

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE KAHANE

## **Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 23, n° S2 (1987), p. 289-296

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1987\\_\\_23\\_S2\\_289\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_S2_289_0)

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff

par

**Jean-Pierre KAHANE**

Université de Paris-Sud, Unité associée n° 757,  
Analyse harmonique, Mathématique, Bât. n° 425,  
91405 Orsay Cedex

---

**RÉSUMÉ.** — Un produit de poids aléatoires normalisés indépendants sur un espace métrique  $T$  définit un opérateur aléatoire  $Q$  opérant sur les mesures  $\sigma \in M^+(T)$ . L'opérateur  $\sigma \rightarrow EQ\sigma$  est une projection dans  $M^+(T)$ , dont on étudie, dans des cas particuliers, le noyau et l'image.

*Mots clés :* Martingales positives, mesures de Radon, mesures et dimensions de Hausdorff.

**ABSTRACT.** — Given a compact metric space  $T$  a product of random independent normalized weights on  $T$  defines a random operator  $Q$  acting on measures  $\sigma \in M^+(T)$ . The operator  $\sigma \rightarrow EQ\sigma$  is a projection in  $M^+(T)$ . Its kernel and image are considered in particular cases.

---

### I

Soit  $(T, d)$  un espace métrique compact,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité, et  $P_n(t, \omega)$  une suite de poids indépendants normalisés ( $t \in T, \omega \in \Omega$ ,

---

*Classification A.M.S. :* .

$n = 1, 2, \dots$ ). Cela signifie que : 1° pour presque tout  $\omega$ , les  $P_n(\cdot, \omega)$  sont des fonctions boréliennes  $\geq 0$ ; 2° pour tout  $t$  les  $P_n(t, \cdot)$  sont des variables aléatoires  $\geq 0$ , telles que  $EP_n(t, \cdot) = 1$ ; 3° les tribus engendrées par les  $\{P_n(t, \cdot)\}$  sont indépendantes. On pose

$$Q_n(t, \omega) = \prod_{m=1}^n P_m(t, \omega). \quad (1)$$

Pour toute mesure de Radon  $\sigma$  positive sur  $T$  [nous noterons  $\sigma \in M^+(T)$ ] on considère la mesure aléatoire  $S_n = Q_n \sigma$ . Ainsi, pour tout borélien  $B$  dans  $T$ , on a

$$S_n(B) = \int_B Q_n(t, \omega) d\sigma(t). \quad (2)$$

Pour tout  $B$ ,  $(S_n(B))_{n=1,2,\dots}$  est une martingale positive; elle converge donc p. s. vers une limite  $S(B)$ .

On peut interpréter  $S$  comme une mesure aléatoire. En effet, on a le résultat suivant (théorème 1 de [3]).

**PROPOSITION A.** — *Les mesures aléatoires  $S_n$  convergent faiblement p. s. vers une mesure  $S$ . Pour toute collection dénombrable de boréliens  $B_j$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(B_j) = S(B_j) \text{ p. s.} \quad (3)$$

Dans les cas les plus intéressants,  $S$  sera presque sûrement singulière par rapport à  $\sigma$ . Il est donc faux que p. s. pour tout  $B$  la suite  $S_n(B)$  converge vers  $S(B)$ . Soit  $Q$  l'opérateur

$$Q\sigma = S. \quad (4)$$

On dit que  $Q$  est dégénéré sur  $\sigma$ , ou tue  $\sigma$ , si  $Q\sigma = 0$ , et que  $Q$  agit pleinement sur  $\sigma$  si  $EQ\sigma = \sigma$ , c'est-à-dire, pour tout borélien  $B$ ,  $ES(B) = \sigma(B)$ , c'est-à-dire encore

$$ES(T) = \sigma(T). \quad (5)$$

(5) signifie que la martingale  $S_n(T)$  converge vers  $S(T)$  dans  $L^1(\Omega)$ . Il est évident que les mesures tuées par  $Q$  sont singulières par rapport aux mesures sur lesquelles  $Q$  agit pleinement. On dira que les mesures tuées par  $Q$  sont  $Q$ -singulières et les mesures sur lesquelles  $Q$  agit pleinement sont  $Q$ -régulières. Avec cette terminologie, le théorème 4 de [3] s'énonce ainsi.

PROPOSITION B. — *Toute  $\sigma \in M^+(T)$  est somme d'une mesure  $\sigma'$  Q-régulière et d'une mesure  $\sigma''$  Q-singulière. On a*

$$\sigma' = EQ\sigma \quad (6)$$

[c'est-à-dire  $\sigma'(B) = ES(B)$  pour tout  $B$ ], et l'opérateur  $EQ$  est une projection.

Ainsi  $EQ$  est un opérateur « Q-régularisant ». Nous allons voir ce que cela signifie dans un cas particulier simple (théorème 1 et corollaire).

On peut décomposer  $Q$  en un produit d'opérateurs indépendants. Pour ce faire, considérons par exemple les poids  $P_{2n-1}$  d'une part, et les poids  $P_{2n}$  d'autre part. Il leur correspond respectivement un opérateur  $Q'$  et un opérateur  $Q''$ , mutuellement indépendants. Il est alors commode de représenter  $\Omega$  comme un espace produit

$$\Omega = \Omega' \times \Omega'', \quad (7)$$

l'opérateur  $Q'$  étant défini sur  $\Omega'$  et l'opérateur  $Q''$  sur  $\Omega''$ . La formule

$$Q = Q'Q'' = Q''Q' \quad (8)$$

signifie que, pour chaque  $\sigma \in M^+(T)$ ,  $S = Q\sigma$  peut s'obtenir en appliquant d'abord  $Q''$  à  $\sigma$ , ce qui donne une mesure aléatoire définie sur  $\Omega''$ , puis en appliquant  $Q'$ ; et aussi qu'on peut intervenir  $Q'$  et  $Q''$ .

Si d'ailleurs nous avons deux familles indépendantes de poids  $(P'_n)$  et  $(P''_n)$ , on peut définir par (8) le produit des opérateurs  $Q'$  et  $Q''$  correspondants, et interpréter  $Q$  comme l'opérateur associé à des poids  $P_n$  tels que (par exemple)  $P'_n = P_{2n-1}$  et  $P''_n = P_{2n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); ou encore, aux poids  $P_n P'_n$ .

Voici comment on peut utiliser (8). Si  $Q$  tue  $\sigma$ , il est presque sûr que  $Q'$  tue  $Q''\sigma$ , c'est-à-dire que  $Q''\sigma$  est p. s.  $Q'$ -singulière. Si au contraire  $Q$  agit pleinement sur  $\sigma$ , il est presque sûr que  $Q'$  agit pleinement sur  $Q''\sigma$ , c'est-à-dire que  $Q''\sigma$  est p. s.  $Q'$ -régulière.

Ce procédé de décomposition a été utilisé dans les problèmes de recouvrement au hasard (pour le calcul de dimensions de Hausdorff des ensembles non recouverts) [1], et aussi dans la théorie du chaos multiplicatif [2]. Nous allons l'appliquer (théorème 2) à une situation déjà bien explorée, celle des multiplications aléatoires introduites par B. Mandelbrot [5], étudiée dans [4].

## II

On fixe un entier  $c \geq 2$ , et on choisit pour  $T$  le compact

$$T = \{1, 2, \dots, c\}^{\mathbb{N}} \quad (9)$$

dont les éléments s'écrivent  $t = (t_0, t_1, \dots, t_n, \dots)$ . La distance est la distance ultramétrique ordinaire

$$d(t, s) = c^{-n} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall j < n, & t_j = s_j \\ t_n \neq s_n \end{cases} \quad (10)$$

On désigne par  $B_n$  une boule quelconque de rayon  $c^{-n}$  (il y en a  $c^n$ ). Soit  $\mu$  la mesure naturelle sur  $T$  — telle que la masse de chaque boule  $B_n$  soit  $c^{-n}$  —.

On donne une v. a.  $W \geq 0$  telle que  $EW = 1$ , et on choisit le poids  $P_n$  constant sur chaque boule  $B_n$ , tel que ses  $c^n$  valeurs soient des v. a. indépendantes de même loi que  $W$ . Le résultat suivant est établi dans [4].

PROPOSITION C. — Si  $E(W \log W) \geq \log c$ ,  $Q$  tue  $\mu$ . Si  $E(W \log W) < \log c$ ,  $Q$  agit pleinement sur  $\mu$ .

Considérons maintenant un cas particulier :

$$\begin{cases} P(W = c^\alpha) = c^{-\alpha} \\ P(W = 0) = 1 - c^{-\alpha} \end{cases} \quad (11)$$

$\alpha > 0$  donné. Le support de  $Q_n$  s'obtient à partir de celui de  $Q_{n-1}$  en remplaçant chaque boule  $B_{n-1}$  par les  $c^n$  boules  $B_n$  qu'elle contient, et en supprimant les boules  $B_n$  où  $P_n = 0$  (donc on supprime les boules avec probabilité  $1 - c^{-\alpha}$ , et indépendamment les unes des autres) : c'est un modèle classique de processus de naissance et de mort. On sait qu'il y a dégénérescence complète (au sens  $Q_n = 0$  pour  $n$  assez grand, p. s.) dès que  $\alpha \geq 1$ ; c'est d'ailleurs une conséquence de la proposition C.

THÉORÈME 1. — Dans l'hypothèse (11) avec  $0 < \alpha < 1$ ,  $Q$  tue toute mesure  $\sigma$  concentrée sur un borélien de mesure finie en dimension  $\alpha$ , et  $Q$  agit pleinement sur toute mesure  $\sigma$  d'énergie finie par rapport au noyau  $(d(t, s))^{-\alpha}$ .

Preuve. — La première partie résulte d'une condition donnée en [3] (théorème 3) : pour que  $Q\sigma = 0$ , il suffit que le support  $K$  de  $\sigma$  soit de mesure finie en dimension  $\alpha$  (au sens de Hausdorff), et que

$$E \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leq C (\text{diam } B)^{(1-h)\alpha} \quad (12)$$

pour un  $C > 0$ , un  $h \in ]0, 1[$ , tout  $B \subset K$ , et un  $n = n(B)$ . La seconde partie vient de ce que

$$E(S_n(T))^2 = \iint EQ_n(t) Q_n(s) d\sigma(t) d\sigma(s) \quad (13)$$

et du fait que l'intégrale du second membre est dominée par l'intégrale d'énergie

$$\iint (d(t, s))^{-\alpha} d\sigma(t) d\sigma(s) = I_\alpha(\sigma). \quad (14)$$

Pour comprendre le sens du théorème 1, il est utile de le comparer à la proposition qui suit, dont une partie est classique et dont le reste est laissé comme exercice au lecteur. Étant donné une fonction  $\varphi$  concave sur  $\mathbb{R}^+$ , croissante, telle que  $\varphi(0) = 0$  (fonction déterminante), on va désigner par  $\Lambda_\varphi$  la classe des mesures  $\sigma \in M^+(T)$  telles que

$$\sigma(B) \leq C \varphi(\text{diam } B) \quad (15)$$

pour un  $C > 0$  et tout borélien  $B$  (ou, ce qui revient au même, toute boule  $B$ ). On désigne par  $\text{mes}_\varphi$  la mesure de Hausdorff par rapport à la fonction déterminante  $\varphi$ , et par  $K$  un compact dans  $T$ .

**PROPOSITION D.** — *Pour avoir  $\text{mes}_\varphi K > 0$ , il faut et suffit que  $K$  porte une mesure  $\sigma \in \Lambda_\varphi$  non nulle (Frostman). Pour avoir  $I_\alpha(\sigma) < \infty$ , il suffit que  $\sigma \in \Lambda_\varphi$  avec*

$$\int_0^1 \varphi(t) t^{-\alpha-1} dt < \infty. \quad (16)$$

*Pour toute fonction déterminante  $\psi(t) = o(t^\alpha)$  ( $t \rightarrow 0$ ), il existe un compact  $K$  tel que  $\text{mes}_\psi K = \infty$  et  $\text{Cap}_\alpha K < \infty$  [ceci signifiant que  $K$  porte une mesure non nulle  $\sigma$  telle que  $I_\alpha(\sigma) < \infty$ ].*

Ainsi, dans la première phrase du théorème 1, la condition  $\text{mes}_\alpha B < \infty$  (borélien de mesure finie en dimension  $\alpha$ ) ne peut pas être remplacée par  $\text{mes}_\psi B < \infty$ .

Dans la suite, lorsque  $Q$  est donné par (11), nous écrirons  $Q = Q_\alpha$  et nous désignerons par  $R_\alpha$  l'ensemble des mesures  $Q_\alpha$ -régulières (c'est-à-dire l'image de l'opérateur  $EQ_\alpha$ ) et par  $S_\alpha$  l'ensemble des mesures  $Q_\alpha$ -singulières (c'est-à-dire le noyau de  $EQ_\alpha$ ).

En vue de préciser la structure de  $S_\alpha$  nous utiliserons la notation suivante

$$\sigma \notin \Lambda_\varphi \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \notin \Lambda_\varphi \\ (\sigma' \leq \sigma \text{ et } \sigma' \neq 0) \Rightarrow \sigma' \notin \Lambda_\varphi \end{array} \right\}. \quad (17)$$

La seconde partie du théorème 1, jointe à la proposition B, montre que, pour toute fonction déterminante  $\varphi$  vérifiant (16),

$$\sigma \in S_\alpha \Rightarrow \sigma \notin \Lambda_\varphi. \quad (18)$$

PROPOSITION E. — Si  $\sigma \notin \Lambda_\varphi$ ,  $\sigma$  est concentrée sur un borélien de  $\varphi$ -mesure nulle.

Preuve. — Soit  $\sigma \notin \Lambda_\varphi$  et  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\sigma \notin \Lambda_\varphi$ , il existe une boule  $B_0$  de diamètre maximal telle que

$$\varepsilon \sigma(B_0) > \varphi(\text{diam } B_0).$$

Posons  $T_1 = T \setminus B_0$ . Si  $\sigma(T_1) = 0$  nous nous arrêtons. Si  $\sigma(T_1) > 0$  nous posons

$$\sigma_1 = \sigma|_{T_1} (= 1_{T_1} \sigma).$$

Comme  $\sigma_1 \notin \Lambda_\varphi$  il existe une boule  $B_1$  de diamètre maximal, telle que, en posant  $B'_1 = B_1 \cap T_1$ , on ait

$$\varepsilon \sigma_1(B'_1) > \varphi(\text{diam } B_1).$$

On pose  $T_2 = T \setminus (B_0 + B'_1) = T_1 \setminus B'_1$ , et ainsi de suite. Tant qu'on ne s'arrête pas on a

$$\sum \varphi(\text{diam } B_n) \leq \varepsilon \sigma(T). \quad (19)$$

Si on s'arrête au rang  $N$ ,  $\sigma$  est concentrée sur  $B_0 + B'_1 + \dots + B'_N$ . Si on ne s'arrête pas, montrons que  $\sigma$  est concentrée sur  $\sum_0^\infty B'_n$  (on pose  $B'_0 = B_0$ ). En effet, si ce n'était pas le cas, on poserait  $T_\infty = T \setminus \sum_0^\infty B'_n$  et

$\sigma_\infty = \sigma|_{T_\infty}$ , et il existerait une boule  $B_\infty$  telle que  $\varepsilon \sigma_\infty(B_\infty) > \varphi(\text{diam } B_\infty)$ . Or (19) entraîne que  $\text{diam } B_n$  tend vers 0, et l'existence de  $B_\infty$  est contradictoire avec celle de  $B_n$  lorsque  $\text{diam } B_n < \text{diam } B_\infty$ . Ainsi,  $\sigma$  est concentrée sur un ensemble  $E_\varepsilon$  réunion de boules  $B_n$  telles qu'on ait (19). L'intersection des  $E_{1/m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) est un borélien de  $\varphi$ -mesure nulle sur lequel  $\sigma$  est concentrée.

Compte tenu des propositions D et E, on peut préciser ainsi la structure de  $S_\alpha$ .

**COROLLAIRE DU THÉORÈME 1.** — *Toute mesure concentrée sur un borélien de  $\alpha$ -mesure finie appartient à  $S_\alpha$ , et toute mesure appartenant à  $S_\alpha$  est concentrée sur un borélien de  $\varphi$ -mesure finie,  $\varphi$  désignant une fonction déterminante donnée vérifiant (16).*

Ainsi, l'opérateur  $EQ_\alpha$  a la signification suivante : il retire de  $\sigma$  tout ce qui est concentré sur des boréliens de dimension  $< \alpha$ , et aussi une partie de ce qui est concentré sur des boréliens de dimension  $\alpha$ .

*Remarque.* —  $S_\alpha$  est fonction croissante de  $\alpha$ , et  $R_\alpha$  fonction décroissante. C'est conséquence de ce qui précède, et aussi de la formule

$$Q_\alpha \cdot Q_\beta = Q_{\alpha+\beta} \quad (20)$$

relative à un produit d'opérateurs  $Q_\alpha$  et  $Q_\beta$  indépendants. Si en effet on choisit  $Q_\alpha = Q'$  et  $Q_\beta = Q''$  dans la formule (8), le poids  $P'_n P''_n$  est associé au produit  $W' W''$  et, en se référant à (11) on a

$$\left\{ \begin{aligned} P(W' W'' = c^{\alpha+\beta}) &= P(W' = c^\alpha) P(W'' = c^\beta) = c^{-(\alpha+\beta)} \\ P(W' W'' = 0) &= 1 - c^{-(\alpha+\beta)} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

donc  $Q = Q' Q''$  s'écrit  $Q_{\alpha+\beta}$ .

En écrivant

$$\sigma = \int_0^1 dEQ_\alpha(\sigma) \quad (22)$$

on a une sorte de décomposition continue de  $\sigma$  en éléments mutuellement singuliers.

### III

Désignons par  $W_\alpha$  le poids défini par (11), auquel correspond l'opérateur  $Q_\alpha$ , et revenons au cas général considéré au début de II. Considérons  $Q$  et  $Q_\alpha$  indépendants. Le produit  $QQ_\alpha$  est alors associé au poids  $WW_\alpha$ , et l'on a

$$\begin{aligned} E(WW_\alpha \log(WW_\alpha)) &= E(W \log W) + E(W_\alpha \log W_\alpha) \\ &= E(W \log W) + \alpha \log c. \end{aligned} \quad (23)$$

En vertu de la proposition C, il est presque sûr que  $Q_\alpha Q$  tue  $\mu$  si  $E(WW_\alpha \log(WW_\alpha)) \geq \log c$ , et presque sûr que  $Q_\alpha Q$  agit pleinement sur  $\mu$  si  $E(WW_\alpha \log(WW_\alpha)) < \log c$ . Énonçons le résultat.

THÉORÈME 2. — *Supposons  $E(W \log W) < \log c$ , et posons*

$$D = 1 - E\left(W \frac{\log W}{\log c}\right).$$

*Il est presque sûr que la mesure aléatoire  $Q\mu$  appartient à  $S_\alpha$  pour  $\alpha \geq D$ , et à  $R_\alpha$  pour  $\alpha < D$ .*

COROLLAIRE. — *Presque sûrement  $Q\mu$  est concentrée sur un borélien de  $\varphi$ -mesure nulle, lorsque  $\varphi$  est une fonction déterminante donnée vérifiant (16) — a fortiori,  $Q\mu$  est concentrée sur un borélien de dimension  $D$  — et la  $Q\mu$ -mesure de tout borélien de dimension  $< D$  est nulle.*

Ce corollaire supprime une condition parasite dans le corollaire du théorème 4 de [4].

## RÉFÉRENCES

- [1] J.-P. KAHANE, *Some Random Series of Functions*, 1<sup>re</sup> éd., Heath Math. Monographs, 1968, 184 p; 2<sup>e</sup> éd., Cambridge Univ. Press, 1986, 300 p.
- [2] J.-P. KAHANE, Sur le chaos multiplicatif, *Ann. Sciences Math. Québec*, vol. **9**, 1985, p. 105-150, voir aussi *C.R. Acad. Sc.*, t. **301**, 1985, p. 329-332.
- [3] J.-P. KAHANE, Positive Martingales and Random Measures, *Chinese Ann. Math.*, **8B** (1987) p. 1-12.
- [4] J.-P. KAHANE et J. PEYRIÈRE, Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot, *Advances Math.*, vol. **22**, 1976, p. 131-145.
- [5] B. MANDELBROT, Intermittent Turbulence in Self-Similar Cascades: Divergence of High Moments and Dimension of the Carrier, *J. of Fluid Mechanics*, vol. **62**, 1974, p. 331-358.

(Manuscrit reçu le 24 juin 1986.)