

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

LAURENT SCHWARTZ

**Le mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^N$ , en tant que  
semi-martingale dans  $S_N$**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 21, n° 1 (1985), p. 15-25

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1985\\_\\_21\\_1\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_1_15_0)

© Gauthier-Villars, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^N$ , en tant que semi-martingale dans $S_N$

par

Laurent SCHWARTZ

Centre de Mathématiques, École Polytechnique,  
91128 Palaiseau Cedex

---

RÉSUMÉ. — Le mouvement Brownien sur  $\mathbb{R}^N$  est, considéré comme à valeurs dans  $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ , une semi-martingale dans  $[0, +\infty] \times \Omega$  pour  $N \geq 3$ , pour les temps montants ou descendants.

ABSTRACT. — Brownian motion on  $\mathbb{R}^N$ , as a process with values in  $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ , is a semi-martingale in  $[0, +\infty] \times \Omega$  for  $N \geq 3$  for increasing or decreasing times.

---

### § 1. ÉNONCÉ ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Soient  $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$  un ensemble filtré probabilisé, vérifiant les conditions habituelles (sauf peut-être le caractère  $\mathbb{P}$ -complet des  $\mathcal{F}_t$ ), et  $B$  une martingale continue sur  $[0, +\infty[ \times \Omega$ , de loi brownienne  $\mathbb{P}$  de distribution initiale  $B_0(\mathbb{P}) = \mu$  sur  $\mathbb{R}^N$  ( $B_t - B_s$  est gaussienne de paramètre  $\sqrt{t-s}$ , indépendante de  $\mathcal{F}_s$ ,  $0 \leq s < t < +\infty$ ). Pour  $N \geq 3$ , on sait que, quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $B_t$  tend p. s. vers  $\infty$  dans  $\mathbb{R}^N$ , et même que, pour tout  $\alpha < \frac{1}{2}$ ,  $B_t/t^\alpha$  tend p. s. vers  $\infty$ , ce que nous écrirons  $|B_t|^{-1} \leq Ct^{-\alpha}$ ,

C dépendant de  $\alpha$  et  $\omega$  <sup>(1)</sup>. Si alors on plonge  $\mathbb{R}^N$  dans son compactifié d'Alexandroff  $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ , la sphère munie de sa structure différentielle usuelle, on peut prolonger  $B$  en  $\bar{B}$ , défini sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$  à valeurs dans  $S_N$ , p. s. continu, en posant  $\bar{B}(+\infty) = B_{(+\infty)-} = \infty$ . On connaît la signification de semi-martingale à valeurs dans une variété différentielle <sup>(2)</sup>. Alors :

**THÉORÈME (1.1).** — Sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ ,  $\bar{B}$  est une semi-martingale pour  $((\mathcal{C}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $S_N$ , pour  $N \geq 3$ .

*Remarque.* —  $\Omega$  est quelconque, et les tribus  $\mathcal{C}_t$  sont peut-être bien plus grandes que les tribus naturelles engendrées par  $B$ .

*Démonstration.* — Nous allons montrer que  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$  est réunion d'une suite d'ouverts optionnels dans chacun desquels elle est restriction d'une semi-martingale <sup>(3)</sup>. C'est vrai dans  $[0, n[ \times \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , où  $\bar{B} = B^n$ , brownien arrêté au temps  $n$ . Il suffit de le montrer pour l'ouvert  $]1, +\infty[ \times \Omega$ ; il suffit pour cela qu'elle soit une semi-martingale dans  $[1, +\infty[ \times \Omega$ , car, en prolongeant celle-ci par une constante dans  $[0, 1[ \times \Omega$ , on en fait une semi-martingale sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ . On va donc montrer que  $\bar{B}$ , restreinte à  $]1, +\infty[ \times \Omega$ , est restriction d'une semi-martingale sur  $[1, +\infty[ \times \Omega$  (temps initial 1). Appelons  $\Phi$  l'inversion de  $S_N$ ,  $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$  avec  $\Phi(0) = \infty$ ,  $\Phi(\infty) = 0$ ; il suffit de montrer que  $\Phi(\bar{B})$ , sur  $[1, +\infty[ \times \Omega$ , est restriction d'une semi-martingale sur  $[1, +\infty[ \times \Omega$ . Par Ito, sur  $[1, +\infty[ \times \Omega$  :

$$(1.2) \quad \Phi(B_t) - \Phi(B_1) = \sum_{k=1}^N \int_1^t \partial_k \Phi(B_s) dB_s^k + \frac{1}{2} \int_1^t \Delta \Phi(B_s) ds = M + V,$$

ou les  $B^k$  sont les coordonnées de  $B$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Cette formule n'est vraie que dans  $(]1, +\infty[ \times \Omega')$ ,  $\Omega' = \{\omega \in \Omega; \forall t, B_t(\omega) \neq 0\}$ , mais  $B \neq 0$ ,  $\mathbb{P}$  p. s.

<sup>(1)</sup> Voir DVORETZY et ERDÖS, *Some problems on random walk in space. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Probabilities*, 1951, p. 353-367.

<sup>(2)</sup> Voir L. SCHWARTZ, *Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. 780, 1980, définition (1.2), page 6. Dans le cas vectoriel, si les  $\mathcal{C}_t$  ne sont pas  $\mathbb{P}$ -complètes, on considérera comme semi-martingale une somme  $X = V + M$ ,  $\mathcal{C}$ -adaptée,  $V$  et  $M$  adaptées pour les tribus  $\mathbb{P}$ -complétées  $\mathcal{C}_t \vee \mathcal{N}_{\mathbb{P}}$ ,  $V$   $\mathbb{P}$  p.s. à variation finie càdlàg,  $M$   $\mathbb{P}$  p.s. càdlàg,  $(\mathcal{C}_t \vee \mathcal{N}_{\mathbb{P}})_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}$ -martingale locale.

<sup>(3)</sup> L. SCHWARTZ, *loc. cit.*, proposition (2.4), page 10.

En calculant les dérivées successives de  $\Phi$ , on voit aussitôt que

$$(1.3) \quad |\partial_k \Phi(x)| \leq \text{const.} |x|^{-2}, \quad |\Delta \Phi(x)| \leq \text{const.} |x|^{-3}.$$

Le processus  $V$  est à variation finie jusqu'au temps  $+\infty$ ; en effet sa variation est

$$(1.4) \quad \int_1^{+\infty} |dV_s| \leq \text{const.} \int_1^{+\infty} |B_s|^{-3} ds \leq C \text{const.} \int_1^{+\infty} s^{-3\alpha} ds,$$

$\alpha$  quelconque  $< \frac{1}{2}$  donc  $3\alpha < \frac{3}{2}$ , donc on peut le prendre  $> 1$ . Donc  $V$  est prolongeable en  $\bar{V}$ , processus à variation finie dans  $[1, +\infty] \times \Omega$ , en posant  $\bar{V}(\infty) = V(\infty_-)$ . Ensuite  $M$  est une martingale locale sur  $[1, +\infty[ \times \Omega$ ; si  $\Phi^i$  est la  $i$ -ème composante de  $\Phi$ ,  $\Phi^i(x) = x^i/|x|^2$ ,

$$(1.5) \quad |[M^i, M^j]_t| = \left| \int_1^t \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi^i(B_s) \partial_k \Phi^j(B_s) ds \right| \leq \text{const.} \int_1^t |B_s|^{-4} ds \leq \text{const.} C \int_1^{+\infty} s^{-4\alpha} ds.$$

Comme plus haut,  $4\alpha$  peut être pris  $> 1$ , donc  $[M, M]_t$  a p. s. une limite pour  $t \rightarrow +\infty$ , et par suite  $M$  aussi, et elle est prolongeable en  $\bar{M}$ , martingale locale dans  $[1, +\infty] \times \Omega$ , avec  $\bar{M}_\infty = M_{\infty-}$ , ce qui achève la démonstration. ■

REMARQUE (1.6). — Le début, pour passer de  $[0, +\infty[$  à  $[1, +\infty[$ , est lourd, par souci de dire « tout », mais on se passera dans la suite de telles précisions !

(1.7) Si  $\Omega$  est l'espace des trajectoires continues  $C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N)$ ,  $\bar{\Omega}$  l'espace  $C([0, +\infty]; S_N)$ , chacun muni de la plus petite famille de tribus croissante et continue à droite, qui rende le processus canonique  $\pi, \bar{\pi}, \pi_t(\omega) = \omega_t, \bar{\pi}_t(\omega) = \omega_t$ , adapté, bien évidemment il existe une injection naturelle  $\bar{\Omega} \rightarrow \Omega$ , les tribus de  $\bar{\Omega}$  sont les images réciproques de celles de  $\Omega$ , et  $\bar{\pi}$  est l'image réciproque de  $\pi$ . Alors l'énoncé (1.1) équivaut à dire que  $\mathbb{P}$  provient d'une  $\bar{\mathbb{P}}$  sur  $\bar{\Omega}$ , unique, et qui fait de  $\bar{\pi}$  une semi-martingale.

(1.8) Ainsi, dans  $S_N, N \geq 3$ ,  $B$  ressemble à un pont brownien sur  $[0, +\infty[$ ; c'est une semi-martingale, qui part de  $a \in S_N$  si  $\mu = \delta_{(a)}$ , au temps 0, et qui arrive en  $\infty \in S_N$  au temps  $+\infty$  (voir à ce sujet l'article suivant de M. Yor).

**§ 2. MÊME ÉNONCÉ,  
AVEC INVERSION DU SENS DU TEMPS**

Soit  $I$  un intervalle de  $\overline{\mathbb{R}}$ , ouvert, semi-ouvert ou fermé,  $(I \times I)_+$  le sous-ensemble  $\{(s, t) \in I \times I; s < t\}$  de  $I \times I$ ,  $q$  une fonction  $> 0$  borélienne sur  $(I \times I)_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , telle que,  $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall (s, t) \in (I \times I)_+, \int_{\mathbb{R}^N} q(s, t; x, y) dy = 1$ .

On appelle relation de Chapman-Kolmogorov la relation suivante :

$$(2.1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall r, s, t, r < s < t : \\ \int_{\mathbb{R}^N} q(r, s; x, z) q(s, t; z, y) dz = q(r, t; x, y).$$

Si cette relation est vérifiée, on dira que  $q$  définit une probabilité de transition ; la répartition conditionnelle à l'instant  $t > s$ , lorsqu'on sait que l'on part de  $x$  à l'instant  $s$ , est  $q(s, t; x, y) dy$ . Alors  $q$  permet de construire un processus ; il est indexé par les temps de  $I$  ; sa loi pour les temps  $\geq \sigma \in I$ ,  $\mathbb{P}_\sigma^\mu$ , correspondant à une répartition initiale  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$  à l'instant initial  $\sigma$ , est donnée par ses projections marginales ; soient  $\sigma < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  :

$$(2.2) \quad (\pi_0, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n})(\mathbb{P}_\sigma^\mu) = \\ = \mu(dx_\sigma) q(\sigma, t_1; x_\sigma, x_{t_1}) dx_{t_1} q(t_1, t_2; x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_2} \dots q(t_{n-1}, t_n; x_{t_{n-1}}, x_{t_n}) dx_{t_n}.$$

La probabilité  $\mathbb{P}_\sigma^\mu$ , d'après un théorème classique de Kolmogorov, est portée par l'espace  $(\mathbb{R}^N)^I$  de toutes les trajectoires, muni de la plus petite tribu rendant toutes ses projections  $\pi_t$  mesurables, et  $\pi$  est le processus canonique,  $\pi_t(\omega) = \omega_t$ . Il ne possède, s'il n'y a pas d'hypothèses supplémentaires sur  $q$ , aucune autre propriété intéressante que la propriété simple de Markov. Le processus est dit markovien continu si les lois marginales définissent une probabilité  $\mathbb{P}_\sigma^\mu$  sur l'espace des trajectoires continues, quels que soient  $\sigma$  et  $\mu$ , et si le processus ainsi formé est fortement markovien. Le plus connu de ces processus markoviens continus est le mouvement brownien,  $I = \mathbb{R}$ , et, pour  $s < t$  :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} q(s, t; x, y) = \gamma_{t-s}(y - x), \\ \gamma_\theta(\xi) = \text{gaussienne de paramètre } \sqrt{\theta} \text{ sur } \mathbb{R}^N (\theta > 0) \\ = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \right)^N \exp(-|\xi|^2/2\theta). \end{array} \right.$$

A partir d'une fonction  $q$ , on peut en former une autre  $\check{q}$  sur

$$((-\mathbf{I}) \times (-\mathbf{I}))_- \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad ((-\mathbf{I}) \times (-\mathbf{I}))_- = \{ (t, s) \in (-\mathbf{I}) \times (-\mathbf{I}), t > s \},$$

en posant  $\check{q}(t, s) = q(-t, -s)$ . Il définit cette fois un processus « à temps descendant » ;  $\check{q}(t, s; x, y)dy$  est la loi conditionnelle de  $\pi_s$  lorsqu'on sait que  $\pi_t = x$  ; les lois marginales du processus pour une distribution  $\nu$  à l'instant initial  $\tau \in -\mathbf{I}$ , sont données, pour  $t_1 < t_2 \dots < t_n < \tau$ , par :

$$(2.4) \quad (\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}_\tau^\nu) = \nu(dx_\tau) \check{q}(\tau, t_n; x_\tau, x_{t_n}) dx_{t_n} \check{q}(t_n, t_{n-1}; x_{t_n}, x_{t_{n-1}}) dx_{t_{n-1}} \dots \check{q}(t_2, t_1; x_{t_2}, x_{t_1}) dx_{t_1}.$$

Par changement de signe du temps, on passe du processus à temps montant au processus à temps descendant, de sorte que, si  $q$  définit un processus markovien continu à temps montant, il en est de même de  $\check{q}$  à temps descendant ; c'est le cas pour  $q$  définie par (2.3), avec en plus  $\check{q}(t, s) = q(s, t) = \gamma(t - s)$  ; on obtiendra un mouvement brownien à temps descendant, pour lequel on se fixera une distribution initiale  $\nu$  à l'instant  $\tau$ , et  $\check{\mathbb{P}}_\tau^\nu$  sera portée par l'espace des trajectoires continues sur  $]-\infty, \tau]$ .

(2.4.1) On va maintenant définir les ponts browniens. Soit  $b \in \mathbb{R}^N$ ,  $\tau \in \mathbf{I}$ . Soit  $q$  définissant un markovien continu à temps montant. Prenons une nouvelle probabilité de transition  $p$ , sur  $(\mathbf{I}' \times \mathbf{I}')_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{I}' = \mathbf{I} \cap ]-\infty, \tau[$ , définie, pour  $s < t < \tau$ , par :

$$(2.4.2) \quad p(s, t; x, y) = q(s, t; x, y)q(t, \tau; y, b)/q(s, \tau; x, b) ;$$

$p$  est le conditionnement de  $q$  par  $\pi_\tau = b$ . Les  $p$  forment un nouveau système de probabilités de transition, vérifiant Chapman-Kolmogorov ; pour un départ de distribution  $\mu$  au temps  $\sigma$ ,  $\sigma < \tau$ , on a une probabilité  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}$  sur l'espace des trajectoires, définie par ses lois marginales, pour  $\sigma < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \tau$  :

$$(2.5) \quad (\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n})(\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}) = \mu(dx_\sigma) q(\sigma, t_1; x_\sigma, x_{t_1}) dx_{t_1} q(t_1, t_2; x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_2} \dots \dots q(t_{n-1}, t_n; x_{t_{n-1}}, x_{t_n}) dx_{t_n} q(t_n, \tau; x_{t_n}, b)/q(\sigma, \tau; x_\sigma, b)$$

On démontre alors aisément que, si les  $q$  définissent un markovien continu, les  $p$  en définissent un aussi dans  $\mathbf{I} \cap ]-\infty, \tau[$ , peut être pas dans  $\mathbf{I} \cap ]-\infty, \tau]$  ; paradoxalement, bien qu'on ait conditionné par  $\pi_\tau = b$ , on ne peut pas affirmer que,  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}$  - p. s.,  $\pi_t$  ait la limite  $b$  lorsque  $t < \tau$  tend vers  $\tau$ , ni même qu'il ait une limite ! Le « conditionnement par  $\pi_\tau = b$  » est donc

assez platonique. Cependant, dans le cas brownien de (2.3), on montrera plus loin que  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}$  est bien définie sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , avec  $\pi_\tau = b$ .

Il existe bien entendu des propriétés analogues relativement à  $\check{q}$ , mais en conditionnant par  $\pi_\sigma = a \in \mathbb{R}^N$ , pour l'intervalle de temps  $(-I) \cap ]\sigma, +\infty[$  ou  $(-I) \cap ]\sigma, +\infty]$ . Les lois marginales de  $\check{\mathbb{P}}_{\tau, \sigma}^{v, a}$  sont :

$$(2.6) \quad (\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}_{\tau, \sigma}^{v, a}) \\ v(dx_\tau)\check{q}(\tau, t_n; x_\tau, x_{t_n})dx_{t_n}\check{q}(t_n, t_{n-1}; x_{t_n}, x_{t_{n-1}})dx_{t_{n-1}} \dots \\ \dots \check{q}(t_2, t_1; x_{t_2}, x_{t_1})dx_{t_1}\check{q}(t_1, \sigma; x_{t_1}, a)/\check{q}(\tau, \sigma; x_\tau, a).$$

Dans les cas où, comme pour le mouvement brownien,  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}$  est définie sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , on peut dans (2.5), calculer aussi la projection  $(\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)$ , en rajoutant à la fin un facteur  $\delta_{(b)}(dx_\tau)$ , et de même, dans (2.6), en rajoutant à la fin un facteur  $\delta_{(a)}(dx_\sigma)$ .

Ce qu'on appelle plus spécialement le pont brownien, en  $a$  au temps  $\sigma$  et en  $b$  au temps  $\tau$ , est le processus canonique  $\pi$ ,  $\pi_t(\omega) = \omega_t$ , sur  $\Omega = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , pour la probabilité  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}$  où  $\mu = \delta_{(a)}$ , ce qu'on notera  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{a, b}$ . Mais il existe aussi un pont brownien à temps descendant, relatif à  $\check{\mathbb{P}}_{\tau, \sigma}^{b, a}$ . Et c'est le même en ce sens que  $\Omega = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$  est le même et que  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{a, b} = \check{\mathbb{P}}_{\tau, \sigma}^{b, a}$  à cause de la parité de  $\gamma_\theta, \gamma_\theta(-\xi) = \gamma_\theta(\xi)$  :

$$(2.7) \quad (\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}_{\tau, \sigma}^{b, a}) = \\ = \delta_{(b)}(dx_\tau)\gamma_{\tau-t_n}(x_{t_n} - x_\tau)dx_{t_n}\gamma_{t_n-t_{n-1}}(x_{t_{n-1}} - x_{t_n})dx_{t_{n-1}} \\ \dots \gamma_{t_2-t_1}(x_{t_1} - x_{t_2})dx_{t_1}\gamma_{t_1-\sigma}(a - x_{t_1})\delta_{(a)}(dx_\sigma)/\gamma_{\tau-\sigma}(a - b) \\ = \delta_{(a)}(dx_\sigma)\gamma_{t_1-\sigma}(x_{t_1} - a)dx_{t_1}\gamma_{t_2-t_1}(x_{t_2} - x_{t_1})dx_{t_2} \dots \\ \dots \gamma_{t_n-t_{n-1}}(x_{t_n} - x_{t_{n-1}})dx_{t_n}\gamma_{\tau-t_n}(x_\tau - x_{t_n})\delta_{(b)}(dx_\tau)/\gamma_{\tau-\sigma}(b - a) \\ = (\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{a, b}).$$

Regardons maintenant les propriétés de semi-martingales dans le cas brownien (2.3). Pour la probabilité  $\mathbb{P}_\sigma^\mu$  sur  $C([\sigma, +\infty[; \mathbb{R}^N)$ , le processus canonique  $\pi$ , brownien, est une martingale pour ses tribus naturelles. Le processus  $\pi$  est encore une semi-martingale sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$  pour  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}$ .

En effet, en projection sur  $C([\sigma, \tau']; \mathbb{R}^N)$ ,  $\tau' < \tau$ ,  $\mathbb{P}_\sigma^a$  et  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau'}^{a, b}$  sont des mesures équivalentes; ceci est vrai en général, pas seulement dans le cas gaussien [Appelons  $\Omega'$  l'ensemble  $C([\sigma, \tau']; \mathbb{R}^N)$ . Alors les lois marginales (2.2), (2.5),

montrent que  $\mathbb{P}'_{\sigma, \tau'}^{a, b}(d\omega') = \frac{\mathbb{P}_\sigma^a(d\omega')q(\tau', \tau; \omega'(\tau'), b)}{q(\sigma, \tau; a, b)}$ , ce qui montre bien

l'équivalence]; alors Girsanov montre bien que  $\pi'$  est une  $(\mathbb{P}_{\sigma, \tau'}^{a, b})$ -semi-martingale sur  $[\sigma, \tau'] \times C([\sigma, \tau']; \mathbb{R}^N)$ , donc aussi  $\pi$  sur  $[\sigma, \tau] \times C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ .

Ensuite les lois marginales montrent aussitôt que  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{a, b} \mu(da)$ ,

donc  $\pi$  est une  $(\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b})$ -semi-martingale sur  $[\sigma, \tau] \times C([\sigma, \tau] \times \mathbb{R}^N)$  par le théorème de convexité de Jacod <sup>(4)</sup>. Mais considérons  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  sur  $\Omega = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$  et les tribus naturelles; nous allons voir que  $\pi_t$  a non seulement une limite p.s. lorsque  $t < \tau$  tend vers  $\tau$ , mais que  $\pi$  se prolonge en une semi-martingale  $\bar{\pi}$  sur  $[\sigma, \tau] \times \Omega$ , de sorte qu'on peut le considérer comme une semi-martingale sur  $[\sigma, \tau] \times (\bar{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N))$  et les tribus naturelles, et la probabilité  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  sur  $\bar{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ .

On doit, pour le voir, utiliser des propriétés très particulières dues à la loi gaussienne. On montre <sup>(5)</sup> que, pour les tribus montantes, et  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b}$  sur  $\Omega = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , si on pose  $M_t = \frac{b - \pi_t}{\tau - t}$ ,  $M$  est une martingale dont le crochet, à valeurs dans  $\mathbb{R}^N \overset{\ominus}{\circ} \mathbb{R}^N$ , est donné par

$$(2.8) \quad [M, M]_t - [M, M]_\sigma = \frac{\theta}{\tau - t} - \frac{\theta}{\tau - \sigma}, \quad \theta = \sum_{k=1}^N e_k \overset{\ominus}{\circ} e_k,$$

où  $(e_k)_{k=1,2,\dots,N}$  est la base de  $\mathbb{R}^N$ . Ito donne

$$(2.9) \quad b - \pi_t = (\tau - t) \cdot M + M \cdot (\tau - t),$$

en notant  $(\tau - t)$  le processus  $t \mapsto \tau - t$ . Alors  $M \cdot (\tau - t)$  est un processus  $V$  à variation localement finie dans  $[\sigma, \tau]$ , avec :

$$(2.10) \quad \int_\sigma^t |dV_s| = \int_\sigma^t |M_s| ds,$$

$$(2.10.1) \quad \mathbb{E}_{\sigma,\tau}^{a,b} \int_\sigma^t |dV_s| \leq \mathbb{E}_{\sigma,\tau}^{a,b} \int_\sigma^t M_s^* ds = \int_\sigma^t (\mathbb{E}_{\sigma,\tau}^{a,b} M_s^*) ds \\ \leq \text{const.} \int_\sigma^t (\mathbb{E}_{\sigma,\tau}^{a,b} [M, M]_s^{1/2}) ds \leq \text{const.} \int_\sigma^t \left(\frac{1}{\tau - s}\right)^{1/2} ds \leq \text{const.}$$

<sup>(4)</sup> Ce théorème, vrai pour une intégrale de probabilités, est un peu partout démontré dans le cas d'une combinaison convexe *dénombrable* (voir par exemple J. JACOD : Calcul stochastique et problèmes de martingales, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. 714, 1979, chap. VII, 2, § e, Théorème (7.42), page 235), mais, semble-t-il, ne figure nulle part avec une intégrale ! Cela tient à ce que Jacod a démontré le théorème avant le critère de Dellacherie pour les semi-martingales; depuis que ce critère est connu, le théorème de Jacod est devenu trivial, même pour une intégrale de mesures.

<sup>(5)</sup> Voir T. JEULIN et M. YOR, Inégalité de Hardy, semi-martingales, et faux-amis. Séminaire de Probabilités XIII, 1977-1978, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. 721, 1979, p. 332-359.



quand  $t \rightarrow \tau$ , où  $|\cdot|$  est la norme dans  $\mathbb{R}^N \odot \mathbb{R}^N$ , et  $\mathbf{M}_s^* = \text{Sup}_{\sigma \leq s' \leq s} |\mathbf{M}_{s'}|$ .

Donc  $\int_{\sigma}^{\tau} |dV_s| < +\infty$  p.s., et  $V$  se prolonge en  $\bar{V}$ , à variation finie sur  $[\sigma, \tau] \times \Omega$ ,  $\bar{V}_{\tau} = V_{\tau-}$ .

Ensuite  $(\tau - t) \cdot \mathbf{M}$  est une martingale  $N$  dans  $[\sigma, \tau[ \times \Omega$ , et pour  $t < \tau$ :

$$(2.11) \quad [\mathbf{N}, \mathbf{N}]_t = \int_{\sigma}^t (\tau - s)^2 d[\mathbf{M}, \mathbf{M}]_s \\ \leq \text{const.} \int_{\sigma}^t (\tau - s)^2 d\left(\frac{1}{\tau - s}\right) = \text{const.} \int_0^t (\tau - s)^2 \frac{ds}{(\tau - s)^2} \leq \text{const.}$$

quand  $t \rightarrow \tau$ .

Donc  $[\mathbf{N}, \mathbf{N}]_t$  est borné quand  $t < \tau$  tend vers  $\tau$ , et par suite  $N$  se prolonge en une martingale  $\bar{N}$  sur  $[\sigma, \tau] \times \Omega$ ,  $\bar{N}_{\tau} = N_{\tau-}$ .

Donc  $\pi$  se prolonge en une semi-martingale  $\bar{\pi}$  sur  $[\sigma, \tau] \times \Omega$ , donc aussi sur  $[\sigma, \tau] \times \bar{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$  muni de ses tribus naturelles. Par le théorème de convexité de Jacod, c'est aussi vrai pour  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{a, b} \mu(da)$ .

Le même résultat est valable à temps descendant, avec  $\check{\mathbb{P}}_{\tau, \sigma}^{v, a}$  sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ ; ce qui remplace  $\mathbf{M}$  est  $\check{\mathbf{M}}$ ,  $\check{\mathbf{M}}_t = \frac{\pi_t - a}{t - \sigma}$ .

Il est donc légitime de chercher un énoncé analogue au théorème (1.1), mais à temps descendant :

**THÉORÈME (2.12).** — Sur  $\Omega = C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N)$ , ou  $C([0, +\infty]; S_N)$  pour  $N \geq 3$ , le processus canonique  $\pi$ , pour la plus petite famille de tribus décroissante et continue à gauche rendant  $\pi$  adapté, est une semi-martingale pour la probabilité du mouvement brownien montant  $\mathbb{P}^{\mu} = \mathbb{P}_0^{\mu}$ , de distribution  $\mu$  au temps 0.

*Démonstration.* — Reprenons l'intervalle  $[0, \tau]$ ,  $0 < \tau < +\infty$ , c'est-à-dire  $[\sigma, \tau]$  avec  $\sigma = 0$ . Nous venons de voir que  $\check{\mathbf{M}}, \check{\mathbf{M}}_t = \frac{\pi_t - a}{t}$ , est une martingale sur  $C([0, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , pour la plus petite famille de tribus décroissante et continue à gauche rendant  $\pi$  adapté et la probabilité  $\check{\mathbb{P}}_{\tau, 0}^{b, a}$ . Soit alors  $0 < s < t < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $f$  une fonction borélienne bornée sur  $\mathbb{R}^{N+1}$ ; en prenant  $\tau = t_n$ , on aura :

$$\check{\mathbb{E}}_{t_n, 0}^{b, a} \check{\mathbf{M}}_s f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}) = \check{\mathbb{E}}_{t_n, 0}^{b, a} \check{\mathbf{M}}_t f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}).$$

Mais  $\pi_s, \pi_t$ , donc  $\check{M}_s, \check{M}_t$ , sont intégrables pour  $\mathbb{P}^a = \mathbb{P}_0^a$ , et  $\mathbb{P}^a$  est une intégrale des  $\mathbb{P}_{0,\tau}^{a,b} = \check{\mathbb{P}}_{\tau,0}^{b,a}$ , comme le montrent (2.2) et (2.5) :

$$(2.14) \quad \mathbb{P}^a = \int_{\mathbb{R}^N} \check{\mathbb{P}}_{\tau,0}^{b,a} \gamma_\tau(b-a) db.$$

Donc on a aussi :

$$(2.14.1) \quad \mathbb{E}^a \check{M}_s f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}) = \mathbb{E}^a \check{M}_t f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}).$$

Par un théorème évident de classes monotones, cela montre que, si  $\Omega = C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N), C([0, +\infty[; S_N)$  pour  $N \geq 3$ , muni de la famille de tribus, décroissante et continue à gauche, la plus petite qui rende  $\pi$  adapté, et de la probabilité  $\mathbb{P}^a$  du brownien à temps croissant partant de  $a$  à l'instant 0,  $\check{M}$  est une martingale sur  $]0, +\infty[ \times \Omega$ . On ne peut pas parler de son crochet, puisqu'il n'y a pas le temps initial  $+\infty$ . Mais séparons en  $]0, \rho]$  et

$[\rho, +\infty[$ ,  $0 < \rho < +\infty$ . Sur  $]0, \rho] \times \Omega$ ,  $[\check{M}, \check{M}]_t - [\check{M}, \check{M}]_\rho = \frac{\theta}{t} - \frac{\theta}{\rho}$ , pour

$\check{\mathbb{P}}_{\rho,0}^{b,a}$  quel que soit  $a$ , donc aussi pour leur intégrale  $\mathbb{P}^a$  (formule (2.14) pour  $\tau = \rho$ ). Prenons des intégrales stochastiques à temps descendant à partir de  $\rho$  <sup>(6)</sup>,  $\pi - a = (t) \cdot \check{M} + \check{M} \cdot (t)$ ; exactement comme on l'a fait à temps montant après (2.9), on voit que  $\pi$  est, pour  $\mathbb{P}^a$ , une semi-martingale à temps descendant sur  $[0, \rho] \times \Omega$ , donc aussi sur  $[0, +\infty[ \times \Omega$ ,  $N$  quelconque. Dans  $[\rho, +\infty[$ ,  $N \geq 3$ , c'est moins simple, parce qu'il manque le temps initial  $+\infty$ . Soit  $\rho < t < +\infty$ . Nous prendrons, dans  $[\rho, t]$ , des intégrales descendantes, à partir du temps initial  $t$ . Alors :

$$(2.14.2) \quad \pi_t - a = t \check{M}_t, \quad \pi_\rho - \pi_t = \int_t^\rho s d\check{M}_s + \int_t^\rho \check{M}_s ds.$$

Comme pour la démonstration de (1.1), nous ferons l'inversion  $\Phi$ ,  $\Phi(x) = x/|x|^2$ , qui ramènera  $S_N \setminus \{0\}$  à  $\mathbb{R}^N$ , et nous rappelons que  $|\partial_k \Phi(x)| \leq \text{const.} |x|^{-2}$ ,  $|\partial_i \partial_j \Phi(x)| \leq \text{const.} |x|^{-3}$ . Alors, pour  $1 \leq t \leq +\infty$  :

$$(2.15) \quad \Phi(\pi_\rho) - \Phi(\pi_t) = \int_t^\rho \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi(\pi_s) d\pi_s^k + \frac{1}{2} \int_t^\rho \Delta \Phi(\pi_s) (-ds)$$

(parce que  $d(\pi, \pi)_s = -\theta ds, \geq 0$  pour  $ds \leq 0$ ; à temps descendant comme à temps montant,  $[\pi, \pi]$  est la même, au signe près !). La probabilité est ici toujours  $\mathbb{P}^a$ , et on sait déjà que  $\pi$  est, pour les temps descen-

<sup>(6)</sup> Attention : pour  $a < b$ ,  $\int_a^b$  à temps montant et  $\int_b^a$  à temps descendant ne sont pas opposés, à cause du crochet.

dants, une semi-martingale. La partie à variation finie de  $\Phi(\pi_\rho) - \Phi(\pi)$  est définie, si les  $\tilde{M}^k$  sont les coordonnées de  $\tilde{M}$ , par :

$$(2.16) \quad W_t = \int_t^\rho \left( \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi(\pi_s) \tilde{M}_s^k - \frac{1}{2} \Delta \Phi(\pi_s) \right) ds$$

et la partie martingale est définie par :

$$(2.17) \quad L_t = \int_t^\rho \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi(\pi_s) s d\tilde{M}_s^k.$$

On a, pour  $s \rightarrow +\infty$ , les majorations :

$$(2.18) \quad |dW_s| \leq \text{const.} (|\pi_s|^{-2} |\tilde{M}_s| + |\pi_s|^{-3}) |ds| \\ \leq \text{const.} (|\pi_s|^{-1} s^{-1} + |\pi_s|^{-3}) ds \leq \text{const.} C(s^{-\alpha-1} + s^{-3\alpha}) ds$$

donc  $\int_{+\infty}^\rho |dW_s| \leq \text{const.} C$ , et  $W$  se prolonge en  $\bar{W}$  à variation finie dans  $[\rho, +\infty] \times \Omega$ . Ensuite, si les  $L^k$  sont les coordonnées de  $L$  :

$$(2.19) \quad |d[L^i, L^j]_s| = \left| \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi^i(\pi_s) \partial_k \Phi^j(\pi_s) s^2 d[M^k, M^k]_s \right| \\ \leq \text{const.} |\pi_s|^{-2} |\pi_s|^{-2} s^2 d\left(\frac{1}{s}\right) \leq \text{const.} C s^{-4\alpha} |ds|.$$

de sorte que  $[L, L] - [L, L]$ , est  $\leq \text{const.} C$ , et  $L$  se prolonge en  $\bar{L}$  martingale locale continue sur  $[\rho, +\infty] \times \Omega$ ,  $\bar{L}_{(+\infty)} = L_{(+\infty)-}$  <sup>(7)</sup>, ce qui démontre bien que  $\pi$  est, sur  $[0, +\infty] \times \Omega$ , pour  $\mathbb{P}^a$ , une semi-martingale à temps descendant, à valeurs dans  $S_N$ . Il en est de même, par le théorème

de convexité de Jacod, pour la probabilité  $\mathbb{P}^\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}^a \mu(da)$ .

*Remarque.* — Nous avons « contrarié » le sens du temps en prenant des tribus descendantes pour la probabilité  $\mathbb{P}^\mu$  du brownien à temps montant. On peut naturellement faire la même chose, mais c'est plus simple, sur  $[\sigma, \tau]$ , pour le pont brownien. En effet, pour  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{a, b}$ ,  $\pi$  est une semi-martingale à temps

(7) M. SHARPE, *Local times and singularities of continuous local martingales*, Séminaire de Probabilités XIV, 1978-1979, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. 784, 1980, prop. 39, page 95.

descendant puisque  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b} = \check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{b,a}$ ; c'est vrai aussi pour  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b} \mu(da)$ .  
 De même, pour  $\check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{v,a}$ ,  $\pi$  est une semi-martingale à temps montant.

### § 3. QUELQUES COMPLÉMENTS

Avec les méthodes ci-dessus, on peut démontrer bien d'autres résultats, dont je me contenterai d'énoncer quelques-uns.

PROPOSITION (3.1). — Plaçons-nous dans les conditions du § 1. Pour  $\alpha > \frac{1}{2}$ ,  $t \mapsto B_t/t^\alpha$  (qui tend p. s. vers 0 pour  $t \rightarrow +\infty$ ),  $N \in \mathbb{N}$  quelconque, se prolonge en une semi-martingale sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ . Pour  $\alpha$  réel  $< \frac{1}{2}$ ,  $t \mapsto B_t/t^\alpha$  (qui tend p. s. vers  $\infty$  pour  $t \rightarrow +\infty$ ) se prolonge en une semi-martingale à valeurs dans  $S_N$  sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ , pour  $N \geq 3$ .

PROPOSITION (3.2). — Soient  $-\infty < \sigma < \tau < +\infty$ , et les tribus croissantes naturelles sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ ; si  $\pi$  est le processus canonique, alors  $t \mapsto \frac{b - \pi_t}{(\tau - t)^\alpha}$ ,  $\alpha < \frac{1}{2}$ , est une semi-martingale pour  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  (pont brownien), avec valeur  $b$  en  $\tau$ .

Pour  $\alpha > \frac{1}{2}$  et  $N \geq 3$ ,  $t \mapsto \frac{b - \pi_t}{(\tau - t)^\alpha}$  est une semi-martingale pour  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$ , à valeurs dans  $S_N$ , avec valeur  $\infty$  en  $\tau$ .

*Démonstration.* — Par le changement de temps  $u = \frac{1}{\tau - t}$ , on rend la martingale  $M$  brownienne dans  $\left[ \frac{1}{\tau - \sigma}, +\infty \right]$ , et (3.2) se déduit immédiatement de (3.1).

(Manuscrit reçu le 10 Avril 1984)