ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. KIPNIS

Fluctuations des temps d'occupation d'un site dans l'exclusion simple symétrique

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 1 (1987), p. 21-35

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_1_21_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 23, n° 1, 1987, p. 21-35. *Probabilités et Statistiques*

Fluctuations des temps d'occupation d'un site dans l'exclusion simple symétrique

par

C. KIPNIS
Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex

RÉSUMÉ. — Nous démontrons que le temps d'occupation d'un site dans l'exclusion simple symétrique converge après une renormalisation convenable vers une variable gaussienne.

ABSTRACT. — We prove that properly renormalized the fluctuations in the occupation time of a site in the simple exclusion converge to a normal random variable.

Key-words and phrases: Infinite particle system, central limit theorem for martingales.
AMS classification number: 60 K 35.

1. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des fluctuations du temps d'occupation d'un site dans un processus d'exclusion simple en régime stationnaire. Nous considérons donc un processus d'exclusion simple sur $\mathbb{Z}^d$ de matrice de transition $p(x, y)$ avec $p(x, y)$ égal à $\frac{1}{2d}$ si $|x - y| = 1$ et à zéro dans tous les autres cas, avec pour distribution initiale une mesure de Bernoulli de paramètre ρ, notée désormais μ_ρ. La variable d'occupation du site x à l'instant s étant notée $\eta_s(x)$, nous nous intéressons à la quantité

$$S_t := \int_0^t \eta_s(0)ds$$

qui représente donc la quantité de temps entre 0 et t où le site 0 a été occupé par une des particules du système infini.

Puisque les mesures de Bernoulli sont les mesures invariantes extrémales de l'exclusion simple symétrique, nous savons que S_t/t tend P_{μ_ρ}-presque sûrement vers la constante ρ.

L'étude des fluctuations à l'équilibre consiste à trouver la fonction $n(t)$ pour laquelle les variables aléatoires

$$Z_t = n(t)(S_t - t\rho)$$

convergent en loi vers une variable aléatoire non dégénérée. Nous démontrons ici que la fonction $n(t)$, qui dépend de la dimension d, est donnée par :

$$n(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} & \text{si} \quad d \geq 3 \\ (t \log t)^{-\frac{1}{2}} & \text{si} \quad d = 2 \\ t^{-3/4} & \text{si} \quad d = 1 \end{cases}$$

et que la loi limite est alors une loi normale.

Les raisons pour étudier les fluctuations d'une telle quantité sont de deux ordres. D'une part une étude analogue a déjà été faite dès 1965 sur des systèmes de particules sans interaction [7]. On pouvait donc espérer voir les effets de l'interaction sur ces quantités. De ce point de vue les résultats obtenus ici sont décevants car le système d'exclusion simple symétrique se comporte, du point de vue de la fonction renormalisante, exactement comme le système sans interaction. Ce n'est que dans le cas où la marche sous-jacente a une dérive non nulle que l'on doit s'attendre à un comportement différent pour les deux systèmes si l'on en croit une conjecture de [9].

D'autre part le temps d'occupation constitue une fonctionnelle additive du processus de Markov considéré. Sous l'hypothèse de symétrie de $p(x, y)$ la mesure μ_ρ est non seulement invariante mais même réversible. L'étude du théorème central limite pour certaines fonctionnelles additives de processus réversibles a déjà été abordée dans [5] sous une hypothèse d'intégrabilité de la fonction de corrélation entre les variables d'occupation aux temps 0 et t. On voit ici s'introduire naturellement une généralisation de ce théorème, ainsi que les limites de la méthode employée.

Nous donnons au paragraphe 3 une démonstration directe du théorème principal, basée sur le fait, particulier à l'exclusion simple, que nous pouvons calculer explicitement les fonctions de corrélation grâce à la propriété d'association.

2. NOTATIONS, RAPPELS ET RÉSULTATS

Nous commençons par rappeler les faits essentiels sur le processus d'exclusion simple qui nous serviront ici. Nous renvoyons le lecteur au livre de T. Liggett [6] pour les démonstrations.

Étant donnée sur $\mathbb{Z}^d$ une matrice de transition $p(x, y)$ invariante par translation (c'est-à-dire satisfaisant $p(x, y) = p(0, y - x)$) et symétrique (i. e. $p(0, z) = p(0, -z)$) on considère le processus défini sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ de prégénérateur L

$$\mathrm{L}f(\eta) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} \eta(x)(1 - \eta(y))p(x, y)[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)].$$

où $\eta^{x,y}$ désigne la configuration où les valeurs d'occupation de x et y ont été échangées. Ce processus vérifie la formule d'autoassociation suivante pour tout ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{Z}^d$ fini :

$$\mathrm{E}_\eta\left(\prod_{u\in\mathrm{A}} \eta_t(u)\right) = \mathrm{E}_\mathrm{A}\left(\prod_{u\in\mathrm{A}_t} \eta(u)\right)$$

où l'on identifie une partie finie A avec la configuration qui vaut 1 si $x \in \mathrm{A}$ et 0 sinon. Dans la formule précédente A_t est la configuration obtenue à partir de A en suivant l'évolution d'exclusion simple symétrique. On notera P_t le semi-groupe du processus d'exclusion simple.

En particulier si $\mathrm{A} = \{x_0\}$ cette formule s'écrit

$$\mathrm{P}_\eta(\eta_t(x_0) = 1) = \sum_y p_t(x_0, y)\eta(y) \tag{1}$$

où $p_t(x, y)$ désigne le noyau de transition de la marche à temps continu : $p_t(x, y) = e^{-t}\Sigma \frac{t^n}{n!} p_n(x, y)$. Nous nous spécialisons ici au cas où $p(x, y) = \frac{1}{2d}$ si $|x - y| = 1$ et 0 sinon.

Les mesures produit $\mu_\rho(\eta(x_1) = 1, \ldots, \eta(x_n) = 1) = \rho^n$ sont invariantes extrémales pour le processus d'exclusion simple et elles sont aussi réversibles au sens où l'on a l'égalité :

$$\mathrm{E}_{\mu_\rho}(\varphi_0(\eta_0)\varphi_1(\eta_{t_1})\varphi_2(\eta_{t_2}) \ldots \varphi_n(\eta_{t_n})) = \mathrm{E}_{\mu_\rho}(\varphi_n(\eta_0)\varphi_{n-1}(\eta_{t_n - t_{n-1}}) \ldots \varphi_0(\eta_{t_n}))$$

ce qui se vérifie en remarquant que l'opérateur non borné L est auto-adjoint dans $L^2(\mu_\rho)$:

$$\int f \mathrm{L} g d\mu_\rho = \int g \mathrm{L} f d\mu_\rho .$$

Du fait de l'extrémalité des μ_ρ parmi les mesures invariantes on obtient que P_{μ_ρ}-p. s. et dans $L^1(P_{\mu_\rho})$ on a en particulier

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \eta_s(0) ds = \rho .$$

Nous démontrons ici le

THÉORÈME. — *Sous* P_{μ_ρ}, *les variables aléatoires* $n(t) \int_0^t (\eta_s(0) - \rho) ds$ *convergent en loi vers une variable normale centrée de variance* $\sigma^2(\rho, d)$ *avec*

— $d \geq 3 : n(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \sigma^2(\rho, d) = 2\rho(1-\rho) \int_0^\infty P_u(0, 0) du$

— $d = 2 : n(t) = (t \log t)^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \sigma^2(\rho, d) = \rho(1-\rho) \dfrac{2}{\pi}$

— $d = 1 : n(t) = t^{-3/4}$ $\qquad \sigma^2(\rho, d) = \rho(1-\rho) \dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$.

Pour établir ce résultat nous aurons besoin par la suite des résultats suivants :

Pour tout couple x, y les processus

$$\tilde{v}_t^{x,y} = \sum_{s\leq t} 1_{(\eta_{s^-}(x) = \eta_s(y) = 1 ; \eta_{s^-}(y) = \eta_s(x) = 0)} - \int_0^t p(x, y) \eta_s(x)(1 - \eta_s(y)) ds$$

sont des martingales sommes compensées de sauts de taille un et donc vérifient aussi que

$$(\tilde{v}_t^{x,y})^2 - \int_0^t p(x, y) \eta_s(x)(1 - \eta_s(y)) ds$$

sont des martingales. De plus les $\tilde{v}_t^{x,y}$ sont deux à deux orthogonales puisqu'elles n'ont pas de saut commun.

Ces martingales sont les martingales fondamentales au sens où toute martingale s'exprime comme une somme d'intégrales stochastiques par rapport à ces martingales $v_t^{x,y}$.

Enfin du fait de la formule (1) nous verrons s'introduire naturellement par la suite les quantités

$$g(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(0, x)dt$$

et

$$u(t, x) = \int_0^t p_u(0, x)du$$

On notera en particulier, pour $d \geq 3$ $g(x) = \int_0^\infty p_u(0, x)du$ qui est la limite de $g(\lambda, x)$ quand $\lambda \to 0$. Dans le cas qui nous intéresse ces quantités s'étudient à partir de la formule

$$(1a) \qquad p_u(0, x) = e^{-u}\Sigma \frac{u^n}{n!} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi;\pi]^d} \hat{\varphi}(\theta)^n e^{-i\theta.x} d\theta$$

où

$$\hat{\varphi}(\theta) = \sum_z p(0, z)e^{i\theta.z}.$$

Pour toute formule relative aux marches aléatoires nous renvoyons à Spitzer [*8*] et plus particulièrement au chapitre 2 de ce livre.

Il reste à faire quelques calculs préliminaires qui en particulier expliqueront d'où proviennent les normalisations vues ci-dessus.

Pour alléger les notations nous noterons $\langle \quad \rangle$ les espérances E_{μ_ρ}. On a au vu de la formule (1) :

$$s^2(t, \rho) = \left\langle \left(\int_0^t (\eta_s(0) - \rho)ds \right)^2 \right\rangle = \rho(1 - \rho) \int_0^t da \int_0^t p_{|a-s|}(0, 0)ds$$
$$= 2\rho(1 - \rho) \int_0^t u(a, 0)da.$$

Ceci montre que si

— $d > 3$ $\lim t^{-1}s^2(t, \rho) = 2\rho(1 - \rho)g(0)$

— $d = 2$ $\lim (t \log t)^{-1}s^2(t, \rho) = \rho(1 - \rho)\frac{2}{\pi}$

— $d = 1$ $\lim t^{-3/2}s^2(t, \rho) = \rho(1 - \rho)\frac{8}{3\sqrt{2\pi}}$.

Ceci donne l'ordre de grandeur du terme renormalisant.

Enfin la formule (1a) permet d'établir quand $u \to \infty$

$$(2) \qquad P_u(0, 0) \sim \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} \frac{1}{u^{d/2}}$$

qui grâce au Théorème Tauberien (cf. Feller [3] pp. 442 ff) permet d'étudier lorsque λ tend vers zéro certaines quantités du genre de :

$$\begin{aligned}\sum_x g(\lambda, x)^2 &= \sum_x \int_0^\infty ds \int_0^\infty dte^{-\lambda t}e^{-\lambda s}p_t(0, x)p_s(x, 0)\\ &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty dte^{-\lambda(t+s)}p_{t+1}(0, 0)\\ &= 2\int_0^\infty e^{-\lambda u}up_u(0, 0)du\,.\end{aligned}$$

3. DÉMONSTRATION

Notre stratégie pour démontrer le Théorème va consister à se ramener au Théorème central limite pour les martingales. Cependant nous allons devoir adapter la méthode différemment suivant la dimension.

3.1. Cas où $d \geq 3$.

Pour $\lambda > 0$, posons $G_\lambda(\eta) = \sum_x g(\lambda, x)(\eta(x) - \rho)$. On vérifie facilement que par auto-dualité du processus d'exclusion simple on a l'égalité :

$$G_\lambda(\eta) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(E_\eta(\eta_t(0)) - \rho)dt$$

et donc que G_λ vérifie l'équation

$$\lambda G_\lambda(\eta) - LG_\lambda(\eta) = (\eta(0) - \rho)$$

où L est le générateur du processus d'exclusion simple symétrique. Il s'en suit que l'on a l'égalité :

$$\int_0^t (\eta_s(0) - \rho)ds = -G_\lambda(\eta_t) + G_\lambda(\eta_0) + \lambda\int_0^t G_\lambda(\eta_s)ds + M_t^\lambda \tag{3}$$

où M_t^λ est la martingale

$$M_t^\lambda = \Sigma \int_0^t G_\lambda(\eta_{s-}^{xy}) - G_\lambda(\eta_{s-})d\nu_s^{x,y} = \sum_x \sum_y [g(\lambda, x) - g(\lambda, y)]\nu_t^{x,y}\,.$$

Nous allons utiliser la formule (3) avec $\lambda = 1/t$. Vérifions que tous les termes, hormis le terme martingale, tendent alors vers zéro en probabilité. Il suffit pour cela de vérifier que $\frac{1}{t}\langle G_{1/t}^2 \rangle$ tend vers zéro. Or

$$(4) \quad \langle G_{1/t}^2 \rangle = 2\rho(1-\rho)\sum_x g(t^{-1}, x)^2 = \rho(1-\rho)\int_0^\infty ve^{-v/t}p_v(0,0)dv\,.$$

En utilisant les théorèmes tauberiens de Feller [3] on obtient la conclusion désirée pour $d \geq 3$.

Quant au terme martingale, on constate que la martingale

$$M_t = \sum_x \sum_y (g(x) - g(y))\tilde{\nu}_t^{x,y}$$

est bien définie puisque $\sum_{x,y} p(x,y)(g(y) - g(x))^2$ est fini (et vaut $2g(0)$) et que de plus les martingales M_t^λ convergent quand λ tend vers zéro vers M_t.

Il suffit donc d'appliquer le théorème central limite pour les martingales. Rappelons ici la démonstration puisque des modifications de celle-ci nous serviront dans le cas des dimensions inférieures à trois.

Posons pour alléger les notations :

$$A(\theta, t) = \sum_x \sum_y p(x,y)\,[e^{i\theta(g(x)-g(y))} - i\theta(g(x)-g(y)) - 1]\,.\int_0^t \eta_s(x)(1-\eta_s(y))ds.$$

Alors, puisque $\sum_x \sum_y [1 - \cos\theta(g(x) - g(y))]p(x,y)$ est convergent, la quantité $N_t^\theta = \exp\{\, i\theta M_t - A(\theta, t)\,\}$ est une martingale. Dans ces conditions avec $\sigma^2 = 2g(0)\rho(1-\rho)$

$$E(\exp i\theta M_t/\sqrt{t}) - e^{-\sigma^2\frac{\theta^2}{2}} = E\left(N_t^{\theta/\sqrt{t}}\,.\,(e^{A(\theta/\sqrt{t},t)} - e^{-\sigma^2\frac{\theta^2}{2}})\right).$$

De plus on a l'inégalité

$$(5) \qquad |N_t^{\theta/\sqrt{t}}| < \exp t\sum_x \sum_y p(x,y)\left(1 - \cos\left[\frac{\theta}{\sqrt{t}}(g(x) - g(y))\right]\right).$$

On constate que cette quantité est bornée pour tout t, puisqu'elle est majorée pour t assez grand par $\exp C \sum_x \sum_y p(x, y)(g(x) - g(y))^2$.

En notant K ce majorant on en tire

$$\left| E\left(\exp i\theta \frac{M_t}{\sqrt{t}}\right) - e^{-\sigma^2 \frac{\theta^2}{2}} \right| \leq KE(| e^{A\left(\frac{\theta}{\sqrt{t}}, t\right)} - e^{-\sigma^2 \frac{\theta^2}{2}} |. \tag{6}$$

Cette dernière quantité sous le signe espérance est elle-même bornée et il suffit donc de vérifier que $A\left(\frac{\theta}{\sqrt{t}}, t\right)$ tend vers $-\sigma^2 \frac{\theta^2}{2}$ en probabilité. Or pour t assez grand

$$\left| A\left(\frac{\theta}{\sqrt{t}}, t\right) + 2\rho(1-\rho)g(0)\frac{\theta^2}{2} \right| \leq C\left[\frac{1}{\sqrt{t}} \Sigma p(x, y)(g(x) - g(y))\right]^2 +$$
$$+ \frac{\theta^2}{2} \sum_x \sum_y p(x, y)(g(x) - g(y))^2 \left| \frac{1}{t} \int_0^t \eta_s(x)(-1 - \eta_s(y))ds - \rho(1-\rho) \right|.$$

Il reste donc à vérifier que le dernier terme tend vers zéro en probabilité, mais cela résulte de la convergence L^1 puisque l'espérance de sa valeur absolue est majorée par

$$\sum_x \sum_y p(x, y)(g(x) - g(y))^2 E\left(\left| \frac{1}{t} \int_0^t \eta_s(x)(1 - \eta_s(y))ds - \rho(1-\rho) \right|\right)$$

qui tend vers zéro par le théorème ergodique puisque nous travaillons avec une mesure extrémale μ_ρ et parce qu'il n'apparaît ici qu'un nombre fini de fonctions (à une invariance par translation près).

Nous voyons donc que la démonstration se fait en deux étapes. Dans un premier temps on démontre que $A\left(\frac{\theta}{\sqrt{t}}, t\right)$ reste borné, puis que l'on a convergence en probabilité de ce terme vers σ^2. C'est cette structure que nous reproduisons par la suite.

3.2. **Cas où $d = 2$.**

On utilise la même décomposition (3) que dans le cas précédent. On voit que $\langle G_\lambda^2 \rangle$ se comporte asymptotiquement, lorsque λ tend vers zéro, toujours en utilisant la formule (2), comme $-\log \lambda$.

Avec la normalisation $(t \operatorname{Log} t)^{-\frac{1}{2}}$ les termes distincts du terme martingale convergent donc encore en probabilité vers zéro si l'on fait tendre λ vers zéro comme $1/t$. Cependant ici les martingales M_t^λ ne convergent pas lorsque λ tend vers zéro puisque $E((M_t^\lambda)^2)=t.\sum_x\sum_y p(x,y)(g(\lambda,x)-(\lambda,y))^2$ diverge comme $-\log\lambda$ lorsque λ tend vers zéro. Néanmoins pour démontrer que $E\left(\exp i\frac{\theta M_t^{1/t}}{\sqrt{t\log t}}\right)$ converge vers $\exp -\frac{\theta^2}{2}\sigma^2$ lorsque t tend vers l'infini on constate en se reportant à la démonstration précédente qu'il suffit de vérifier que

$$\frac{\theta^2}{2t\log t}\Sigma\left(g\left(\frac{1}{t},x\right)-g\left(\frac{1}{t},y\right)\right)^2 p(x,y).t$$

reste borné (ce qui résulte de l'estimée (2)) et que

$$\frac{1}{\log t}\sum_{x,y}\left(g\left(\frac{1}{t},x\right)-g\left(\frac{1}{t},y\right)\right)^2 p(x,y)\left|\frac{1}{t}\int_0^t \eta_s(x)(1-\eta_s(y))ds-\rho(1-\rho)\right|$$

converge vers zéro en probabilité. Comme précédemment ceci résulte du théorème ergodique et du fait que

$$\frac{1}{\operatorname{Log} t}\Sigma\left[g\left(\frac{1}{t},x\right)-g\left(\frac{1}{t},y\right)\right]^2 p(x,y)$$

reste borné.

3.3. **Cas où** $d = 1$.

La décomposition utilisée précédemment ne nous est plus utile car on constate rapidement que tous les termes sont du même ordre et que l'on ne peut donc se ramener, comme aux cas précédents, à l'étude du seul terme martingale. Nous allons donc prendre une autre décomposition en introduisant la martingale, à t fixé et $0 < s < t$

$$\begin{aligned} M_s^t &= E\left(\int_0^t (\eta_u(0)-\rho)du/\mathscr{F}_s\right) \\ &= \int_0^s (\eta_u(0)-\rho)du + \Sigma\left(\int_0^{t-s} p_u(0,x)du\right)(\eta_s(x)-\rho) \end{aligned}$$

avec $$M_0^t = \sum_x (\eta(x)-\rho).\int_0^t p_u(0,x)du\,.$$

On écrit donc

$$(7) \qquad \int_0^t (\eta_u(0) - \rho)du = \sum_x u(t, x)(\eta(x) - \rho) + M_t^t - M_0^t$$

et il s'agit de traiter simultanément le terme martingale et le terme non dynamique M_0^t. Un calcul long mais élémentaire montre que la martingale $M_s^t - M_0^t$ s'écrit aussi $\sum_x \sum_y \int_0^s u(t - v, x)d\tilde{v}_v^{x,y} - d\tilde{v}_v^{y,x}$.

On étudie alors

$$(8) \quad E\left(\exp i\theta t^{-3/4} \int_0^t (\eta(0) - \rho)ds\right) - e^{-\sigma^2\frac{\theta^2}{2}}$$
$$= E(\exp i\theta t^{-3/4}(M_0^t + M_t^t - M_0^t)) - e^{-\sigma^2\frac{\theta^2}{2}}$$

où $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Nous pouvons séparer l'étude de $M_t^t - M_0^t$ et celle de M_0^t grâce à l'inégalité

$$|E_{\mu_\rho}(e^{i\theta t^{-3/4}(M_t^t - M_0^t + M_0^t)}) - e^{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\frac{\theta^2}{2}}|$$
$$\leq \int \mu_\rho(d\eta)|E_\eta(e^{i\theta t^{-3/4}(M_t^t - M_0^t)}) - e^{-\sigma_1^2\theta^2/2}| + |E_{\mu_\rho}(e^{i\theta t^{-3/4}M_0^t}) - e^{-\sigma_2^2\theta^2/2}|.$$

Nous commençons par étudier le premier terme du membre de droite.

Posons $a(v, x, y) = u(v, x) - u(v, y)$ et commençons par remarquer que l'expression

$$\exp i\theta t^{-3/4}(M_t^t - M_0^t) - \sum_{x,y} \int_0^t (e^{i\theta t^{-3/4}a(t-v,x,y)} -$$
$$- i\theta t^{-3/4}a(t-v, x, y) - 1)p(x, y)\eta_v(x)(1 - \eta_v(y))dv$$

est d'intégrale égale à un et est bornée en valeur absolue par :

$$\exp C \sum_{x,y} \frac{\theta^2}{2} t^{3/2} \int_0^t a(t - v, x, y)^2(\eta_v(x) - \eta_v(y))^2 p(x, y)dv\,.$$

De plus, dans le cas qui nous intéresse ici les seuls termes non nuls sont obtenus pour $|x - y| = 1$ et donc le terme apparaissant dans l'exponentielle est majoré, uniformément en η par :

$$C\frac{\theta^2}{2} t^{-3/2} \sum_x \int_0^t a(t - v, x, x + 1)^2 dv\,.$$

Or, chaque terme $a^2(v, x, x+1) := b(v, x)$ croît vers 1 quand v tend vers l'infini. Donc on peut majorer encore par :

$$C\frac{\theta^2}{2}t^{-3/2}\sum_{x\geq 0}\int_0^t\int_0^v (p_u(0, x) - p_u(0, x+1))dudv$$

$$= C\frac{\theta^2}{2}t^{-3/2}\int_0^t\int_0^v p_u(0, 0)dudv$$

qui converge lorsque t tend vers l'infini puisque $p_u(0, 0)$ est équivalent à $u^{-\frac{1}{2}}$. La majoration uniforme que nous venons d'obtenir prouve que pour montrer la convergence il suffit d'étudier le comportement sous P_{μ_ρ} de

$$t^{-3/2}\sum_x\int_0^t b(t-v, x)(\eta_v(x) - \eta_v(x+1))^2 dv\,.$$

Par réversibilité du processus d'exclusion simple symétrique il suffit donc d'établir que

$$(9) \qquad t^{-3/2}\int_0^t\sum_x b(v, x)\left[(\eta_v(x) - \eta_v(x+1))^2 - 2\rho(1-\rho)\right]dv$$

converge vers zéro en P_{μ_ρ} probabilité et que :

$$(10) \qquad t^{-3/2}\int_0^t\sum_x b(v, x)dv)\rho(1-\rho) \to \sigma_1^2\,.$$

Pour étudier ces quantités introduisons la fonction

$$\rho(u, y) = \sum_{n\geq 0}(p_u(0, n) - p_u(0, n+1))1_{[n, n+1[}(y)$$

qui permet d'exprimer (10) sous la forme

$$(11) \qquad 2t^{-3/2}\int_0^t dv\int_0^\infty dy\left(\int_0^v \rho(u, y)du\right)^2.$$

Remarquons tout de suite que $\int_0^v \rho(u, y)du$ est positive et bornée par 1. De plus, après changement de variable la quantité (11) vaut :

$$2\int_0^1 da\int_0^\infty db\left(\int_0^a t\rho(ct, b\sqrt{t})dc\right)^2.$$

A partir de la formule

$$\mathrm{P}_u\, 0, n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-u(1-\cos\theta)} \cos\theta_x d\theta$$

on obtient

$$t\rho(ct, b\sqrt{t}) = \frac{t}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\left(b\sqrt{t}+\frac{1}{2}\right).\sin\frac{\theta}{2}.\exp - ct(1-\cos\theta)d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_{-\pi\sqrt{t}}^{\pi\sqrt{t}} \sin\frac{\theta}{\sqrt{t}}\left(b\sqrt{t}+\frac{1}{2}\right).\sin\frac{\theta}{2\sqrt{t}}\exp - ct\left(1-\cos\frac{\theta}{\sqrt{t}}\right)d\theta$$

grâce à la minoration $1 - \cos\theta \geq c\theta^2$ on peut appliquer le théorème de Lebesgue et obtenir que $t\rho(ct, b\sqrt{t})$ tend vers

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \theta \sin\theta b \exp - c\frac{\theta^2}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{c}.\cos\theta b.\exp - c\frac{\theta^2}{2}d\theta = \frac{b}{c\sqrt{2\pi c}}\exp - b^2/2c = f(b, c).$$

De plus :

$$\int_0^1 da\int_0^\infty db\int_0^a f(b, c)dc = \int_0^1 da\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi c}}dc.$$

Par ailleurs on a aussi

$$\int_0^1 da\int_0^\infty db\int_0^a t\rho(ct, b\sqrt{t})dc = \int_0^1 da\int_0^a dc\int_0^\infty t\rho(ct, b\sqrt{t})db. \tag{12}$$

Mais

$$\int_0^\infty \rho(u, y)dy = \sum_0^\infty p_u(0, n) - p_u(0, n+1) = p(0, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-u(1-\cos\theta)}d\theta$$

et donc (12) converge aussi vers $\displaystyle\int_0^1 da\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2\pi c}}dc.$

Les intégrants étant positifs le lemme de Deny-Scheffe implique donc que

$$\int_0^1 da\int_0^\infty db\int_0^a |\, t\rho(ct, b\sqrt{t}) - f(b, c)\,|\, dc \to 0.$$

Ceci implique en particulier, puisque $\int_0^a t\rho(ct, b\sqrt{t})dc$ est uniformément borné, que

$$\int_0^1 da \int_0^\infty db \left| \left(\int_0^a t\rho(ct, b\sqrt{t})dc \right)^2 - \left(\int_0^a f(b, c)dc \right)^2 \right| \to 0 .$$

Ceci montre d'une part que

$$\left(t^{-3/2} \int_0^t \sum_x b(v, x)dx \right) \rho(1 - \rho)$$
$$\to 2\rho(1 - \rho) \int_0^1 da \int_0^\infty db \left(\int_{\frac{b}{\sqrt{a}}}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp - \alpha^2/2 d\alpha \right)^2$$

ainsi que la convergence en probabilité vers zéro de

$$(13) \quad = t^{-3/2} \int_0^t \sum_x b(v, x)((\eta_v(x) - \eta_v(x + 1))^2 - 2\rho(1 - \rho))dv$$
$$- t^{-3/2} \int_0^t \sum_x \psi(vt^{-1}, xt^{-\frac{1}{2}})((\eta_v(x) - \eta_v(x + 1)^2 - 2\rho(1 - \rho))dv$$

où l'on a posé

$$\psi(a, b) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{|b|}{\sqrt{a}}} \exp - \alpha^2/2 d\alpha \right)^2 .$$

Enfin, la norme L^2 du second terme de (13) vaut :

$$(14) \qquad t^{-3} \int_0^t du \int_0^t dv \sum_x \sum_y \psi(vt^{-1}, xt^{-\frac{1}{2}})\psi(ut^{-1}, yt^{-\frac{1}{2}})c(u, v, x, y)$$

avec $c(u, v, x, y)$ égal par définition à

$$E_{\mu_\rho}((\eta_v(x) - \eta_v(x + 1))^2(\eta_u(y) - \eta_u(y + 1))^2) - 4\rho^2(1 - \rho) .$$

Puisque nous avons pour $c(u, v, x, y)$ une majoration de la forme $c(u, v, x, y) \leqslant Kp_{|u-v|}(0, |x - y|)$ on voit que multiplié par $t^{\frac{1}{2}}$ (14) est majoré par une quantité qui tend vers $K \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}} dx \psi(s, x) \int_s^1 E_x(\psi(v - s, \beta_{v-s}))dv$ où β_v est un Brownien standard et est donc fini.

Enfin il reste à traiter le terme $E_{\mu_\rho}(e^{i\theta t^{-3/4} M_0^t})$. Mais par indépendance des variables $\eta(x)$ ce terme vaut $\prod_{n \in \mathbb{Z}} f_t(n)$ où $f_t(n)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} f_t(n) &= \rho \cos \theta \,.\, t^{-3/4}(1-\rho) u(t,n) + (1-\rho) \cos \theta \,.\, t^{-3/4} \rho u(t,n) \\ &\quad + i\,[\rho \sin \theta \,.\, t^{-3/4}(1-\rho) u(t,n) - (1-\rho) \sin \theta \,.\, \rho t^{-3/4} u(t,n)]\,. \end{aligned}$$

Puisque les quantités $t^{-3/4}u(t,n)$ sont majorées par $t^{-3/4}u(t,0)$ qui tend vers zéro comme $t^{-1/4}$ on voit que la convergence lorsque t tend vers l'infini de ces produits infinis se ramène à montrer que $t^{-3/2}\Sigma(u(t,n))^2$ converge et que $t^{-9/4}\Sigma(u(t,n))^3$ tend vers zéro. Ceci se fait de la même manière que précédemment pour (10) et nous donne en particulier que $t^{-9/4}\Sigma u(t,n)^3$ est de l'ordre de $t^{1/4}$ alors que $t^{-3/2}\Sigma u(t,n)$ tend vers

$$\int_{-\infty}^{\infty} da \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{a^2}{2b}} db \right)^2 = \frac{4}{3} \,.\, \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}. \qquad \blacksquare$$

4. REMARQUES ET CONJECTURES

4.1. Lors de la démonstration du théorème en dimension $d \geq 3$ on aurait pu être tenté d'introduire la fonction $G(\eta) = \Sigma g(x)(\eta(x) - \rho)$ qui résout formellement l'équation

$$LG = \eta(0) - \rho\,.$$

Remarquons que si $d \leq 4$ cette fonction n'est pas dans L^2. Le théorème de Gordin-Lifsic [*4*] ne s'applique pas ici et nous avons donc utilisé la méthode de [*5*].

4.2. La démonstration utilisée ici peut évidemment s'étendre à d'autres marches que celle étudiée ici. Néanmoins nous avons utilisé à plusieurs reprises que le support de $p(0, x)$ était fini faute d'avoir des estimées suffisamment précises dans les théorèmes ergodiques. Il est vraisemblable que le résultat reste vrai pour toutes les marches ayant un second moment fini.

4.3. Les résultats obtenus ici s'accordent bien avec un résultat partiel de grandes déviations dû à Arratia [*1*] qui démontre que le logarithme de $P_{\mu_\rho}\left(\int_0^t \eta_s(0)ds = 0\right)$ divisé par $t^{\frac{1}{2}}$ est borné inférieurement et supérieurement.

Un problème naturel dans ces conditions est donc l'étude des grandes déviations pour les temps d'occupations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ARRATIA, Symmetric exclusions processes: a comparison inequality and a large deviation result. *Annals of Prob.*, t. **13**, 1985, p. 53-61.

[2] C. COCOZZA, C. KIPNIS, Existence de processus Markoviens pour des systèmes infinis de particules. *Ann. I. H. P.*, t. **13**, 1977, p. 239-258.

[3] W. FELLER, *An introduction to probability and its applications.* Vol. 2 (2nd edition), J. Wiley and Sons, 1966, New York.

[4] M. I. GORDIN, B. A. LIFSIC, The central limit theorem for stationary Markov processes, *Sov. Math. Dokl.*, t. **19**, 1978, p. 392-394.

[5] C. KIPNIS, S. R. S. VARADHAN, Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes, *Comm. Math. Phys.*, t. **104**, 1986, p. 1-19.

[6] T. LIGGETT, Infinite particle systems, *Grundlehren der Math.*, n° 276, 1985, Springer-Verlag.

[7] S. PORT, Equilibrium processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **124**, 1966, p. 168-184.

[8] F. SPITZER, *Principles of random walk*, 1964, Van Nostrand Princeton.

[9] H. VAN BEIJEREN, R. KUTNER, H. SPOHN, Excess noise for driven diffusive systems, *Phys. Rev. Let.*, t. **54**, 1985, p. 2026.

(Manuscrit reçu le 24 septembre 1985)

(Révisé le 15 avril 1986)