

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PHILIPPE ROBERT

Sur un processus de vie et de mort de particules sur $[0,1]$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, n° 2 (1987), p. 225-235

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_2_225_0

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur un processus de vie et de mort de particules sur $[0,1]$

par

Philippe ROBERT

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt,
BP 105, 78153 Le Chesnay, Cedex France

RÉSUMÉ. — Nous étudions un processus de vie et de mort de particules sur $[0, 1]$. Chaque unité de temps, une particule est créée au hasard sur $[0, 1]$, avec probabilité p elle reste, sinon elle est détruite ainsi que la première particule à sa droite. Nous étudions suivant les valeurs de p le comportement asymptotique de ce processus.

Mots-clés : Systèmes de particules, mesures aléatoires.

ABSTRACT. — We consider a discrete time birth and death process of particles on $[0, 1]$. Every unit of time, a particle is created at random on $[0, 1]$. With probability p , it stays on $[0, 1]$, otherwise this particle and the first particle on its right are annihilated. We study the asymptotic state of this process.

INTRODUCTION

Nous considérons dans cet article le modèle suivant : initialement l'état du modèle est une répartition de $+$ sur $[0, 1]$, toutes les unités de temps

une particule est créée en A , uniformément sur $[0, 1]$. Avec probabilité p , cette particule est un $+$, dans ce cas la répartition compte un nouveau $+$ en A . Sinon c'est un $-$ et celui-ci détruit le premier $+$ à droite de A , ces deux particules disparaissent de la répartition (si aucun $+$ n'est à droite de A , le $-$ disparaît). Ces modèles se rencontrent dans des problèmes de stockage (cf. Karp pour une description détaillée).

Nous étudions le comportement asymptotique de la répartition des $+$ sur $[0, 1]$. Si $p \geq 1/2$, les résultats sont conformes à l'intuition, les $+$ remplissent uniformément l'intervalle $[0, 1]$ avec l'intensité $2p - 1$, nous montrons une loi des grands nombres pour ce processus. Si $p < 1/2$, $p \neq 0$, nous montrons l'existence et l'unicité d'un état stationnaire caractérisé de la façon suivante : presque sûrement le nombre de $+$ dans un intervalle $[a, b]$ avec $a > 0$ est fini, d'espérance $\alpha \log(b/a)$ où $\alpha > 0$ est une constante. Le comportement en 0 est plus inattendu : presque sûrement 0 est un point d'accumulation des $+$. Nous montrons qu'en renormalisant la position de ces $+$ qui s'accumulent par l'application $x \rightarrow \log(1/x)$, nous obtenons une mesure ponctuelle stationnaire sur \mathbb{R}_+ .

Je remercie M. Hofri de m'avoir suggéré ce problème et J. Neveu pour les discussions à ce sujet.

1. DESCRIPTION DU MODÈLE

Nous considérons $(L_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes équidistribuées. La variable L_1 est uniformément distribuée sur $[0, 1]$ et X_1 a pour loi $p\delta_+ + q\delta_-$ (avec δ_x masse de Dirac en x). L'espace de probabilité considéré (Ω, \mathcal{A}, P) sera l'espace naturel de la suite $(L_n, X_n)_n$ et $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ la translation définie par $(L_n, X_n)_n(\theta(\omega)) = (L_{n+1}, X_{n+1})_n(\omega)$. Enfin $E(\cdot)$ désignera l'espérance relativement à la probabilité P .

A $t = 0$, le modèle se décrit comme une répartition de $+$ sur $[0, 1]$, i. e. une mesure N_0 de Radon sur $[0, 1]$ portée par des points et à valeurs entières. A $t = 1$ une particule de signe X_1 est créée en L_1 . Si $X_1 = +$, la mesure N_0 compte un nouveau point en L_1 , sinon la première particule à droite de L_1 est détruite. Ce mouvement se décrit par l'équation

$$(1) \quad N_1 = N_0 + 1_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1} - 1_{\{X_1 = -, N_0[L_1, 1] \neq 0\}} \delta_{t_1(L_1, N_0)}$$

avec

$$N_0(f) = \int f(x)N_0(dx) \quad \text{et} \quad N_0[a, b] = N_0(1_{[a,b]})$$

$$t_1(x, N_0) = \inf \{ y \geq x / N_0[x, y] \neq 0 \} \quad \text{si} \quad N_0[x, 1] \neq 0$$

sinon on conviendra $\delta_{t_1(x, N_0)} \equiv 0$.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au problème de l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité Q sur l'ensemble \mathcal{M} des mesures ponctuelles de Radon sur $]0, 1]$ muni de la topologie vague, telle que Q soit invariante par l'équation (1), i. e. $\int f(N_1)Q(dN_0) = \int f(N_0)Q(dN_0)$ pour toute fonction borélienne positive définie sur \mathcal{M} . Si $p < q$, nous construisons une variable aléatoire $N_0 : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ telle que $N_1(\omega) = N_0(\theta(\omega))$, la loi de N_0 sera ainsi une solution de notre problème.

2. EXISTENCE D'UN ÉTAT STATIONNAIRE

Si M et N sont des mesures ponctuelles de Radon sur $[0, 1]$, nous poserons

$$T(\omega, N) = N + 1_{\{X_1 = +\}}\delta_{L_1} - 1_{\{X_1 = -, N[L_1, 1] \neq 0\}}\delta_{t_1(L_1, N)} \quad \text{pour} \quad \omega \in \Omega$$

$$M \ll N \quad \text{si pour tout} \quad a, b \in [0, 1], \quad M[a, b] \leq N[a, b].$$

Le lemme suivant se montre facilement :

LEMME 2.1 (propriété de monotonie). — *Si M et N sont deux mesures ponctuelles finies sur $[0, 1]$ telles que $M \ll N$ alors $T(\omega, M) \ll T(\omega, N)$.*

Définissons la suite de mesures ponctuelles aléatoires sur $[0, 1]$ par

$$N_0 \equiv 0$$

$$N_{n+1}(\omega) = T(\theta^{-1}(\omega), N_n(\theta^{-1}(\omega))).$$

Il est facile de vérifier que N_n est la répartition obtenue à $t = 0$, quand le processus débute à $t = -n$, avec la répartition vide.

Comme $N_1 \gg N_0 \equiv 0$, en utilisant la monotonie de T, on en déduit par récurrence que la suite $(N_n)_n$ est croissante pour la relation \ll . Définissons $N = \lim_n \uparrow N_n$ par $N[a, b] = \lim_n \uparrow N_n[a, b]$ pour $a, b \in [0, 1]$ et $t_D^n = \text{Sup} \{ s / N_n[s, 1] \neq 0 \}$ en convenant $\text{sup} \{ \emptyset \} = 0$ (t_D^n est le dernier point de N_n).

La suite $(N_n)_n$ étant croissante, la suite t_D^n (resp. $t_1(x, N_n)$) est croissante (resp. décroissante), soit $t_D = \lim_n \uparrow t_D^n$ et $t_1(x, N) = \lim_n \downarrow t_1(x, N_n)$.

D'après la définition de N_n

$$(2) \quad N_{n+1}(\theta(\omega)) = N_n(\omega) + 1_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1} - 1_{\{X_1 = -, L_1 \leq t_D^n\}} \delta_{t_1(L_1, N_n)}.$$

3. CAS $p < 1/2$ $p \neq 0$

PROPOSITION 3.1. — La mesure aléatoire N est P. p. s. de Radon sur $]0, 1[$;
 P. p. s. $\lim_n \uparrow N_n[a, b] \in N$ pour $0 < a \leq b \leq 1$.

□ Soit $a \in]0, 1[$, d'après la relation (2)

$$N_{n+1}[a, 1](\theta(\omega)) = N_n[a, 1](\omega) + 1_{\{X_1 = +, L_1 \geq a\}} - 1_{\{X_1 = -, t_1(L_1, N_n) \geq a\}}$$

on en déduit que l'ensemble $A_a = \{ \omega / \lim_n \uparrow N_n[a, 1] = +\infty \}$ est invariant par θ . La loi de 0 - 1 (les $(L_n, X_n)_n$ sont i. i. d.) nous donne $P(A_a) = 0$ ou 1. Posons $a_0 = \text{Sup} \{ a / P(A_a) = 1 \}$, alors $N[a, 1] = \lim_n N_n[a, 1] < +\infty$ P. p. s. pour $a > a_0$ et $N[a, 1] = +\infty$ P. p. s. si $a < a_0$. Ainsi a_0 est P. p. s. un point d'accumulation de N si $a_0 > 0$.

Supposons $a_0 > 0$, d'après (2)

$$N_{n+1}[0, a](\theta(\omega)) - N_n[0, a](\omega) = 1_{\{X_1 = +, L_1 \leq a\}} - 1_{\{X_1 = -, t_1(L_1, N_n) \leq a\}}.$$

En intégrant, l'invariance de θ pour P et la croissance de (N_n) nous donne

$$0 \leq E(N_{n+1}[0, a] - N_n[0, a]) = pa - qP(t_1(L_1, N_n) \leq a)$$

pour $\varepsilon > 0$,

$$qP(t_1(L_1, N_n) \leq a_0 + \varepsilon, L_1 < a_0) \leq p(a_0 + \varepsilon).$$

Comme a_0 est P. p. s. un point d'accumulation, si $x < a_0$, $\lim_n \downarrow t_1(x, N_n) \leq a_0$ P. p. s., on obtient donc

$$qa_0 \leq p(a_0 + \varepsilon)$$

faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit $a_0 = 0$ et donc que N est P. p. s. une mesure de Radon sur $]0, 1[$.

Remarque. — $N = \lim_n \uparrow N_n$ est une mesure de Radon sur $]0, 1[$, N_n étant à valeurs entières, la suite t_D^n est constante à partir d'un certain rang. En passant à la limite dans (2) on obtient

$$(3) \quad N(\theta(\omega)) = N(\omega) + 1_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1} - 1_{\{X_1 = -, L_1 \leq t_D\}} \delta_{t_1(L_1, N)}, \text{ P. p. s.}$$

La loi de N est donc invariante par l'équation (1), la proposition suivante nous assure l'unicité :

PROPOSITION 3.2 (unicité de l'état stationnaire).

a) Si $t_D(x) = \text{Sup} \{ s \leq x / N[s, x] \neq 0 \}$ alors $E(t_D(x)) = \frac{p}{q} \cdot x$.

b) La loi de N est l'unique mesure de probabilité Q sur l'ensemble \mathcal{M} des mesures ponctuelles aléatoires à valeurs dans $N \cup \{ + \infty \}$ de Radon sur $]0, 1]$, telle que

$$(4) \quad n(dx) \stackrel{\text{Loi}}{=} n(dx) + 1_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1} - 1_{\{X_1 = -, L_1 \leq t_D(n)\}} \delta_{t_1(L_1, n)}.$$

□ a) Pour $0 < x \leq 1$, on obtient en utilisant (3)

$$N[x, 1](\theta(\omega)) - N[x, 1](\omega) = 1_{\{X_1 = +, L_1 \in [x, 1]\}} - 1_{\{X_1 = -, L_1 \in]t_D(x), t_D(1)]\}}$$

sauf éventuellement sur l'événement négligeable $\{ L_1 = x \}$.

En intégrant

$$0 = p(1 - x) - qP(X_1 = -, L_1 \in]t_D(x), t_D(1)]),$$

la suite $(N_n)_n$ étant indépendante de (X_1, L_1) il en va de même pour $t_D(x)$ et (X_1, L_1) ,

$$E(t_D(1)) - E(t_D(x)) = \frac{p}{q} (1 - x),$$

l'inégalité $t_D(x) \leq x$ nous donne $E(t_D(x)) = p/q \cdot x$.

b) Soit Q une mesure de probabilité sur \mathcal{M} vérifiant (4). Si Q_1 et Q_2 sont deux probabilités sur \mathcal{M} , nous notons classiquement $Q_1 \leq Q_2$, si pour toute fonction continue f sur \mathcal{M} , croissante pour \ll , $\int f dQ_1 \leq \int f dQ_2$.

Par hypothèse $n \gg 0$, $Q(dn)$ presque sûrement donc $Q \geq P_{N_0}$, le lemme 2.1 et (4) nous donnent par récurrence, $Q \geq P_{N_k}$ pour $k \geq 0$ (P_{N_k} est la loi de N_k). On en déduit $Q \geq P_N$, un résultat classique (cf. Strassen, théorème 11), nous assure alors l'existence d'un espace de probabilité sur lequel sont définies deux mesures aléatoires N_1, N_2 de lois respectives Q, P_N , telles que $N_1 \ll N_2$ presque sûrement. La démonstration de a) n'utilisant que (4), on

a $E(t_D(x, N_1)) = \frac{p}{q} \cdot x = E(t_D(x_1, N_2))$, pour $x > 0$; Comme $t_D(x, N_1) \leq t_D(x, N_2)$

il vient $t_D(x, N_1) = t_D(x, N_2)$ pour $x \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$, presque sûrement, soit $N_1 = N_2$ p. s. □

Comportement de N en 0.

Malgré $P(X_1 = +) < P(X_1 = -)$ une infinité de particules s'accumulent en 0 :

PROPOSITION 3.3. — 0 est un point d'accumulation de N , P. p. s.

□ En reprenant les notations de la démonstration de la proposition 3.1, on a l'alternative $P(A_0) = 0$ ou 1.

Supposons $P(A_0) = 0$, alors P. p. s. $N[0, 1] < +\infty$, si $P(N[0, 1] = 0) = 0$ alors P. p. s. $N[0, 1] \geq 1$, d'après (3),

$$N[0, 1](\theta(\omega)) = N[0, 1] + 1_{\{X_1 = +\}} - 1_{\{X_1 = -, L_1 \leq t_D\}},$$

P. p. s. $t_D > 0$ puisque $N[0, 1] \geq 1$ P. p. s., alors P. p. s. $N[0, 1] \geq 2$ en effet, sinon sur l'ensemble non négligeable $\{N[0, 1] = 1, L_1 < t_D, X_1 = -\}$ ((X_1, L_1) et N sont indépendants), $N[0, 1](\theta(\omega)) = 0$. En utilisant à nouveau ce procédé on obtient P. p. s. $N[0, 1] \geq k$ pour tout k , $N[0, 1] = +\infty$ P. p. s. ce qui est contradictoire, donc $P(N[0, 1] = 0) > 0$.

D'après la construction de N_n , N_n est la mesure obtenue à $t = 0$, quand les particules commencent à arriver à $t = -n$. Sur l'événement non négligeable $\Omega_0 = \{N[0, 1] = 0\}$, $N_n[0, 1] = 0$ pour tout $n \geq 1$ ($N_n \ll N$). En particulier, la particule arrivant au site $\inf_{-n \leq k \leq 0} L_1 \circ \theta^k$ est toujours de signe $-$ pour tout $n \geq 1$ (sinon elle serait encore présente à $t = 0$), ce qui est contradictoire avec l'indépendance de X_1 et L_1 , donc $P(A_0) = 1$, 0 est un point d'accumulation de N P. p. s. □

Remarque. — Les propositions précédentes se généralisent facilement au cas où la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ (la loi de L_1) est remplacée par une mesure de probabilité μ telle que $\mu(\{0\}) = 0$ et $\text{Inf}\{y/\mu[0, y] > 0\} = 0$.

Si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}^*$ est la suite des points de N numérotés dans l'ordre décroissant, $N = \sum_{n \geq 1} \delta_{t_n}$, l'image de N par l'application $x \rightarrow \log(1/x)$ est une mesure ponctuelle stationnaire sur \mathbb{R}_+ :

PROPOSITION 3.4.

a) Si $x \in]0, 1[$, $(N[xy, x])_{y \in]0, 1]}$ a même loi que $(N[y, 1])_{y \in]0, 1]}$.

b) $\bar{N} = \sum_{n \geq 1} \delta_{\log(1/t_n)}$ est une mesure ponctuelle stationnaire sur \mathbb{R}_+ , i. e.

toute translation $\tau_x \bar{N}$ de \bar{N} pour $x \geq 0$ a même loi que \bar{N} .

□ a) Considérons le même modèle mais avec la suite $(xL_n, X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, notons \hat{N} la mesure ponctuelle sur $]0, x]$ associée à cette suite, il est clair que $\hat{N}[xy, x] = N[y, 1]$. Considérons la sous-suite de (L_n, X_n) constituée des (L_n, X_n) tels que $L_n \leq x$, cette sous-suite a même loi que (xL_n, X_n) ,

et la mesure ponctuelle obtenue avec celle-ci n'est autre que N restreint à $[0, x]$. D'après le résultat d'unicité de la proposition 3.2, on en déduit que N restreint à $[0, x]$ $\stackrel{\text{Loi}}{=} \widehat{N}$ et donc a).

b) est une conséquence immédiate de a), en effet d'après a) $\tau_{\log(1/x)}\overline{N}$ a même loi que \overline{N} pour $x \in [0, 1]$. \overline{N} est une mesure ponctuelle stationnaire sur \mathbb{R}^+ . \square

Nous n'avons pas su calculer l'intensité α de \overline{N} , néanmoins la proposition suivante nous donne une minoration de α :

PROPOSITION 3.5. — Si f est une fonction borélienne positive sur $[0, 1]$, $E(N(f)) = \alpha \int_0^{+\infty} f(e^{-x})dx$ où α est une constante telle que $\frac{p}{1-2p} \leq \alpha$.

\square D'après ce qui précède, \overline{N} est une mesure ponctuelle stationnaire sur \mathbb{R}_+ en particulier si g est borélienne positive $E(\overline{N}(g)) = \alpha \int_0^{+\infty} g(x)dx$, où α est l'intensité de \overline{N} (cf. Neveu). On en déduit par définition de \overline{N} la relation voulue.

$$\alpha \geq \frac{p}{1-2p}.$$

Considérons le même mouvement sur le tore T (que nous identifierons à $[0, 1]$) : les $+$ et $-$ arrivent uniformément sur T , un $-$ détruit le premier $+$ à sa droite (sur le tore), s'il y a au moins un $+$ sur T , de la même façon que précédemment il existe un unique processus ponctuel N^T stationnaire sur T tel que

$$N^T(\theta(\omega)) = N^T(\omega) + 1_{\{X_1 = +\}} \delta_{L_1^{-1}\{X_1 = -, N^T[0, 1] \neq \emptyset\}} \delta_{t_1(L_1, N^T)}$$

en particulier

$$N^T[0, 1](\theta(\omega)) = (N^T[0, 1](\omega) + 1_{\{X_1 = +\}} - 1_{\{X_1 = -\}})^+ \text{ (avec } a^+ = \text{Max} \{ a, 0 \} \text{)}.$$

En identifiant la loi des deux membres de l'expression précédente, on en déduit que $N^T[0, 1]$ suit une loi géométrique de paramètre p/q , et donc

$$\text{que } N^T \text{ est d'intensité } E(N^T[0, 1]) = \frac{p}{1-2p}.$$

Par récurrence, il est clair que $N_n^T \ll N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ainsi $N^T \ll N$, en particulier $N^T[x, 1] \leq N[x, 1]$, en intégrant $E(N^T[x, 1]) \leq \alpha \log(1/x)$,

$$\text{soit } \alpha \geq \frac{1-x}{\log(1/x)} \frac{p}{1-2p}. \text{ Faisant } x \rightarrow 1 \text{ on obtient } \alpha \geq \frac{p}{1-2p}.$$

Nous terminons par deux estimations, l'une concerne le taux de conver-

gence de $N_n[0, 1]$ vers $+\infty$, l'autre le calcul de l'espérance de la durée de vie d'une particule.

PROPOSITION 3.6. — (Un taux de convergence de $E(N_n[0, 1])$ vers $+\infty$)

$$E(N_n[0, 1]) \geq \frac{p}{q} \log(n) + o(1).$$

□ Si $k < n$ et $X_k = +$, ce $+$ figurera à $t = n$ si tous les $-$ qui arrivent après $t = k$ sont $> L_k$, ainsi

$$\begin{aligned} N_n[0, 1] \circ \theta^n &\geq \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k = +, L_k < \inf \{L_i/X_i = -, k < i \leq n\}\}} \\ M_n = E(N_n[0, 1]) &\geq p \sum_{k=1}^n P(L_k < \inf \{L_i/X_i = -, k < i \leq n\}) \\ M_n &\geq p \sum_{k=0}^n \int_0^1 (p + q(1-x))^k dx \\ M_n &\geq \sum_0^n \frac{p}{q} \frac{1-p^{k+1}}{k+1} = \frac{p}{q} H_n - p/q \sum_0^n \frac{p^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

où H_n est la série harmonique, un résultat classique sur celle-ci nous donne la relation voulue. □

PROPOSITION 3.7. — Si $\tau_x = \inf \{k > 0 / t_D(x) \circ \theta^{k-1} \leq L_k \leq x, X_k = -\}$, pour $x \in]0, 1]$, τ_x est le temps de vie d'un $+$ arrivé à $t=0$ en x , $E(\tau_x) = \frac{\alpha}{px}$.

□ Soit $\phi_n(x, \omega)$ le nombre de $+$ présents à $t = -n$ et $t = 0$ dans l'intervalle $[x, 1]$, il est clair que $\phi_n(x, \omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ P. p. s. D'après (3)

$$N[x, 1] = \phi_n(x, \omega) + \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_{-k} = +, \tau_{L_{-k} \circ \theta^{-k}} > k, L_{-k} \geq x\}}$$

faisant $n \rightarrow +\infty$, on obtient P. p. s.

$$N[x, 1] = \sum_{k=0}^{+\infty} 1_{\{X_{-k} = +, \tau_{L_{-k} \circ \theta^{-k}} > k, L_{-k} \geq x\}}$$

en intégrant,

$$\begin{aligned}
 -\alpha \log(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} p \int_x^1 P(\tau_u > k) du, \\
 -\alpha \log(x) &= p \int_x^1 E(\tau_u) du.
 \end{aligned}$$

Ainsi $E(\tau_x) = \frac{\alpha}{px}$, Lebesgue presque partout, de la propriété d'homogénéité de la proposition 3.4, on déduit $E(\tau_x) = \frac{\alpha}{px}$, pour tout $x \in]0, 1]$. \square

4. CAS $p \geq 1/2$

Dans ce qui suit nous supposons $\Omega = ([0, 1] \times [0, 1])^{\mathbb{Z}}$ et P est la mesure de Lebesgue produit. Pour $\omega = (l_n, v_n)_n \in \Omega$, nous poserons $L_1(\omega) = l_1$, $v_1(\omega) = v_1$ et $\theta(\omega) = (l_{n+1}, v_{n+1})_n$.

De cette façon pour $p \in [0, 1]$, $(1_{\{v_k(\omega) \leq p\}})_k$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p .

Définissons la suite (N_n^p) de mesures ponctuelles aléatoires par

$$N_0^p \equiv 0$$

$$N_{n+1}^p(\theta(\omega)) = N_n^p(\omega) + 1_{\{v_1 \leq p\}} \delta_{L_1^{-1}\{v_1 > p, N_n^p[L_1, 1] \neq 0\}} \delta_{l_1(L_1, N_n^p)}.$$

Il est clair que pour $p \in [0, 1]$ fixé, (N_n^p) a même loi que (N_n) construit en 2. L'avantage de considérer les $(N_n^p)_{n,p}$ définis sur le même espace de probabilité réside dans le lemme suivant :

LEMME 4.1. — Si $0 \leq p \leq p' \leq 1$, $N_n^p \ll N_n^{p'}$.

\square Si T_p est l'opérateur sur les mesures ponctuelles défini par

$$T_p(N) = N + 1_{\{v_1 \leq p\}} \delta_{L_1^{-1}\{v_1 > p, N[L_1, 1] \neq 0\}} \delta_{l_1(L_1, N)}$$

le lemme 4.1 découle de la relation $T_p(N) \ll T_{p'}(N)$. \square

La proposition suivante est intuitive : pour $p \geq 1/2$ les N_n^p remplissent tous les intervalles de $[0, 1]$:

PROPOSITION 4.2. — Si $p \geq 1/2$, $0 \leq a < b \leq 1$ alors $\lim_n \uparrow N_n[a, b] = +\infty$ P. p. s.

\square Si $p' < 1/2$, d'après le lemme 4.1, $N_n^{p'}[a, b] \leq N_n^p[a, b]$, ainsi $N_n^{p'}[a, b] \leq \lim_n \uparrow N_n^p[a, b]$. Il suffit de montrer $\lim_{p' \uparrow 1/2} N_n^{p'}[a, b] = +\infty$.

Notons $t_D^{p'}(x) = t_D(x, N^{p'})$, comme $p \rightarrow N^p$ est croissante, il en va de même pour $p \rightarrow t_D^p(x)$. D'après la proposition 3.2, $E(t_D^{p'}(x)) = \frac{p'}{1-p'}x$ faisant $p' \uparrow 1/2$ on obtient $E(t_D^{1/2}(x)) = x$. Comme $t_D^{1/2}(x) \leq x$, on en déduit que P. p. s. pour $x \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $t_D^{1/2}(x) = x$, soit $\lim_{p' \rightarrow 1/2} N^{p'}[a, b] = +\infty$ P. p. s. \square

Nous terminons ce paragraphe par une loi des grands nombres : les + remplissent uniformément l'intervalle $[0, 1]$ avec l'intensité $p - q$:

PROPOSITION 4.3. — (*Loi des grands nombres*).

Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue à droite bornée

$$\frac{1}{n} N_n^p(f) = \frac{1}{n} \sum_{x, N_n^p(x) \neq 0} f(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L_1} (p - q) \int_0^1 f(u) du$$

en particulier $\frac{1}{n} N_n^p[a, b] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L_1} (p - q)(b - a)$. (avec $L_1 = L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$).

\square En itérant l'équation (2) on obtient

$$\begin{aligned} N_n^p(f) &= \sum_{k=1}^n 1_{\{v_1 \circ \theta^{-k} \leq p\}} f(L_1 \circ \theta^{-k}) \\ &\quad - \sum_{k=1}^n 1_{\{v_1 \circ \theta^{-k} > p, L_1 \circ \theta^{-k} \leq t_D(1, N_{n-k}^p \circ \theta^{-k})\}} f(t_1(L_1 \circ \theta^{-k}, N_{n-k}^p \circ \theta^{-k})). \end{aligned}$$

La loi classique des grands nombres nous donne

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{v_1 \circ \theta^{-k} \leq p\}} f(L_1 \circ \theta^{-k}) - 1_{\{v_1 \circ \theta^{-k} > p\}} f(L_1 \circ \theta^{-k}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L_1} (p - q) \int_0^1 f(u) du.$$

Il suffit de montrer que

$$\Delta_n = \frac{1}{n} \left[\sum_1^n f(L_1 \circ \theta^{-k}) - 1_{\{L_1 \circ \theta^{-k} \leq t_D(1, N_{n-k}^p \circ \theta^{-k})\}} f(t_1(L_1 \circ \theta^{-k}, N_{n-k}^p \circ \theta^{-k})) \right]$$

converge dans L_1 vers 0.

en intégrant, par indépendance de L_1 et N_k^p ,

$$E(|\Delta_n|) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E \left(\int_0^1 |f(x) - 1_{\{x \leq t_D(1, N_{n-k}^p \circ \theta^{-k})\}} f(t_1(x, N_{n-k}^p \circ \theta^{-k}))| dx \right)$$

d'après la proposition précédente $t_1(x, N_k^p) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$ P.p.s., le théorème de convergence dominée et la continuité à droite de f nous permettent de conclure. \square

RÉFÉRENCES

- R. KARP, M. LUBY, A. MARCHETTI-SPACCAMELA, *A probabilistic analysis of multi-dimensional bin-packing problems*. IEEE, Proceedings of the 16th Symposium on the Theory of Computing, Washington, 1984, p. 289-298.
- J. NEVEU, Cours sur les processus ponctuels. *Lecture notes in Math*, n° 598, Springer-Verlag, 1976.
- V. STRASSEN, The existence of probability measures with given marginals. *Ann. of Math. Statistics*, 1965, p. 423-439.

(Manuscrit reçu le 13 mars 1986)

(Corrigé le 9 juin 1986)