

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. LAPEYRE

## **Estimations de grandes déviations pour des systèmes où apparaissent un bruit Gaussien et un bruit non Gaussien**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 22, n° 1 (1986), p. 9-17

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1986\\_\\_22\\_1\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_1_9_0)

© Gauthier-Villars, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# **Estimations de grandes déviations pour des systèmes où apparaissent un bruit Gaussien et un bruit non Gaussien**

par

**H. LAPEYRE (\*) (\*\*)**

Laboratoire de Probabilités,  
4, Place Jussieu, Paris

---

**RÉSUMÉ.** — On étudie les grandes déviations de systèmes différentiels aléatoires soumis à une perturbation mixte, par un processus rapide, satisfaisant certain résultat de grandes déviations, et un bruit blanc indépendants.

**ABSTRACT.** — We obtain large deviations estimates for stochastic differential systems pertubated by both a rapid process, satisfying some result of large deviations, and a white noise, independants.

---

## 0. INTRODUCTION

On considère sur  $[0, T]$  le système :

$$(S_{\xi, \sigma}) dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon \sigma}(X_t^\varepsilon) dW_t, \quad X_0^\varepsilon = x \in \mathbb{R}^d$$

---

(\*) Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, Tour 56, 4, Place Jussieu, 75006 Paris.

(\*\*) 48, Rue de Metz, 94700 Maisons Alfort.

où  $b$  et  $\sigma$  sont lipschitziennes bornées,  $W$  un brownien  $d$ -dimensionnel et  $\xi$  un processus indépendant de  $W$ .

Sous des hypothèses de moyenne sur  $b(x, \xi)$  :

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left( \int_0^T b(x, \xi_s) ds \right) = B(x)$ ,  $X^\varepsilon$  converge en probabilité vers le système déterministe  $X(x)$  solution de :

$$(S_d) dX_t = B(X_t) dt, X_0 = x.$$

On s'intéresse à la fiabilité du système  $X^\varepsilon$ , perturbation du système moyenné  $X$ .

On montre ici que si on connaît un résultat de grandes déviations sur  $\xi$  (précisément on suppose que  $\xi$  vérifie l'hypothèse (F) de Freidlin pour l'étude de  $(S_{\xi,0})$ , cf. [3]), on peut construire sur  $C([0, T], \mathbb{R}^d)$  une fonctionnelle contrôlant les grandes déviations de  $X^\varepsilon$ .

Précisément, on construit pour tout  $T > 0$  une fonctionnelle  $S_T$  vérifiant :

(0.1) Pour tout  $\alpha > 0$   $K_\alpha = \{ \varphi \in C_x([0, T], \mathbb{R}^d) \mid S_T(\varphi) \leq \alpha \}$  est compact.  
et

(0.2) Pour tout ouvert  $O$  de  $C_x([0, T], \mathbb{R}^d)$ ,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \text{Log } \mathbb{P}(X^\varepsilon(x) \in O) \geq - \inf_{\varphi \in O} S_T(\varphi).$$

(0.3) Pour tout fermé  $F$  de  $C_x([0, T], \mathbb{R}^d)$ ,

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \text{Log } \mathbb{P}(X^\varepsilon(x) \in F) \leq - \inf_{\varphi \in F} S_T(\varphi).$$

Une fonctionnelle vérifiant (0.1, 2, 3) pour une famille  $\{X(\varepsilon)\}$  de processus indexés par  $\varepsilon$  sera dite fonctionnelle d'action pour  $\{X(\varepsilon)\}$  (avec le paramètre  $\varepsilon$ ).

Ce problème posé par Kushner dans [5] n'est résolu que dans le cas  $\sigma$  constant. La difficulté essentielle posée par le cas  $\sigma$  quelconque est la minoration. On l'obtient en mélangeant les méthodes d'Azencott [1] (pour  $S_{0,\sigma}$ ) et Freidlin [3] (pour  $S_{\xi,0}$ ) (voir paragraphes I et IV).

## I. ESTIMATION PRÉLIMINAIRE

NOTATIONS. —  $B([0, T], \mathbb{R}^d)$  (resp  $C_x([0, T], \mathbb{R}^d)$ ) désigne l'ensemble des fonctions de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$  boréliennes bornées (resp continues valant  $x$  en 0). On les munit de la topologie uniforme.

$K$  désigne une constante de Lipschitz et de bornitude pour  $b$  et  $\sigma$ .

*Remarque préliminaire (I.1).* — Pour obtenir les estimations (0.2, 3), on s'intéressera au comportement de  $X^\varepsilon$  dans un tube autour d'une fonction  $\varphi$  de  $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ . Dans un tel tube on compare  $X^\varepsilon$  à  $X^{\varepsilon, \varphi}$ , solution de  $dX_t^{\varepsilon, \varphi} = b(X_t^{\varepsilon, \varphi}, \xi_{t/\varepsilon})dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^{\varepsilon, \varphi})dW_t$ .

Si  $\varphi$  est absolument continue, l'application  $F^\varphi$  définie sur  $(C([0, T], \mathbb{R}^d))^2$  par  $F^\varphi(g, f) = h$  si  $h_t = x + g_t + \sigma(\varphi_t)f_t + \int_0^t f_s d\sigma(\varphi)_s$ , est continue et  $X^{\varepsilon, \varphi}$  est l'image de  $(y^{\varepsilon, \varphi}, \sqrt{\varepsilon}W)$ , (où  $dy_t^{\varepsilon, \varphi} = b(y_t^{\varepsilon, \varphi}, \xi_{t/\varepsilon})dt$ ,  $y_0^{\varepsilon, \varphi} = 0$ ).

Ceci conduit à formuler l'estimation suivante, essentielle à la minoration.

Si  $g, f$  sont des fonctions de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$  absolument continues nulles en 0, on note  $B_x(g, f)$  la solution de  $\dot{\varphi}_t = \dot{g}_t + \sigma(\varphi_t)f_t$ ,  $\varphi_0 = x$ .

**PROPOSITION (I.2).** — Pour tous  $R, \delta, a > 0$ , tout  $x$  de  $\mathbb{R}^d$ , il existe  $\rho, r, \varepsilon_0$  ne dépendant que de  $R, \delta, a, x$  tels que si  $g, f$  sont des fonctions abs. continues telles que  $\|f\|_2 \leq a$ , si  $\varphi = B_y(g, f)$  où  $|x - y| \leq r$ ,

si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,

$$\mathbb{P}(\|X^\varepsilon(x) - \varphi\| > \delta, \|y^{\varepsilon, \varphi}(0) - g\| < \rho, \|\sqrt{\varepsilon}W - f\| < \rho) \leq \exp(-R/\varepsilon).$$

*Démonstration.* — i) On se ramène à l'étude du cas  $f = 0$  par changement

de probabilité. Posons  $dP^f = \exp\left(1/\sqrt{\varepsilon} \int_0^T \langle \dot{f}_s, dW_s \rangle - \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T |\dot{f}_s|^2 ds\right) \cdot dP$ .

Sous  $P^f$ ,  $W^f = W - (1/\sqrt{\varepsilon})f$  est un mouvement brownien et  $X^\varepsilon(x)$  solution de  $dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon, \xi_{t/\varepsilon}) + \sigma(X_t^\varepsilon)\dot{f}_t]dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^\varepsilon)dW_t^f$ ,  $X_0^\varepsilon = 0$ .

Notons

$$A(\rho) = \{ \|X^\varepsilon(x) - \varphi\| > \delta, \|y^{\varepsilon, \varphi}(0) - g\| < \rho, \|\sqrt{\varepsilon}W - f\| < \rho \}.$$

$$B(c) = \left\{ \left| (1/\sqrt{\varepsilon}) \int_0^T \langle \dot{f}_s, dW_s \rangle \right| \leq c \right\}.$$

D'après l'inégalité exponentielle [8],  $\mathbb{P}(B(c)^c) \leq 2d \exp(-c^2/2da\varepsilon)$ . On fixe  $c$  pour que  $\mathbb{P}(B(c)^c) \leq \exp(-R/\varepsilon)$  dès que  $\varepsilon < 1$ .  $c$  ne dépend que de  $R, a$ .  $\mathbb{P}(A(\rho)) \leq \mathbb{P}(A(\rho) \cap B(c)) + \mathbb{P}(B(c)^c) \leq \exp[(a+c)/\varepsilon] \mathbb{P}^f(A(\rho)) + \exp(-R/\varepsilon)$ . Il suffit donc de trouver  $\rho, \varepsilon_0, r$  ne dépendant que de  $R, a, x$ , tels que  $\mathbb{P}^f(A(\rho)) \leq \exp(-(R+a+c)/\varepsilon)$  si  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .

ii) Comportement local des trajectoires.

Pour tous  $M, m, a$ , il existe  $p_0$  et  $\varepsilon_0$  ne dépendant que de  $M, m, a$  tels que si  $p < p_0$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\|f\|_2 \leq a$ ,

$$\mathbb{P}^f\left(\sup_{|t-s|<p} |X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon| > m\right) \leq \exp(-M/\varepsilon).$$

En effet,

$$\begin{aligned} X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon &= \int_s^t [b(X_u^\varepsilon, \xi_{u/\varepsilon}) + \sigma(X_u^\varepsilon) \dot{f}_u] du + \sqrt{\varepsilon} \int_s^t \sigma(X_u^\varepsilon) dW_u^f. \\ |X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon| &\leq K(\sqrt{T} + \sqrt{a})\sqrt{|t-s|} + \left| \sqrt{\varepsilon} \int_s^t \sigma(X_u^\varepsilon) dW_u^f \right|. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité exponentielle,  $p_0$  et  $\varepsilon_0$  tels que  $K(\sqrt{T} + \sqrt{a})\sqrt{p_0} < m/2$  et  $2d \exp[-m^2/(8dK^2p_0\varepsilon)] < \exp(-R/\varepsilon)$  conviennent.

$$\begin{aligned} \text{iii) } X_t^\varepsilon - \varphi_t &= x - y + \int_0^t [b(X_u^\varepsilon, \xi_{u/\varepsilon}) + \sigma(X_u^\varepsilon) \dot{f}_u] du + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \sigma(X_u^\varepsilon) dW_u^f \\ &\quad - \int_0^t [b(\varphi_u, \xi_{u/\varepsilon}) + \sigma(\varphi_u) \dot{f}_u] du + y^{\varepsilon, \varphi}(t) - g_t. \end{aligned}$$

$$|X_t^\varepsilon - \varphi_t| \leq r + K \int_0^t |X_s^\varepsilon - \varphi_s| [1 + |\dot{f}_s|] ds + \|y^{\varepsilon, \varphi} - g\| + \left\| \int_0^t \sqrt{\varepsilon} \sigma(X_s^\varepsilon) dW_s^f \right\|.$$

Par une forme de l'inégalité de Gromwall,

$$\|X^\varepsilon - \varphi\| \leq \exp K(T + \sqrt{2Ta}) \left( r + \|y^{\varepsilon, \varphi} - g\| + \left\| \int_0^t \sqrt{\varepsilon} \sigma(X_s^\varepsilon) dW_s^f \right\| \right).$$

Posons  $\delta_1 = \delta/3 \exp(-K(T + \sqrt{2Ta}))$ , supposons que  $\rho < \delta_1$  et  $r < \delta_1$ .

Alors :

$$\mathbb{P}^f(A(\rho)) \leq \mathbb{P}^f \left( \left\| \int_0^t \sqrt{\varepsilon} \sigma(X_t^\varepsilon) dW_t^f \right\| > \delta_1, \|\sqrt{\varepsilon} W^f\| < \rho \right).$$

Cherchons  $\rho$  pour que cette quantité soit majorée par  $\exp -R/\varepsilon$ .

iv) si  $X^{\varepsilon, n}$  désigne la discrétisée de  $X^\varepsilon$  suivant une subdivision de pas  $T/n$  il existe d'après ii)  $\varepsilon_0$  et  $n_0$  ne dépendant que de  $R, \alpha, a$  tels que si  $\varepsilon < \varepsilon_0$  et  $n < n_0$ ,

$$\mathbb{P}^f \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t^\varepsilon - X_t^{\varepsilon, n}| > \alpha \right) \leq \exp(-(a+c+R)/\varepsilon).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^f \left( \left\| \int_0^t \sqrt{\varepsilon} (\sigma(X_t^\varepsilon) - \sigma(X_t^{\varepsilon, n})) dW_t^f \right\| > \delta_1 \right) &\leq \exp[-\delta_1/(2d\varepsilon K^2 T \alpha)] \\ + \mathbb{P}^f \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t^\varepsilon - X_t^{\varepsilon, n}| > \alpha \right) &\leq \exp(-(a+c+R)/\varepsilon) + \exp[-\delta_1/(2d\varepsilon \alpha T K^2)]. \end{aligned}$$

On choisit alors  $\alpha$  pour  $\exp[-\delta_1/(2dTK^2\varepsilon\alpha)] < \exp[-(a+R+c)/\varepsilon]$  et  $n$  correspondant.  $\rho$  est choisi tel que  $4nK\rho < \delta_1$ . Alors,

$$\mathbb{P}^f \left( \left\| \int_0^t \sqrt{\varepsilon} \sigma(X_t^{\varepsilon, n}) dW_t^f \right\| > \delta_1, \|\sqrt{\varepsilon} W^f\| < \rho \right) = 0,$$

et

$$\mathbb{P}^f \left( \left\| \int_0^{\cdot} \sqrt{\varepsilon} \sigma(X_t^\varepsilon) dW_t^f \right\| > \delta_1, \|\sqrt{\varepsilon} W^f\| < \rho \right)$$

est majorée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^f \left( \left\| \int_0^{\cdot} \sqrt{\varepsilon} (\sigma(X_t^\varepsilon) - \sigma(X_t^{\varepsilon, n})) dW_t^f \right\| > \delta_1, \|\sqrt{\varepsilon} W^f\| < \rho \right) \\ + \mathbb{P}^f \left( \left\| \int_0^{\cdot} \sqrt{\varepsilon} \sigma(X_t^{\varepsilon, n}) dW_t^f \right\| > \delta_1, \|\sqrt{\varepsilon} W^f\| < \rho \right) \end{aligned}$$

et donc par  $k \exp[-(a + R + c)/\varepsilon]$ . D'où le résultat.

LEMME (I.3) (pour la majoration). — Pour tout  $\delta > 0$ , pour toute  $\varphi$  continue, il existe  $\delta'$  tel que :

$$\mathbb{P}(\|X^\varepsilon - \varphi\| \leq \delta) \leq \mathbb{P}(\|X^{\varepsilon, \varphi} - \varphi\| \leq \delta').$$

*Démonstration.* — C'est une application de l'inégalité exponentielle

## II. HYPOTHÈSES ET NOTATIONS

HYPOTHÈSES (cf. Freidlin [3] [4]).

(II.1) Il existe une fonction  $H^0$  de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ , différentiable en la deuxième variable, telle que pour tout couple de fonctions en escalier de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $(\alpha, \varphi)$ , la limite suivante existe,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} \mathbb{E} \left( \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle \alpha_s, b(\varphi_s, \xi_{t/\varepsilon}) \rangle ds \right) \text{ et vaut } \int_0^T H^0(\varphi_s, \alpha_s) ds.$$

Supposons  $\alpha, \varphi$  constantes, l'hypothèse devient :

(II.2) Il existe une fonction  $H^0$  de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ , différentiable en la deuxième variable, telle que pour tout couple de  $\mathbb{R}^d$   $(\alpha, \varphi)$ , la limite suivante existe,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \operatorname{Log} \mathbb{E} \left( \exp \int_0^T \langle \alpha, b(\varphi, \xi_s) \rangle ds \right) \text{ et vaut } H^0(\varphi, \alpha).$$

*Remarques.*

(II.3)  $H^0$  est continue, convexe en la deuxième variable.

(II.4) Pour la validité des hypothèses et des exemples d'applications on pourra consulter [2] [3] [5].

NOTATIONS.

(II.5)  $L^0$  désigne la fonction conjuguée de  $H^0$  en la deuxième variable

$$L^0(x, \beta) = \text{Sup}_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \{ \langle \alpha, \beta \rangle - H^0(x, \alpha) \}.$$

$L^0$  est s. c. i., à valeurs  $\mathbb{R}_+ \cup \{ \infty \}$ , convexe en le second argument, et  $L^0(x, \beta) = +\infty$ , dès que  $|\beta| \geq K$ .

(II.6) Pour tout couple de  $B([0, T], \mathbb{R}^d)$ ,  $(\varphi, \psi)$ , on pose :

$$\begin{aligned} S^0(\varphi, \psi) &= \int_0^T L^0(\varphi_s, \dot{\psi}_s) ds \quad \text{si } \psi \text{ est absolument continue} \\ &= +\infty \text{ sinon.} \\ S^W(\psi) &= \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{\psi}_s|^2 ds \quad \text{si } \psi \text{ est absolument continue} \\ &= +\infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

CONSÉQUENCES. — Soit  $\varphi$  de  $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ .

(II.7) Si  $y^{\varepsilon, \varphi}(0)$  désigne la solution de  $dy^{\varepsilon, \varphi}_t = b(y^{\varepsilon, \varphi}_t, \xi_{t/\varepsilon}) dt$  issue de 0,  $S^0(\varphi, \cdot)$  est fonctionnelle d'action pour  $y^{\varepsilon, \varphi}(0)$  sur  $C_0([0, T], \mathbb{R}^d)$ . (C'est l'hypothèse (II.1), voir [3] ou [6].)

(II.8)  $S^W$  est fonctionnelle d'action pour  $\sqrt{\varepsilon}W$ .

(II.9) Par indépendance de  $\xi$  et  $W$ , le couple  $(y^{\varepsilon, \varphi}(0), \sqrt{\varepsilon}W)$  admet pour fonctionnelle d'action sur  $(C_0([0, T]; \mathbb{R}^d))^2$ ,  $s^\varphi(g, f) = S^0(\varphi, g) + S^W(f)$ .

(II.10) Si  $\varphi$  est absolument continue, d'après la remarque préliminaire, I.1 on sait que  $X^{\varepsilon, \varphi}$  admet pour fonctionnelle d'action :

$$S^\varphi(\psi) = \text{Inf} \{ s^\varphi(g, f), \psi = F^\varphi(g, f) \}.$$

### III. CONSTRUCTION DE LA FONCTIONNELLE D'ACTION

(III.1) On pose pour  $(x, \alpha)$  de  $(\mathbb{R}^d)^2$ ,  $H(x, \alpha) = H^0(x, \alpha) + 1/2 \langle \alpha, \Sigma_x \alpha \rangle$  où  $\Sigma_x$  désigne  $\sigma(x)'\sigma(x)$ .

(III.2)  $L(x, \beta)$  désigne la fonction conjuguée de  $H(x, \alpha)$  en  $\alpha$ .  $L$  est s. c. i., à valeurs  $\mathbb{R}_+ \cup \{ +\infty \}$ , convexe en  $\beta$ , et vérifie :

(III.2.1)  $L(x, \beta) \geq -A + B|\beta|^2$ . ( $A, B$  constantes  $> 0$ ).

(III.3) On pose pour  $\varphi, \psi$  de  $B([0, T], \mathbb{R}^d)$  :

$$\begin{aligned} S(\varphi, \psi) &= \int_0^T L(\varphi_s, \dot{\psi}_s), \text{ si } \psi \text{ est absolument continue,} \\ &= +\infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On note  $S(\varphi) = S(\varphi, \varphi)$ .

(III.4) PROPRIÉTÉS. —  $S$  va être la fonctionnelle cherchée. Elle est régulière :

- i) Si  $S(\varphi, \psi) \leq \alpha, \dot{\psi} \in L^2([0, T])$ , et  $\|\dot{\psi}\|_2 \leq K_\alpha$ .
- ii)  $S$  vérifie (0.1)

(On pourra consulter [2] et [6].)

(III.5) Comparaison de  $S(\varphi, \cdot)$  et  $S^\varphi$  (définie en (II.10)).

Soit  $\varphi$  continue telle que  $S(\varphi) < +\infty$ .  $\varphi$  est alors absolument continue et (II.10) est vérifié.

i)  $S(\varphi, \cdot)$  et  $S^\varphi$  coïncident et si  $S(\varphi, \psi) < +\infty$ , il existe un couple de fonctions abs. continues  $(g, f)$  tel que  $\psi = F^\varphi(g, f)$  et  $S(\varphi, \psi) = S^0(\varphi, g) + S^W(f)$ .

ii)  $S(\varphi, \cdot)$  est fonctionnelle d'action pour  $X^{\varepsilon, \varphi}$ .

iii) Dès que  $\varphi$  vérifie  $S(\varphi) < +\infty$ , il existe un couple de fonctions abs. continues  $(g, f)$  tel que  $S(\varphi) = S^0(\varphi, g) + S^W(f)$  et  $\varphi = B_x(g, f)$  (cf. I.1).

*Démonstration.* — ii) et iii) sont des conséquences immédiates de i) et (II.10). Montrons i) :

$H(x, \alpha) = H_0(x, \alpha) + Q_x(\alpha)$  où  $Q_x$  est la forme quadratique associée à  $\Sigma_x$ . On note  $q_x$  sa conjuguée.

$$L(x, \beta) = \inf \{ L^0(x, \gamma) + q_x(\delta), \gamma + \delta = \beta \}.$$

Si  $\psi = F^\varphi(g, f)$  où  $g, f$  abs. continue,

$$S^0(\varphi, g) + S^W(f) = \int_0^T L_0(\varphi_t; \dot{g}_t) + \frac{1}{2} |f_t|^2 dt \geq \int_0^T L(\varphi_t; \dot{\psi}_t) dt = S(\varphi, \psi).$$

Par définition de  $S^\varphi, S^\varphi \geq S(\varphi, \cdot)$ .

Pour démontrer l'inégalité inverse, considérons  $\psi$  telle que  $S(\varphi, \psi) < +\infty$   $\psi$  est abs. continue et  $N$  l'ensemble des  $t$  tels que  $L(\varphi_t, \dot{\psi}_t) = +\infty$  est négligeable.

On note  $T$  l'ensemble des  $(x, \beta)$  tels que  $L(x, \beta) < +\infty$ , et  $f(x, \beta, \alpha) = L^0(x, \alpha) + q_x(\beta - \alpha)$ .  $f$  est un intégrand convexe normal au



sens de Rockafellar [9]. Il existe alors une application mesurable  $G$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}^d$  telle que pour  $(x, \beta)$  de  $T$

$$f(x, \beta, G(x, \beta)) = \inf \{ f(x, \beta, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}^d \} = L(x, \beta).$$

Notant  $g_t = G(\varphi_t, \dot{\psi}_t)$ , si  $t \in [0, T] - \mathbb{N}$ , 0 sinon,  $g$  est mesurable et *ppt*  $L(\varphi_t, \dot{\psi}_t) = L^0(\varphi_t, \dot{\psi}_t)$ . Par [9], on construit  $f$  mesurable telle que *ppt*  $\dot{\psi}_t = g_t + \sigma(\varphi_t)f_t$  et  $L(\varphi_t, \dot{\psi}_t) = L^0(\varphi_t, g_t) + \frac{1}{2} |f_t|^2$ .

Si  $G, F$  sont les primitives de  $g, f$  nulles en 0,  $\psi = F^\varphi(G, F)$  et

$$S(\varphi, \psi) = S^0(\varphi, G) + S^W(F) \geq S^\varphi(\psi).$$

#### IV. ESTIMATIONS POUR $X^\varepsilon$

THÉORÈME (IV. 1). — Pour  $A$  borélien de  $C_x([0, T], \mathbb{R}^d)$ ,  $I(A) = \inf_{\varphi \in A} S(\varphi)$ . Alors,

$$-I(\bar{A}) \leq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \text{Log} \mathbb{E}(X^\varepsilon(x) \in A) \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \text{Log} \mathbb{E}(X^\varepsilon(x) \in A) \leq -I(\bar{A}). \quad \square$$

*Démonstration.*

i) *Minoration.*

Il suffit de montrer que pour tout  $\varphi$  tel que  $S(\varphi) < +\infty$ , et pour tout  $\delta > 0$   $\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \text{Log} \mathbb{E}(\|X^\varepsilon - \varphi\| < \delta) \geq -S(\varphi)$ .

On associe à  $\varphi$  ( $g, f$ ) par (III. 5), on applique l'estimation (I. 2) et (II. 9) en remarquant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|X^\varepsilon - \varphi\| < \delta) &\leq \mathbb{P}(\|X^\varepsilon(x) - \varphi\| > \delta, \|y^{\varepsilon, \varphi}(0) - g\| < \rho, \|\sqrt{\varepsilon}W - f\| < \rho) \\ &\quad + \mathbb{P}(\|y^{\varepsilon, \varphi}(0) - g\| < \rho, \|\sqrt{\varepsilon}W - f\| < \rho). \end{aligned}$$

ii) *Majoration.*

On peut se ramener à  $A$  compact grâce à la bornitude des coefficients, par application de l'inégalité exponentielle (cf. [6]).

Il suffit alors de montrer que pour tout  $\varphi$  tel que  $S(\varphi) > 0$ , et pour tout  $a < S(\varphi)$ , il existe  $\delta$  tel que :

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \text{Log} \mathbb{E}(\|X^\varepsilon - \varphi\| < \delta) \leq -a.$$

$S(\cdot, \cdot)$  étant s. c. i., on utilise (I. 3) et (III. 10) pour conclure.

*Remarque.* — La bornitude des coefficients, du fait du caractère local des estimations, sert seulement à passer de la majoration pour  $A$  compact à  $A$  fermé.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. AZENCOTT, *Grandes déviations et applications. Lectures Notes*, t. **774**, 1980, Springer-Verlag.
- [2] M. BRANCOVAN, F. BRONNER, P. PRIOURET, *Grandes déviations pour certains systèmes différentiels aléatoires. Lecture Notes*, t. **920**, 1982, Springer-Verlag.
- [3] M. I. FREIDLIN, The averaging principle and theorems on large deviations. *Soviet Math. Dokl.*, t. **17**, 1976.
- [4] M. I. FREIDLIN, A. D. WENTZELL, *Random perturbations of dynamical systems*. Springer-Verlag, 1984.
- [5] H. J. KUSHNER, *Robutness and approximation of espace times and large deviations for systems with small noise effect*. L. C. D. S. Report # 82-5.
- [6] H. LAPEYRE, *Thèse de troisième cycle*.
- [7] P. PRIOURET, *Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques. Lecture Notes in Mathematics*, t. **920**, 1982.
- [8] P. PRIOURET, *Processus de diffusions et équations différentielles stochastiques. Lecture Note in Mathematics*, t. **390**.
- [9] R. ROCKAFELLAR, Mesurable Dependence of Convex Sets and Function on Parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, t. **28**, 1969.

(Manuscrit reçu le 4 décembre 1984)

(révisé le 24 juin 1985)