qquad \mathrm{A}_x(y, x)=p(x, y) \\ \mathrm{A}_x(u, v)=0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici,

$$q(x, y)=\frac{p(y, x)}{1-p(x, x)}, \qquad \int \eta^2(0)\, d\nu_\beta=\frac{2\beta^2}{\displaystyle\int_\Gamma \psi(\gamma)\, d\gamma}$$

et

$$\int \eta(0)\,\eta(x)\, d\nu_\beta=\beta^2 \left\{ 1-\frac{\displaystyle\int_\Gamma \psi(\gamma)\exp[-i\langle x-y, \gamma\rangle]\, d\gamma}{\displaystyle\int_\Gamma \psi(\gamma)\, d\gamma} \right\} \qquad \text{pour} \quad x\neq 0$$

où $\varphi(\gamma)=\sum_{u\in \mathrm{S}} p(0, u)\exp[i\langle u, \gamma\rangle]$, $\gamma\in\Gamma=]-\pi, \pi]^d$, $d\gamma$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore, et $\psi(\gamma)=\dfrac{1-|\varphi(\gamma)|^2}{1-\mathrm{Re}\,\varphi(\gamma)}$. (Ces notations sont identiques dans les exemples suivants.)

(3) *Le processus de lissage* (*smoothing process*)

$$\begin{cases} \mathrm{A}_x(y, y)=1 \quad \text{si } y\neq x; \qquad \mathrm{A}_x(x, y)=p(x, y) \\ \mathrm{A}_x(u, v)=0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, $q(x, y) = \dfrac{p(x, y)}{1 - p(x, x)}$ et $\nu_\beta = \delta_\beta$.

(4) *Le modèle du votant généralisé*

$$\begin{cases} A_x(x, x) = p; \quad A_x(y, y) = 1 \quad \text{si } y \neq x \\ A_x(x, y) = 1 - p \quad \text{avec probabilité } p(x, y) \text{ si } y \neq x \\ A_x(u, v) = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, $q(x, y) = p(x, y)$ et $\nu_\beta = \delta_\beta$.

(5) *Le processus de marches aléatoires couplées*

$$\begin{cases} A_x(y, y) = 1 \quad \text{si } y \neq x; \quad EA_x(y, x) = p(x, y) \\ A_x(u, v) = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici,

$$q(x, y) = \frac{p(y, x)}{1 - p(x, x)}, \qquad \int \eta^2(0)\, d\nu_\beta = \beta + \frac{2\beta^2}{\displaystyle\int_\Gamma \psi(\gamma)\, d\gamma}$$

et

$$\int \eta(0)\, \eta(x)\, d\nu_\beta = \beta^2 \left\{ 1 - \frac{\displaystyle\int_\Gamma \psi(\gamma) \exp[-i\langle x - y, \gamma\rangle]\, d\gamma}{\displaystyle\int_\Gamma \psi(\gamma)\, d\gamma} \right\} \quad \text{pour} \quad x \neq 0.$$

(6) *Le processus de marches aléatoires fortement couplées*

$$\begin{cases} A_x(x, x) = p; \quad A_x(y, y) = 1 \quad \text{si } y \neq x \\ EA_x(y, x) = (1 - p)\, p(x, y) \quad \text{si} \quad y \neq x \\ A_x(u, v) = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici,

$$q(x, y) = p(y, x),$$

$$\int \eta^2(0)\, d\nu_\beta = \beta + \frac{\beta^2}{p} \qquad \text{et} \qquad \int \eta(0)\, \eta(x)\, d\nu_\beta = \beta^2 \quad \text{si } x \neq 0.$$

B. Le processus d'exclusion simple symétrique

C'est le processus de Feller à valeurs dans $\{0, 1\}^S$ (où S est l'ensemble dénombrable des sites) de prégénérateur

$$Lf(\eta) = \sum_{x, y \in S} p(x, y)\, \eta(x)\, (1 - \eta(y))\, [f(\eta_{xy}) - f(\eta)]$$

où η_{xy} s'obtient à partir de η en permutant $\eta(x)$ et $\eta(y)$, $p(x, y)$ est une probabilité de transition sur S, et f est une fonction dépendant d'un nombre fini de coordonnées. Pour $\alpha \in [0, 1]$, soit μ_α la mesure produit sur $\{0, 1\}^S$ de marginales $\mu_\alpha\{\eta(x)=1\}=\alpha$. Elle appartient à $\mathscr{I}$ si $p(x, y)$ est symétrique ([6], théorème VIII.2.1). Un raisonnement analogue à celui du théorème 1 prouve que $\mathscr{I}_e=\{\mu_\alpha, \alpha\in[0, 1]\}$ lorsque $p(x, y)$ est irréductible, récurrente et symétrique.

Démonstration. — Pour $\nu\in\mathscr{I}$, $\int L\eta(x)\,d\nu=0$ s'écrit

$$\int \eta(x)\,d\nu=\sum_{y\in S} p(x, y)\int \eta(y)\,d\nu \quad \text{car } p(x, y)=p(y, x)$$

et

$$L\eta(x)=-\sum_{y\in S} p(x, y)\,\eta(x)(1-\eta(y)) + \sum_{y\in S} p(y, x)\,\eta(y)(1-\eta(x))=\sum_{y\in S} \eta(y)\,p(x, y)-\eta(x)$$

Si $\bar\nu$ est une mesure invariante pour le processus couplé (dont les deux composantes η et ξ évoluent ensemble autant que possible, tout en respectant chacune le principe d'exclusion simple) de prégénérateur $\bar L$, $\int \bar L[(\xi(x)-\eta(x))^+]\,d\bar\nu=0$ implique l'inégalité

$$\int [\xi(x)-\eta(x)]^+\,d\bar\nu=\bar\nu\{\xi(x)>\eta(x)\}\leqq \sum_{y\in S} p(x, y)\,\bar\nu\{\xi(y)>\eta(y)\}$$

qui est une égalité puisque $p(x, y)$ est récurrente. Par conséquent

$$\bar\mu\{\eta(y)<\xi(y);\ \xi(x)<\eta(x)\}=\bar\nu\{\xi(x)>\eta(x);\ \eta(y)>\xi(y)\}=0,$$

d'où $\bar\nu\{\eta\geqq\xi \text{ ou } \eta\leqq\xi\}=1$. [On passe des couples (x, y) tels que $p(x, y)>0$ à un couple quelconque grâce à l'irréductibilité de $p(x, y)$, qui équivaut ici à l'hypothèse (5) du théorème 1 à cause de la symétrie de $p(x, y)$.] ■

REMERCIEMENTS

Je remercie d'une part E. D. Andjel, qui m'a indiqué ce sujet, pour ses commentaires fort utiles au cours de mon travail, et d'autre part le referee pour ses judicieuses remarques.

RÉFÉRENCES

[1] E. D. ANDJEL, Invariant Measures for the Zero Range Process, *Ann. Probab.*, vol. **10**, 1982, p. 525-547.

[2] E. D. ANDJEL, Invariant Measures and Long Time Behavior of the Smoothing Process, *Ann. Probab.*, vol. **13**, 1985, p. 62-71.

[3] R. HOLLEY et T. M. LIGGETT, Generalized Potlatch and Smoothing Processes, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, vol. **55**, 1981, p. 165-195.

[4] J. G. KEMENY, J. L. SNELL et A. W. KNAPP, *Denumerable Markov Chains*, 2nd edition, Springer Verlag, New York, 1976.

[5] U. KRENGEL, *Ergodic Theorems, de Gruyter Studies in Mathematics*, vol. **6**, 1985.

[6] T. M. LIGGETT, *Interacting Particle Systems*, Springer Verlag, New York, 1985.

[7] T. M. LIGGETT et F. SPITZER, Ergodic Theorems for Coupled Random Walks and Other Systems With Locally Interacting Components, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, vol. **56**, 1981, p. 443-468.

[8] F. SPITZER, Infinite Systems With Locally Interacting Components, *Ann. Probab.*, vol. **9**, 1981, p. 349-364.

(*Manuscrit reçu le* 13 *novembre* 1986)
(*corrigé le* 28 *avril* 1988.)