ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DANIEL PIERRE LOTI VIAUD

Processus de branchements dépendant de la densité, markovien en temps continu

Annales de l'I. H. P., section B, tome 21, nº 3 (1985), p. 289-303
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_3_289_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 21, n° 3, 1985, p. 289-303. *Probabilités et Statistiques*

Processus de branchements dépendant de la densité, markovien en temps continu

par

Daniel PIERRE LOTI VIAUD
E. R. A. 532, « Statistique Appliquée », Mathématiques,
Bât. 425, 91405 Orsay Cedex

RÉSUMÉ. — Pour un processus de branchements à deux types, markovien en temps continu et dépendant de la densité par l'intermédiaire de la fonction proportion p d'individus de type 1, nous montrons que p converge presque sûrement en utilisant des techniques d'algorithmes stochastiques.

ABSTRACT. — For a two-type continuous time Markov branching process which depends on the population density by the types proportions vector V, we prove that V converges almost surely using stochastic algorithm theory.

Nous étudions ici des processus de branchements à deux types. Nous supposons que les durées de vie des individus sont de loi exponentielle, et, qu'à leur mort, les individus se reproduisent suivant des variables aléatoires dépendant du type du père et de la proportion d'individus de type 1 observée dans la population à l'instant de mort du père.

Soit : $T = \{ 1, 2 \}$ l'ensemble des types.

Le processus que nous nous attachons à décrire est un processus de sauts purs sur $E = \mathbb{N}^T$, et nous prenons l'espace de probabilité le plus simple associé à ce processus de branchements que nous supposons caractérisé par ses probabilités infinitésimales.

Nous voulons étudier le comportement asymptotique de la suite des proportions d'individus de type 1, p_n, $n \geq 0$, observées à l'issue du n^{ieme} saut du processus ; pour cela nous écrivons que la suite p_n, $n \geq 0$, satisfait un algorithme stochastique dont nous montrons la convergence. Nous terminons en replaçant notre résultat par rapport à ceux connus dans le cas d'un processus de branchements multitype homogène où les variables de reproduction sont indépendantes et ne dépendent que du type du père.

1. LE MODÈLE

Les données sont une famille de lois p_p^i sur E, indexées par i dans T, par p dans $[0, 1]$, et qui définissent les nombres d'enfants des différents types nés à la mort d'un individu de type i en situation p.

Nous considérons le processus de branchements correspondant, où les individus vivent des temps aléatoires donnés par des réalisations indépendantes de la loi exponentielle de paramètre q (que nous ne faisons pas dépendre du type de l'individu), et se reproduisent, lorsqu'ils meurent en situation p, suivant des tirages indépendants des lois p_p^i, i fixé par le type du père.

On observe le processus $Z = (Z_t, t \geq 0)$, $Z_t = (Z_t^i, i \in T)$, qui donne les nombres d'individus de chacun des types dans la population en vie à l'instant t.

En regardant les probabilités infinitésimales il est clair que le processus Z peut être construit de la manière suivante.

Le théorème de Kolmogorov nous permet de disposer d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, et d'une chaîne de Markov homogène (X_n, T_n), $n \geq 0$, sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et à valeurs dans $E \times \mathbb{R}^+$, tels que l'on puisse définir le processus Z sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Z_t(\omega) = X_n(\omega) \quad \text{si} \quad T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega).$$

T_n, $n \geq 0$, est la suite des instants de mort d'un individu quelconque de la population, que nous appellerons suite des instants de sauts du processus Z.

X_n, $n \geq 0$, donne les états successifs du processus Z.

La loi conditionnelle de (X_1, T_1) sachant $(X_0 = (n_1, n_2), T_0 = s)$ est donnée par : si $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$, on pose $p_0 = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$, et :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} &P(X_1 = (k_1, k_2), T_1 \leq t + s / X_0 = (n_1, n_2), T_0 = s) \\ &\quad = (1 - \exp[-q(n_1 + n_2)t])[p_0 P_{p_0}^1(k_1 - n_1 + 1, k_2 - n_2) \\ &\qquad + (1 - p_0) P_{p_0}^2(k_1 - n_1, k_2 - n_2 + 1)] \end{aligned}$$

sinon le point $(0, 0)$ est un point cimetière du processus Z.

X_n, $n \geq 0$, est donc une chaîne de Markov.

REMARQUE 1.1. — Sur un espace probabilisé moins sommaire, p_0 serait l'espérance de la variable de Bernoulli qui vaut 1 si l'individu qui vient de mourir est de type 1, 0 sinon (puisque l'on doit comparer deux lois exponentielles de paramètres respectifs qn_1 et qn_2).

Soit : $\mathcal{S} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{ X_n \neq (0,0) \}$ l'ensemble de survie du processus Z.

PROPOSITION 1.1. — *Critère de non explosion.*
Sous l'hypothèse suivante :

(1.H1) $\quad \exists \check{N} \in \mathbb{N}^*/\forall i \in T, \quad \forall p \in [0,1], \quad P_p^i(\{0, \check{N}\}^T) = 1,$

P *presque sûrement sur* $\mathcal{S}$ *on a :* $\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty$.

Preuve. — Sous (1.H1) on a, quelle que soit la condition initiale X_0, P_{X_0} presque sûrement, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$q(X_n^1 + X_n^2) \leq q[X_0^1 + X_0^2 + (2\check{N} - 1)n],$$

et sur $\mathcal{S}$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{q(X_n^1 + X_n^2)} \geq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{q[X_0^1 + X_0^2 + (2\check{N} - 1)n]} = +\infty$$

ce qui permet de conclure ([*2*], proposition 15.43).

Fin de la preuve.

Soit : $\mathcal{F}_n$ la tribu $\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$,
$(m^{i,j}(p), j \in T)$ la moyenne de la loi P_p^i, $i \in T$, $p \in [0,1]$,

$$c(p) = p[m^{1,1}(p) + m^{1,2}(p)] + (1-p)[m^{2,1}(p) + m^{2,2}(p)], \quad p \in [0,1],$$

la fonction moyenne du nombre total de descendants d'un individu mort en situation p,

$$f(p) = \frac{pm^{1,1}(p) + (1-p)m^{2,1}(p)}{c(p)}, \qquad p \in [0,1] \quad \text{et} \quad c(p) \neq 0,$$

la fonction proportion des moyennes de naissances de type 1 d'un individu mort en situation p.

THÉORÈME 1.1. — *Sous les hypothèses* (1.H1) *et*

(1.H2) $$\inf_{p \in [0,1]} c(p) > 1,$$

presque sûrement sur $\mathcal{S}$:

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{X_n^1 + X_n^2}{n} \geq \inf_{p\in[0,1]} c(p) - 1$$

REMARQUE 1.2. — L'hypothèse (1.H2) est une hypothèse de supercriticité du processus de branchements puisque la fonction $c(p)$ représente la moyenne du nombre total de descendants d'un individu mort en situation p.

Preuve du théorème. — Soit :

$$\overline{X}_n = X_n^1 + X_n^2, \qquad p_n = \frac{X_n^1}{\overline{X}_n} \quad \text{si} \quad X_n \neq (0,0),$$

et $C(X_n) = c(p_n)$ si $X_n \neq (0,0)$ et 1 sinon, $n \geq 0$,
alors en utilisant la formule (1.1) nous obtenons :

$$\forall n \geq 1, \qquad E(\overline{X}_n/X_{n-1}) = \overline{X}_{n-1} - 1 + C(X_{n-1}),$$

ce qui conduit à la décomposition de Doob de la sous-martingale $\overline{X}_n$, $n \geq 0 : \forall n \geq 1$,

$$\overline{X}_n = \overline{X}_0 + \sum_{k=1}^{n} [\overline{X}_k - E(\overline{X}_k/X_{k-1})] + \sum_{k=1}^{n} [C(X_{k-1}) - 1].$$

Sous (1.H1) les variables aléatoires :

$$\overline{X}_k - E(\overline{X}_k/X_{k-1}) = \overline{X}_k - \overline{X}_{k-1} - E(\overline{X}_k - \overline{X}_{k-1}/X_{k-1}), \qquad k \geq 1,$$

sont centrées, de module presque sûrement borné par $2\check{N}$, et orthogonales dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Alors la suite :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} [\overline{X}_k - E(\overline{X}_k/X_{k-1})], \qquad n \geq 1,$$

est une martingale de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et presque sûrement sur Ω ([*6*]). Par le lemme de Kronecker ([*6*]) nous obtenons : p. s. sur Ω,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [\overline{X}_k - E(\overline{X}_k/X_{k-1})] = 0.$$

Nous en déduisons sous l'hypothèse (1.H2) la preuve du théorème, puisque sur l'ensemble $\mathscr{S}$ on a l'inégalité :

$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [\mathrm{C}(\mathrm{X}_{k-1}) - 1] \geq \inf_{p\in[0,1]} c(p) - 1 .$$

Fin de la preuve.

COROLLAIRE 1.1. — *Sous les hypothèses du théorème 1.1 presque sûrement sur $\mathscr{S}$ on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} p_{n+1} - p_n = 0 .$$

Preuve. — Sur $\mathscr{S}$ on a : $\forall n \geq 0$,

$$p_{n+1} - p_n = \frac{(\mathrm{X}_{n+1}^1 - \mathrm{X}_n^1)\mathrm{X}_n^2 - (\mathrm{X}_{n+1}^2 - \mathrm{X}_n^2)\mathrm{X}_n^1}{(\mathrm{X}_{n+1}^1 + \mathrm{X}_{n+1}^2)(\mathrm{X}_n^2 + \mathrm{X}_n^1)},$$

d'où en utilisant (1.1) et (1.H1) : $\forall n \geq 0$,

$$| p_{n+1} - p_n | \leq \frac{2\check{\mathrm{N}}}{\mathrm{X}_{n+1}^1 + \mathrm{X}_{n+1}^2},$$

inégalité qui permet de conclure en utilisant le théorème 1.1.

Fin de la preuve.

Ce premier résultat nous incite à étudier de manière plus précise la différence $p_{n+1} - p_n$, $n \geq 0$; nous l'écrivons sur $\mathscr{S}$:

$$(1.2) \qquad \forall n \geq 0, \qquad p_{n+1} - p_n = \gamma_{n+1}\Phi(p_n, \mathrm{X}_{n+1}),$$

avec

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{\mathrm{X}_{n+1}^1 + \mathrm{X}_{n+1}^2},$$

$$\Phi(p_n, \mathrm{X}_{n+1}) = (1 - p_n)\mathrm{X}_{n+1}^1 - p_n\mathrm{X}_{n+1}^2 .$$

PROPOSITION 1.2. — *Sous* (1.H1), *les lois* P_p^i, $i \in \mathrm{T}$, $p \in [0, 1]$, *sont de moyennes finies, et,* $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$, *les espérances conditionnelles*

$$\mathrm{E}[\Phi(p_n, \mathrm{X}_{n+1})/\mathrm{X}_n = (k_1, k_2)], \qquad n \geq 0,$$

existent, ne dépendent pas de n, et s'écrivent $g(p_n)$, g fonction de $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout p tel que $c(p) \neq 0$:

$$(1.3) \qquad g(p) = c(p)[f(p) - p].$$

Preuve. — La fonction Φ s'écrit :

$$\Phi(p_n, \mathrm{X}_{n+1}) = (\mathrm{X}_{n+1} - \mathrm{X}_n)\begin{pmatrix} 1-p_n \\ -p_n \end{pmatrix}$$

en utilisant la formule (1.1) et $p_n = \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}$:

$$E[X_{n+1} - X_n/X_n = (k_1, k_2)] = p_n(m^{1,j}(p_n), j \in T) + (1 - p_n)(m^{2,j}(p_n), j \in T) - (p_n, 1 - p_n),$$

il en résulte que :

$$\begin{aligned} E[\Phi(p_n, X_{n+1})/X_n = (k_1, k_2)] &= p_n(1-p_n)m^{1,1} - (p_n)^2 m^{1,2} + (1-p_n)^2 m^{2,1} - p_n(1-p_n)m^{2,2} \\ &= (p_n)^2 [m^{2,1} + m^{2,2} - m^{1,1} - m^{1,2}] + p_n[m^{1,1} - m^{2,2} - 2m^{2,1}] + m^{2,1} = g(p_n). \end{aligned}$$

Enfin (1.3) provient simplement d'une réduction au même dénominateur.

Fin de la preuve.

Le théorème 1.1 et la proposition 1.2 nous conduisent à interpréter (1.2) comme un algorithme stochastique du type Robbins-Monro ([*5*] [*3*]) avec gains γ_n, $n \geq 0$, aléatoires. Comme dans la théorie classique nous montrons dans la partie 3 la convergence de l'algorithme (1.2) vers un zéro de g, c'est-à-dire un point fixe de la fonction f.

2. THÉORÈME DE CONVERGENCE DE KUSHNER-CLARK ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Au début de ce paragraphe nous suivons [*4*]. Le théorème de Kushner-Clark est basé sur un lemme déterministe que nous exposons pour commencer.

Soit l'algorithme

$$(2.1) \qquad \theta_{n+1} = \theta_n + \tau_{n+1} h(\theta_n) + u_{n+1}, \qquad n \geq 0,$$

où $\theta_n, u_n \in \mathbb{R}$,

h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, τ_n, $n \geq 0$, est une suite de réels positifs, de limite nulle, telle que :

$$\sum_{n \geq 0} \tau_n = +\infty .$$

On pose :

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k,$$

$\theta^0(t)$ l'interpolée linéaire de la suite (t_n, θ_n), $n \geq 0$, i. e. :

$$\theta^0(t) = \frac{(t - t_n)\theta_{n+1} + (t_{n+1} - t)\theta_n}{t_{n+1} - t_n} \quad \text{si} \quad t_n \leq t \leq t_{n+1},$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

$U^0(t)$ l'interpolée linéaire de la suite $(t_n\, U_n)$, $n \geq 0$,

$$\theta^n(t) = \theta^0(t + t_n) \text{ si } t \geq -t_n,\ \theta_0 \text{ si } t \leq -t_n.$$

LEMME 2.1. — *La solution θ_n, $n \geq 0$, de (2.1), sous les hypothèses suivantes :*

i) θ_n, $n \geq 0$, *est bornée dans* $\mathbb{R}$,
ii) $\forall R > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \sup_{|s| \leq R} |U^0(t + s) - U^0(t)| = 0$,

vérifie :

1° *la suite de fonction θ^n, $n \geq 0$, est relativement compacte dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et la limite de n'importe quelle sous-suite convergente est une solution de l'équation différentielle :*

$$\frac{dx(t)}{dt} = h(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

2° *Si θ^* est un point localement asymptotiquement stable de l'équation (2.2), de domaine d'attraction $D(\theta^*)$, et s'il existe un compact de $D(\theta^*)$ qui contient un nombre infini de θ_n, alors :*

$$\lim_{n \to +\infty} \theta_n = \theta^*.$$

Preuve. — Voir [3].

De ce lemme on déduit facilement le théorème suivant dû à Kushner et Clark :

Soit : $k(n, R) = \max \{ k \in \mathbb{N} / \tau_n + \ldots + \tau_k \leq R \}$.

THÉORÈME 2.1. — *Considérons l'algorithme stochastique*

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \tau_{n+1} h(\theta_n) + \tau_{n+1}\xi_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{2.3}$$

où θ_n, ξ_n, $n \geq 0$, sont des variables aléatoires, h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, τ_n, $n \geq 0$, sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Soit : $\Omega_1 = \{ \sup_n |\theta_n| < +\infty \} \cap \left\{ \lim_{n \to +\infty} \tau_n = 0 \text{ et } \sum_{n \geq 0} \tau_n = +\infty \right\}$,

et l'hypothèse :

$$\forall R > 0, \text{ p.s. sur } \Omega_1, \quad \lim_{n \to +\infty} \sup_{n \leq k \leq k(n,R)} \left| \sum_{i=n+1}^{k} \tau_i \xi_i \right| = 0. \tag{2.H1}$$

Alors il existe un ensemble $\tilde{\Omega}_1$ inclus dans Ω_1, presque sûrement égal à Ω_1, tel que : quel que soit θ^* point localement asymptotiquement stable de (2.2) *de domaine d'attraction* $D(\theta^*)$, *et quel que soit* ω *de* $\tilde{\Omega}_1$ *tel qu'il existe un compact de* $D(\theta^*)$ *dans lequel* $\theta_n(\omega)$ *retourne une infinité de fois, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_n(\omega) = \theta^* .$$

Preuve. — Soit : $t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k$, $n \geq 0$, $U^0(t)$ l'interpolée linéaire de la suite $\left(t_n, \sum_{k=0}^{n} \tau_k \xi_k\right)$, $n \geq 0$, $U^n(t) = \begin{cases} U^0(t+t_n) - U^0(t_n) & \text{si} \quad t \geq t_n \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

de (2.H1) on déduit :

$$\forall R > 0, \text{ p.s. sur } \Omega_1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\leq R} |U^n(t)| = 0,$$

si on pose :

$$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 \cap \left(\bigcap_{R\in\mathbb{R}^{+*}} \{ \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\leq R} (|U^n(t)|) = 0 \} \right),$$

on a $P(\Omega_1 \backslash \tilde{\Omega}_1) = 0$, et il suffit d'appliquer le lemme 2.1 à la suite $\theta_n(\omega)$, $n \geq 0$, lorsque ω appartient à $\tilde{\Omega}_1$, pour démontrer le théorème 2.1.

Fin de la preuve.

Notons que ce théorème ne conclut pas à la convergence presque sûre sur Ω_1 de l'algorithme (2.3), mais il fait un pas dans cette direction, cependant pour l'algorithme qui nous intéresse nous en déduisons la convergence presque sûre.

Nous poursuivons maintenant en rappelant le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

pour une condition initiale x_0 dans $[0, 1]$, et pour la fonction g définie dans la proposition 1.2.

LEMME 2.2. — *Sous l'hypothèse :*

(2.H2) $\forall i, j \in T$, *les fonctions* $m^{i,j}(p)$ *existent et sont lipschitziennes sur* $[0, 1]$, *on a :*

1° *il existe une unique solution* $x(t)$ *de* (*2.4*) *sur* $\mathbb{R}$, *de plus elle reste dans* $[0, 1]$.

2° $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ *existe et est un zéro de la fonction* g.

Preuve. — 1° Sous (2.H2) la fonction g est lipchitzienne sur $[0, 1]$, ce qui prouve l'existence locale et l'unicité de la solution de (2.4), de plus cette solution est $\mathscr{C}^1$.

D'un autre côté on a : $g(1) \leq 0$ et $g(0) \geq 0$ (en utilisant (1.3) et le fait que l'image de la fonction f est incluse dans $[0, 1]$). Soit alors t_0 tel que :

$$x(t_0) = 1 \qquad \text{et} \qquad x(t) < 1 \quad \text{pour} \quad t < t_0,$$

la fonction $x(t)$ ne peut pas être décroissante avant t_0, et vérifie $x'(t_0) = g(1)$, ceci n'est possible que si $g(1) = 0$; dans ce cas, en utilisant l'unicité de la solution de (2.4), la fonction $x(t)$ est identique à 1 partout.

Le même argument étant valable en zéro, on a ainsi montré que l'ensemble $[0, 1]$ est invariant pour l'équation différentielle (2.4). Il en résulte que la solution de (2.4), de condition initiale x_0, existe globalement sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$.

2° Plaçons-nous dans le cas non trivial où il existe x_1 et x_2 tels que : $x_1,\ x_2 \in [0, 1]$, $x_1 \neq x_2$, $g(x_1) = 0$ ou $x_1 = 0$, $g(x_2) = 0$ ou $x_2 = 1$, avec $\forall x \in]x_1, x_2[$, $g(x) \neq 0$, et, $x_0 \in \{ x \in [x_1, x_2]/g(x) \neq 0 \}$. Alors la solution de (2.4) reste dans $[x_1, x_2]$ et la fonction $x(t)$ est monotone sur $\mathbb{R}$ et bornée. Elle admet donc une limite lorsque t tend vers $+\infty$. Enfin on conclut par la règle de l'Hospital que cette limite ne peut être que l'un des points x_1 ou x_2 qui est un zéro de la fonction g.

Fin de la preuve.

REMARQUE 2.1. — On connaît les zéros de g qui sont localement asymptotiquement stables pour (2.4), puisque sur $]x_1, x_2[$, si par exemple g est positive, $x(t)$ est croissante, et x_2 est localement asymptotiquement stable de domaine d'attraction contenant $]x_1, x_2[$.

Soit : $D(p^*)$ le domaine d'attraction du zéro p^* de g.

THÉORÈME 2.2. — *Sous les hypothèses* (2.H2) *et* (2.H3) *l'ensemble* $\{ p_i^*, i \in J \}$ *des zéros de* g *est fini, pour toute suite* θ_n, $n \geq 0$, *à valeurs dans* $[0, 1]$, *et telle que* $\lim_{n \to +\infty} \theta_{n+1} - \theta_n = 0$, *on a deux alternatives : ou bien il existe un* i *de* J *et un compact de* $D(p_i^*)$ *dans lequel* θ_n *retourne une infinité de fois, ou bien il existe un* i *de* J *tel que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \theta_n = p_i^* .$$

Preuve. — Elle provient du lemme précédent qui nous dit que :

$$\bigcup_{i \in J} D(p_i^*) = [0, 1],$$

et, si la première alternative n'est pas vérifiée, la suite θ_n, $n \geq 0$, est dans n'importe quel voisinage de l'ensemble des zéros de g qui ne sont pas dans l'intérieur de leur domaine d'attraction, au moins à partir d'un certain rang. Comme sous (2.H3) l'ensemble des zéros de g est discret, l'hypothèse $\lim_{n \to +\infty} \theta_{n+1} - \theta_n = 0$ permet de conclure que la seconde alternative est vérifiée.

Fin de la preuve.

3. CARACTÉRISATION DE L'ENSEMBLE DE CONVERGENCE DE L'ALGORITHME STOCHASTIQUE (1.2)

THÉORÈME 3.1. — *Condition suffisante de convergence.*
Sous (2.H2), (2.H3) *et* (1.H1), *soit* :

$$\Omega_1 = \left\{ \omega \in \Omega \quad \textit{tel que} \quad \exists \eta > 0 / \forall n \geq 1, \frac{X_n^1(\omega) + X_n^2(\omega)}{n} \geq \eta \right\},$$

alors presque sûrement sur Ω_1 *la suite* p_n, $n \geq 0$, *converge vers un zéro de la fonction* g.

Preuve. — Remarquons pour commencer qu'il suffit de montrer la convergence presque sûre de l'algorithme (1.2) sur l'ensemble :

$$\Omega_\eta = \left\{ \omega \in \Omega / \forall n \geq 1, \frac{X_n^1(\omega) + X_n^2(\omega)}{n} \geq \eta \right\},$$

η arbitraire, pour prouver le théorème, puisque $\Omega_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/n}$. Vérifions sur Ω_η les hypothèses du théorème 2.1.

Comme Ω_η est inclus dans l'ensemble de survie $\mathscr{S}$ du processus Z, de la proposition 1.2 nous déduisons que, presque sûrement sur Ω_η. l'algorithme (1.2) s'écrit

$$p_{n+1} = p_n + \gamma_{n+1} g(p_n) + \gamma_{n+1} \xi_{n+1}, \qquad n \geq 0,$$

où la fonction g est continue sous (2.H2), et

$$\xi_{n+1} = \Phi(p_n, X_{n+1}) - E[\Phi(p_n, X_{n+1}) / \mathscr{F}_n], \qquad n \geq 0.$$

Les variables ξ_n, $n \geq 1$, vérifient sous (1.H1) : presque sûrement sur Ω, $|\xi_n| \leq 2\check{N}$ (on a p. s. $|\Phi(p_n, X_{n+1})| \leq \check{N}$), ce sont donc une suite de variables centrées et orthogonales de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. De plus nous pouvons écrire :

$$\forall n \geq 1, \qquad \gamma_n \xi_n = \gamma_{n-1} \xi_n + (\gamma_n - \gamma_{n-1}) \xi_n$$

(en posant $\gamma_n=1$ si $X_n=(0,0)$ $n \geq 0$), où : $|\gamma_n-\gamma_{n-1}| \leq \dfrac{2\check{N}}{\eta^2(n-1)^2}$, $n \geq 1$, p. s. sur Ω_η, et $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{k-1}\xi_k$, $n \geq 1$, est une martingale dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ telle que le processus croissant A_n, $n \geq 1$, associé à son carré, qui est égal à

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k-1}^2 E[\xi_k^2/\mathscr{F}_{k-1}], \qquad n \geq 1,$$

est de limite finie sur Ω_η, ce qui implique que la martingale $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{k-1}\xi_k$, $n \geq 1$, converge presque sûrement vers une limite finie sur Ω_η ([*6*], proposition VII.2.3).

Nous en déduisons que presque sûrement sur Ω_η la série $\sum_{n\geq 0} \gamma_n\xi_n$ est convergente.

Enfin nous avons :

p. s. sur Ω_η, $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0$,

p. s. sur Ω, $\forall n \geq 0$, $\quad X_n^1 + X_n^2 \leq X_0^1 + X_0^2 + (2\check{N} - 1)n$, d'où :

p. s. sur Ω_η, $\sum_{n\geq 0} \gamma_n = +\infty$.

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème 2.1 sur l'ensemble Ω_η, et nous concluons la démonstration à l'aide du théorème 2.2, si nous remarquons que, presque sûrement sur Ω_η, $\lim_{n\to+\infty} p_{n+1} - p_n = 0$ (comme dans le corollaire 1.1).

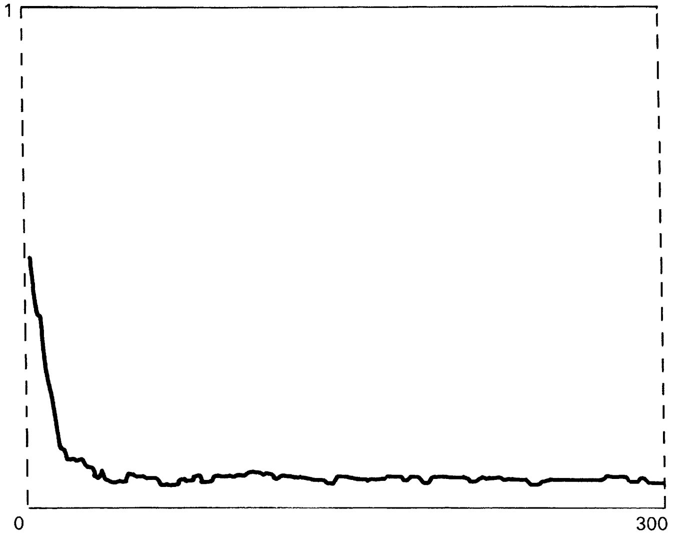
Fin de la preuve.

COROLLAIRE 3.1. — *Sous les hypothèses du théorème 3.1 et si* (1.H2) *est vérifiée, alors presque sûrement sur l'ensemble de survie $\mathscr{S}$ la proportion d'individus de type 1 dans la population converge vers un zéro de la fonction g.*

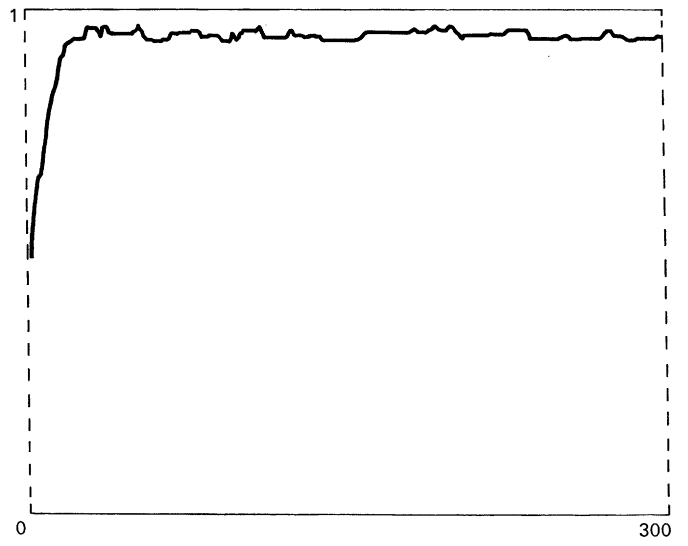
Preuve. — Le théorème 1.1 nous dit que Ω_1 et $\mathscr{S}$ sont égaux presque sûrement.

Fin de la preuve.

REMARQUE 3.1. — La condition initiale du processus étant fixée, différents points fixes de la fonction g, parmi ceux qui sont asymptotiquement stables pour (2.4), peuvent être limite de la proportion d'individus de type 1 le long de différentes trajectoires.



Graphique 1.



Graphique 2.

Pour illustrer ce résultat, en utilisant la remarque 1.1, nous avons simulé l'évolution de deux trajectoires de la chaîne de Markov, X_n, $n \geq 0$, issues de la même condition initiale, et qui converge vers deux zéros différents de la fonction g. Nous avons choisi pour les lois de reproduction des lois de Poisson et la fonction g de sorte qu'elle admette trois zéros, dont deux asymptotiquement stables pour (2.4) qui ont les valeurs $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12\sqrt{3}}}$ (i. e. environ 0.05 et 0.95), et un non asymptotiquement stable qui a la valeur $\frac{1}{2}$. Nous donnons dans les graphiques 1 et 2 l'évolution de la proportion p_n, $n \in \{0, \ldots, 300\}$, pour les deux trajectoires que nous avons simulées.

4. LIEN AVEC LE CAS HOMOGÈNE

Nous supposons dans tout ce paragraphe que les moyennes $m^{i,j}(p)$ existent, $\forall i, j \in \mathrm{T}$, $\forall p \in [0, 1]$. Soit l'hypothèse :

(4.H1) $\forall p \in [0, 1]$, les matrices $\mathrm{M}(p) = \begin{pmatrix} m^{1,1}(p) & m^{1,2}(p) \\ m^{2,1}(p) & m^{2,2}(p) \end{pmatrix}$ sont positivement régulières.

Si (4.H1) est satisfaite nous sommes assurés que les quantités $m^{1,2}(p)$ et $m^{2,1}(p)$ sont toujours strictement positives, et que la fonction f est partout définie sur $[0, 1]$. De plus, cette matrice admet une plus grande valeur propre $\rho(p)$ et un vecteur propre à gauche associé $\mathrm{V}(p)$ correctement normalisé par :

$$\forall i \in \mathrm{T}, \qquad \mathrm{V}_i(p) > 0, \quad \text{et,} \quad \sum_{i \in \mathrm{T}} \mathrm{V}_i(p) = 1 .$$

Jusqu'à la fin de ce paragraphe nous noterons $m^{i,j}$, V_1 et ρ pour $m^{i,j}(p)$, $\mathrm{V}_1(p)$ et $\rho(p)$. ρ est donné par :

$$\rho = \frac{m^{1,1} + m^{2,2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{m^{1,1} - m^{2,2}}{2}\right)^2 + m^{1,2}m^{2,1}} . \tag{4.1}$$

On vérifie facilement que sous (4.H1) on a :

$$\rho \geq \max(m^{1,1}, m^{2,2}) \qquad \text{et} \qquad \rho - m^{1,1} + m^{2,1} > 0 ,$$

V_1 est donnée par :

$$\mathrm{V}_1 = \frac{m^{2,1}}{\rho - m^{1,1} + m^{2,2}} .$$

PROPOSITION 4.1. — *Sous l'hypothèse* (4.H1) *les points fixes des fonctions f et V_1 sont identiques.*

Preuve. — Comme sous (4.H1) la fonction $c(p)$ est strictement positive sur $[0, 1]$, les points fixes de f sont les points qui annulent la fonction $g(p) = c(p)[f(p) - p]$, avec :

$$g(p)=p^2[m^{2,1}+m^{2,2}-m^{1,1}-m^{1,2}] + p[m^{1,1}-m^{2,2}-2m^{2,1}] + m^{2,1}.$$

Dans un premier temps supposons que $\bar{p}$ est un point fixe de f et considérons le polynôme en p :

$$\mathrm{R}(p)=p^2[m^{2,1}+m^{2,2}-m^{1,1}-m^{1,2}]+p[m^{1,1}-m^{2,2}-2m^{2,1}]+m^{2,1},$$

où les valeurs des fonctions $m^{i,j}$, $i, j \in \mathrm{T}$, sont fixées en $\bar{p}$, Étudions les zéros du trinôme R.

1^er cas : $m^{2,1}+m^{2,2}=m^{1,1}+m^{1,2}$ au point $\bar{p}$, on pose $m=m^{2,1}+m^{2,2}$ et on vérifie aisément que :

$$\rho = m, \quad \text{et} \quad \bar{p} = \frac{m^{2,1}}{m+m^{2,1}-m^{1,1}} = \mathrm{V}_1.$$

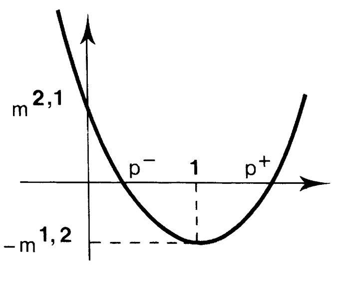
2^e cas : sinon posons $\Delta=m^{2,1}+m^{2,2}-m^{1,1}-m^{1,2}$. Le discriminant de R vaut :

$$(m^{1,1} - m^{2,2})^2 + 4m^{1,2}m^{2,1}.$$

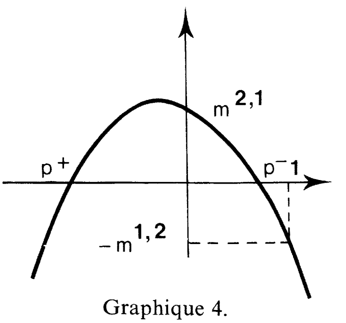
il est strictement positif. D'autre part, on a :

$$\mathrm{R}(0) = m^{2,1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(1) = - m^{1,2}$$

ce qui conduit aux schémas suivants pour R, cas $\Delta > 0$ graphique 3, cas $\Delta < 0$ graphique 4 :



Graphique 3.



Graphique 4.

et il y a une et une seule racine du trinôme R qui est dans $[0, 1]$. Les deux racines valent en usant de (4.1) :

$$p^+ = \frac{-m^{1,1}+m^{2,2}+2m^{2,1}+\sqrt{\text{discriminant}}}{2\Delta} = \frac{\rho-m^{1,1}+m^{2,1}}{\Delta},$$

$$(4.2) \quad p^- = \frac{-m^{1,1}+m^{2,2}+2m^{2,1}-\sqrt{\text{discriminant}}}{2\Delta} = \frac{m^{2,2}+m^{2,1}-\rho}{\Delta},$$

avec : si $\Delta > 0$, $p^+ > p^-$,
si $\Delta < 0$, $p^+ < p^-$.

Nous en déduisons que la racine de R qui est dans $[0, 1]$ est p^-, c'est-à-dire que $\bar{p} = p^-$. D'autre part, nous avons :

$$p^+ p^- = \frac{m^{2,1}}{\Delta},$$

nous en déduisons :

$$\bar{p} = p^- = \frac{m^{2,1}}{\rho - m^{1,1} + m^{2,1}} = V_1.$$

Nous avons ainsi montré que les points fixes de f sont des points fixes de V_1. La réciproque est maintenant facile.

Fin de la preuve.

Dans le cas d'un processus de branchements homogène (non nécessairement markovien), lorsque l'hypothèse (4.H1) est satisfaite et si nous supposons seulement que :

$$\rho = c(V_1) > 1 \tag{4.H2}$$

(ici ρ et V_1 sont indépendants de p), nous savons (cf. [*1*]) que presque sûrement sur l'ensemble de survie $\mathcal{S}$ la proportion d'individus de type 1 dans la population converge vers la valeur V_1.

La proposition 4.1 permet de retrouver ce résultat sous des hypothèses qui dans le cas markovien en temps continu et homogène sont plus fortes que (4.H2).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] K. B. ATHREYA et P. E. NEY, *Branching Processes.* Springer Verlag, Berlin, 1972.
[*2*] L. BREIMAN, *Probability.* Addison-Wesley, 1968.
[*3*] H. J. KUSHNER et D. S. CLARK, Stochastic approximation for constrained and unconstrained systems. *Appl. Math. Sc.*, t. **26**, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
[*4*] M. MÉTIVIER et P. PRIOURET, Applications of a Lemma of Kushner and Clark to general classes of stochastic algorithms. *Rap. Int.*, t. **97**, École Polytechnique, 1983.
[*5*] M. B. NEVEL'SON et R. Z. HAS'MINSKII, Stochastic approximation and recursive estimation. *Transl. American Math. Soc.*, t. **47**, Providence, 1973.
[*6*] J. NEVEU, *Martingales a temps discret.* Masson, Paris, 1972.

(Manuscrit reçu le 1er novembre 1984)