Annales de l'I. H. P., section B

Jean Bertoin

Une application du calcul du nombre de montées et de descentes aux fonctions de martingales locales continues

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, n° 2 (1988), p. 201-207

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_2_201_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 2, 1988, p. 201-207. *Probabilités et Statistiques*

Une application du calcul du nombre de montées et de descentes aux fonctions de martingales locales continues

par

Jean BERTOIN

19, avenue de Choisy, 75013 Paris, France
ou Laboratoire de Probabilités,
Tour 56, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on obtient une condition nécessaire portant sur f pour que $f(M_t)$ soit une semi-martingale, où M_t est une martingale locale, réelle et continue. On obtient en corollaires un théorème de Cinlar, Jacod, Protter et Sharpe, et une application aux processus de Bessel.

ABSTRACT. — In this work, we obtain a necessary condition for $f(M_t)$ to be a semimartingale in the terms of the function f, when M_t is a real continuous local martingale. As corollaries, we obtain a Theorem of Cinlar, Jacod, Protter and Sharpe, and an application to Bessel processes.

Key words : Up and down crossing numbers, functions of local martingales.

I. INTRODUCTION

Il a été prouvé dans [1] que, si f est une fonction de classe C^1 et M une martingale locale continue, $f(M)$ est un processus de Dirichlet local, c'est-à-dire somme d'une martingale locale continue et d'un processus continu localement à variation quadratique nulle. Une question naturelle est alors: quelles sont des conditions nécessaires pour que $f(M)$ soit en fait une semi-martingale? Des questions analogues ont été étudiées par Fukushima (théorème 4 de [3]), par Cinlar, Jacod, Protter et Sharpe [2] qui prouvent que si X est un processus de Markov, f est une fonction de semi-martingale pour X si et seulement si f est localement différence de deux fonctions excessives, par Wang [5], et par Yor [6].

La condition nécessaire (théorème 1) que nous donnons, étend le résultat de Cinlar, Jacod, Protter, Sharpe sur le mouvement brownien réel (théorème 5.6 de [2]), et donne une condition nécessaire pour que $f(\mathrm{BES}_\nu(d))$ soit une semi-martingale, où $\mathrm{BES}_\nu(d)$ est un processus de Bessel de dimension $d \geqq 2$ et de mesure initiale ν quelconque, cette condition étant également suffisante dès que ν ne charge pas zéro.

Dans cet article, $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathrm{P})$ désignera un espace probabilisé filtré.

II. RÉSULTAT PRINCIPAL

Dans ce paragraphe, on établit le:

THÉORÈME 1. — *Soit* M *une martingale locale issue de zéro, réelle et continue, et* $b = \| \operatorname{Sup}_t \mathrm{M}_t^+ \|_\infty$; $a = -\| \operatorname{Sup}_t \mathrm{M}_t^- \|_\infty$ *(éventuellement infinis). Si* f *est une fonction réelle telle que* $f(\mathrm{M})$ *est une semi-martingale, alors, la restriction de* f'' *(au sens de Schartz) à* $]a, b[$ *est une mesure de Radon.*

Remarque. — Si $\mathrm{P}[\exists\, t : \mathrm{M}_t = a \text{ ou } \mathrm{M}_t = b] = 0$, cette condition est également suffisante (*cf.* Wang [5]).

Le théorème se déduit du:

LEMME 2. — *Soit* N *une martingale réelle, continue, bornée et issue de zéro, avec* $\alpha = -\| \mathrm{N}_1^- \|_\infty$; $\beta = \| \mathrm{N}_1^+ \|_\infty$. *Si* f *est une fonction telle que* $f(\mathrm{N}) = \mathrm{N}' + \mathrm{V}$; N' *martingale et* V *processus à variations intégrables, alors, la restriction de* f'' *à* $]\alpha, \beta[$ *est une mesure de Radon.*

Preuve du lemme 2. — Remarquons que si $f(\mathrm{N}) = \mathrm{N}' + \mathrm{V}$, f est nécessairement continue sur $]\alpha, \beta[$ (calcul immédiat du nombre de montées et de descentes autour d'un éventuel point de discontinuité).

Pour tout ε positif, soit $\sigma_\varepsilon = \inf\{t \geqq 0 : \mathrm{N}_t = \alpha + \varepsilon \text{ ou } \mathrm{N}_t = \beta - \varepsilon\} \wedge 1$. Si $\varepsilon_0 > 0$ est fixé, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, si σ désigne $\sigma_{\varepsilon_{0/2}}$ et L_t^a une version bicontinue des temps locaux de N: $\mathrm{E}(\mathrm{L}_\sigma^a) > \varepsilon_1$ pour tout a dans $]\alpha + \varepsilon_0, \beta - \varepsilon_0[$.

Soit B un mouvement brownien indépendant de N, et notons:

$$\tilde{N}_t = N_t \quad \text{si} \quad t < \sigma,$$

$$\tilde{N}_t = N_\sigma + B_t - B_\sigma \quad \text{si} \quad t \geqq \sigma$$

qui est alors une martingale continue par rapport à sa propre filtration. Soit enfin la suite de temps d'arrêt T_i^n définie par:

$$T_0^n = 0 \qquad \text{et} \qquad T_{i+1}^n = \inf\{t > T_i^n : |\tilde{N}_t - \tilde{N}_{T_i^n}| = 2^{-n}\}.$$

Par hypothèse:

$$\{\sum_i |E[f(N_{T_{i+1}^n \wedge \sigma}) - f(N_{T_i^n \wedge \sigma}) \mid \mathscr{F}_{T_i^n \wedge \sigma}]| : n \in \mathbb{N}\}$$

est borné dans $L^1(P)$, et donc:

$$\{\sum_i \sum_{k \in \mathbb{Z}} |E[(f(N_{T_{i+1}^n \wedge \sigma}) - f(k.2^{-n}))\, \mathbf{1}_{T_i^n < \sigma} \mathbf{1}_{N_{T_i^n} = k.2^{-n}}]| : n \in \mathbb{N}\}$$

est également borné dans $\mathbb{R}$.

Comme f est continue donc bornée sur tout intervalle fermé de $]\alpha, \beta[$, dès que n est assez grand:

$$E[\sum_i |f(\tilde{N}_{T_{i+1}^n}) - f(\tilde{N}_{T_{i+1}^n \wedge \sigma})|\, \mathbf{1}_{T_i^n < \sigma}]$$

est majoré par:

$2 \sup_{t \in I} |f(t)|$, où $I = \left[\alpha + \dfrac{\varepsilon_0}{4}, \beta - \dfrac{\varepsilon_0}{4}\right]$, de sorte que:

$$\{\sum_i \sum_{k \in Z} |E[(f(\tilde{N}_{T_{i+1}^n}) - f(k.2^{-n}))\, \mathbf{1}_{T_i^n < \sigma} \mathbf{1}_{N_{T_i^n} = k.2^{-n}}]| : n \in \mathbb{N}\}$$

est encore borné, et donc:

$$\begin{aligned}\{\sum_k \sum_i |E[\{f((k+1)\,2^{-n}) - f(k.2^{-n})\}& \\ \times \mathbf{1}_{T_i^n < \sigma} \mathbf{1}_{N_{T_i^n} = k.2^{-n}} \mathbf{1}_{\tilde{N}_{T_{i+1}^n} = (k+1)\,2^{-n}}]& \\ + E[\{f(k-1)\,2^{-n}) - f(k.2^{-n})\}& \\ \times \mathbf{1}_{T_i^n < \sigma} \mathbf{1}_{N_{T_i^n} = k.2^{-n}} \mathbf{1}_{\tilde{N}_{T_{i+1}^n} = (k-1)\,2^{-n}}]| &: n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

est borné.

Si τ désigne le premier temps après σ où $\tilde{N}$ atteint le réseau $(l.2^{-n} : l \in Z)$, et m_k^n (respectivement d_k^n) désigne le nombre de montées de $\tilde{N}$ de $k.2^{-n}$ à $(k+1)\,2^{-n}$ [respectivement de descentes de $k.2^{-n}$ à $(k-1)\,2^{-n}$] entre les instants 0 et τ, on a donc:

$$\{\sum_k |\{f((k+1)2^{-n})-f(k.2^{-n})\}\,E(m_k^n)$$

$$+\{f((k-1)2^{-n})-f(k.2^{-n})\}\,E(d_k^n)|: n\in\mathbb{N}\} \quad (1)$$

est borné dans $\mathbb{R}$.

De la formule de Tanaka, on déduit aisément le:

LEMME 3. — $E(m_k^n)=E(d_k^n)=\frac{1}{2}.2^n.E(L_\tau^{k.2^{-n}}(\tilde{N}))$.

Preuve du lemme 3. — Soit

$$U_0=\inf\{t>0:\tilde{N}=k.2^{-n}\}\wedge\tau$$

$$V_0=\inf\{t>U:\tilde{N}_t=(k+1)2^{-n}\}\wedge\tau,$$

et la donnée itérative de U_p et V_p par:

$$U_{p+1}=\inf\{t>V_p:\tilde{N}_t=k.2^{-n}\}\wedge\tau$$

$$V_{p+1}=\inf\{t>U_{p+1}:\tilde{N}_t=(k+1).2^{-n}\}\wedge\tau$$

Par la formule de Tanaka:

$$(\tilde{N}_{V_p}-k.2^{-n})^+-(\tilde{N}_{U_p}-k.2^{-n})^+=\int_{U_p}^{V_p}\mathbf{1}_{\tilde{N}>k.2^{-n}}\,d\tilde{N}_s+\frac{1}{2}[L_{V_p}^{k\,2^{-n}}-L_{U_p}^{k\,2^{-n}}]$$

Cette quantité vaut en outre [puisque $\tilde{N}$ prend ses valeurs dans le réseau $(l.2^{-n};\ l\in Z)$] 2^{-n} si $U_p<\tau$ et $\tilde{N}_{V_p}=(k+1)2^{-n}$, et 0 sinon. En remarquant que $L_{U_{p+1}}^{k.2^{-n}}=L_{V_p}^{k.2^{-n}}$, on a:

$$2^{-n}.m_k^n=\sum_{p=0}^{\infty}[(\tilde{N}_{V_p}-k.2^{-n})^+-(\tilde{N}_{U_p}-k.2^{-n})^+]=M_\tau+\frac{1}{2}.L_\tau^{k.2^{-n}}(\tilde{N}),$$

où M est une martingale nulle en zéro. On a donc:

$$E(m_k^n)=\frac{1}{2}.2^n E(L_\tau^{k.2^{-n}}(\tilde{N}))$$

pour tout k dans Z. En changeant $\tilde{N}$ en $-\tilde{N}$, on obtient

$$E(d_k^n)=\frac{1}{2}2^n E(L_\tau^{k.2^{-n}}(\tilde{N})).$$

On a donc, si $k.2^{-n}\in[\alpha+\varepsilon_0,\beta-\varepsilon_0]$: $\mathbb{E}(m_k^n)=\mathbb{E}(d_k^n)\geqq 2^{n-1}.\varepsilon_1$.

NOTATIONS. — Si g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note, pour tout x dans $[k.2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$:

$$g_n(x) = g(k.2^{-n})$$

et

$$\Delta_n g(x) = 2^{2n}[g((k+1)2^{-n}) + g((k-1)2^{-n}) - 2.g(k.2^{-n})].$$

Suite de la preuve du lemme 2. — De (1) et du lemme 3, on déduit: $\left\{ \int_{\alpha+\varepsilon_0}^{\beta-\varepsilon_0} |\Delta_n f(t)|\,dt : n \in \mathbb{N} \right\}$ est borné. La suite de mesures signées $\Delta_n f(t)\,dt$ sur $[\alpha+\varepsilon_0, \beta-\varepsilon_0]$ admet donc une sous-suite qui converge étroitement vers une mesure borélienne signée μ. Montrons que sur $]\alpha+2\varepsilon_0, \beta-2\varepsilon_0[$, f'' (au sens de Schwartz) $= \mu$:

Si g est une fonction de classe C^2 à support dans $[\alpha+2\varepsilon_0, \beta-2\varepsilon_0]$ $g_n(x)$ converge uniformément en x vers $g(x)$; et donc:

$$\lim_{p \to \infty} \int_{\alpha+\varepsilon_0}^{\beta-\varepsilon_0} g_{n_p}(x)\,\Delta_{n_p} f(x)\,dx = \int_{\alpha+\varepsilon_0}^{\beta-\varepsilon_0} g(x)\,\mu(dx).$$

Or, pour n assez grand:

$$\sum_k g(k.2^{-n})[f((k+1)2^{-n}) + f((k-1)2^{-n}) - 2.f(k.2^{-n})]$$
$$= \sum_k f(k.2^{-n})[g((k+1)2^{-n}) + g((k-1)2^{-n}) - 2.g(k.2^{-n})],$$

soit:

$$\int_{\alpha+\varepsilon_0}^{\beta-\varepsilon_0} g_n(x)\,\Delta_n f(x)\,dx = \int_{\alpha+\varepsilon_0}^{\beta-\varepsilon_0} f_n(x)\,\Delta_n g(x)\,dx.$$

Comme $\Delta_n g(x)$ converge uniformément en x vers $g''(x)$ (car g est de classe C^2) et f_n converge uniformément vers f sur $[\alpha+\varepsilon_0, \beta-\varepsilon_0]$ (car f est continue sur $[\alpha+\varepsilon_0, \beta-\varepsilon_0]$), on a:

Pour toute g de classe C^2 à support dans $[\alpha+2\varepsilon_0, \beta-2\varepsilon_0]$

$$\int_{\alpha+\varepsilon_0}^{\beta-\varepsilon_0} g(x)\,\mu(dx) = \int_{\alpha+\varepsilon_0}^{\beta-\varepsilon_0} g''(x) f(x)\,dx.$$

μ est donc sur $]\alpha+2\varepsilon_0, \beta-2\varepsilon_0[$ la dérivée seconde au sens de Schwartz de f, ceci pour tout $\varepsilon_0 > 0$. On en déduit que f'' est une mesure de Radon sur $]\alpha, \beta[$.

Preuve du théorème 1. — Toujours à l'aide du nombre de montées et de descentes, il est aisé de voir que f est continue sur $]a, b[$. Pour tout

$\varepsilon>0$, $A>0$, par localisations successives, on se ramène à M martingale continue bornée, $\|M_\infty^+\|_\infty \geqq (b-\varepsilon) \wedge A$, $\|M_\infty^-\|_\infty \geqq (-a-\varepsilon) \wedge A$ et $f(M)$ processus continu, somme d'une martingale et d'un processus à variations intégrables. Grâce au lemme 2, f'' est une mesure de Radon sur $](a+\varepsilon) \vee -A, (b+\varepsilon) \wedge A[$ pour tout $\varepsilon>0$ et tout $A>0$, d'où le théorème.

II. DEUX APPLICATIONS

Du théorème I, on déduit les:

COROLLAIRE 4 (Cinlar, Jacod, Protter, Sharpe). — *Si* B *est un mouvement brownien réel, de mesure initiale quelconque, alors* $f(B_.)$ *est une semi-martingale si et seulement si f est différence de deux fonctions convexes.*

Preuve. — Soit T le premier temps d'atteinte de 0 par B, et soit $\hat{B}_t = B_{t+T}$. $\hat{B}$ est un mouvement brownien issu de zéro, et $f(\hat{B}_.)$ est une semi-martingale dans la filtration de $\hat{B}$. f'' est donc une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ ($a=-\infty$, $b=+\infty$ dans ce cas), f est donc différence de deux fonctions convexes.

Remarque. — Le théorème 1 se ramène au théorème de Cinlar, Jacod, Protter, Sharpe par changement de temps si, P presque sûrement, $\operatorname{Sup}_t M_t = +\infty$ et $\operatorname{Inf}_t M_t = -\infty$.

COROLLAIRE 5. — *Soit d un entier supérieur à* 2, *et* X *un processus de Bessel de mesure initiale* ν *et de dimension d. Si f est une fonction réelle telle que* $f(X)$ *est une semi-martingale, alors la restriction de* f'' *à* $\mathbb{R}_+^*$ *est une mesure de Radon.*

Preuve. — Soit $T = \inf\{t \geqq 0 : X_t = 1\} \wedge 1$, et soit Y :

$$Y_t = (X_{t-T})\,\mathbf{1}_{t>T}\,\mathbf{1}_{T<1} + \mathbf{1}_{T>1} + \mathbf{1}_{t \leqq T < 1}.$$

— Si $d=2$, $Z_t = \log Y_t$ est une martingale locale nulle en zéro (pour sa propre filtration); $\|\operatorname{Sup}_t Z_t^+\|_\infty = +\infty$, $\|\operatorname{Sup}_t Z_t^-\|_\infty = +\infty$. Soit $g(x) = f(\exp(x))$; $g(Z_t)$ est alors une semi-martingale, donc g'' est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, et comme $f(x) = g(\log(x))$, f'' est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Si $d \geqq 3 : Z_t = Y_t^{2-d} - 1$ est une martingale locale nulle en zéro, $\|\operatorname{Sup}_t Z_t^+\|_\infty = +\infty$, $\|\operatorname{Sup}_t Z_t^-\|_\infty = 1$.

Soit $g(x)=f((x+1)^{1/(2-d)})$, $g(Z_t)=f(Y_t)$ est donc une semi-martingale donc g'' est une mesure de Radon sur $]-1, +\infty[$. Comme $f(y)=g(y^{2-d}-1)$ f'' est, sur $\mathbb{R}_+^*$, une mesure de Radon.

Remarque. – Si ν ne charge pas zéro, P p. s. X n'atteint pas zéro, de sorte que si f vérifie les conclusions du corollaire 5, $f(X)$ est une semi-martingale.

RÉFÉRENCES

[1] J. BERTOIN, Les processus de Dirichlet en tant qu'espace de Banach, Stochastics, n° **18**, vol. 2, 1986.

[2] E. CINLAR, J. JACOD, P. PROTTER and M. J. SHARPE, Semimartingales and Markov Processes, *Z.W.*, n° **54**, 1980.

[3] M. FUKUSHIMA, A Decomposition of Additive Functionals of Finite Energy, *Nagoya Math. J.*, vol. **74**, 1979.

[4] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

[5] A. T. WANG, Generalized Ito's Formula and Additive Functionals of Brownian Motion, *Z.W.*, n° **41**, 1977.

[6] M. YOR, Un exemple de processus qui n'est pas une semi-martingale, Temps Locaux, *Astérisque*, n° **52-53**, S.M.F., 1978.

(*Manuscrit reçu le* 16 *octobre* 1986)
(*corrigé le* 10 *mars* 1987.)