

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. GRAVEY

Temps d'attente et nombre de clients dans une file $nD/D/1$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, n° 1 (1984), p. 53-73

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_1_53_0

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Echanges Annales

**Temps d'attente et nombre de clients
dans une file $nD/D/1$**

par

A. GRAVEY

CNET, Lannion A, BP 40, 22301 Lannion Cedex

RÉSUMÉ. — On étudie une file d'attente utilisée pour modéliser le multiplexage de n communications paquetisées identiques. Le processus des arrivées à cette file est déterministe et chaque client reçoit un service de durée constante θ .

On donne les distributions du travail restant dans le système et du nombre de clients présents dans le système à un instant quelconque.

De plus on montre que les distributions du temps d'attente réel et du nombre de clients présents dans le système juste avant l'arrivée d'un client se calculent comme les distributions précédentes en changeant n en $n-1$.

ABSTRACT. — We describe a single server queue modelling the sharing of a single transmission facility by n identical periodic packet streams.

Closed expressions for the distributions of the virtual waiting time and of the number of customers in the system are given.

We prove also that the distribution of the real waiting time (respectively of the number of customers in the system just before an arrival) is equal to the distribution of the virtual waiting time (respectively of the number of customers in the system) for $(n-1)$ input streams.

SOMMAIRE

1. Introduction. La file $nD/D/1$	54
2. Attente virtuelle et nombre de clients <i>a priori</i>	56

2.1 Distributions de A et N	57
2.2 Valeurs moyennes de A et N.	65
3. Attente réelle, nombre de clients vus par un client arrivant.	68
3.1 Propriété du processus des arrivées	68
3.2 Distributions de A' et N'.	69
ANNEXE 1 : Formule d'Abel	70
ANNEXE 2 : Calcul de $\int_0^x dz_1 \int_{z_1}^{x+\theta} dz_2 \dots \int_{z_{p-1}}^{x+(p-1)\theta} (y - z_p)^{q/q-1} dz_p$	71
ANNEXE 3 : Calcul de $\sum_{j=1}^r \sum_{k=j}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} (k-j)^{r-u}$	72

1. INTRODUCTION.
LA FILE $nD/D/1$

Cette étude est motivée par la modélisation de la transmission simultanée de plusieurs communications codées numériquement. Chacune des n communications consiste en l'émission périodique, toutes les T secondes, de paquets de longueur constante, qui est la même pour toutes les communications. Les communications sont transmises sur un même canal qui ne peut écouler qu'un paquet à la fois. Un paquet qui trouve le canal occupé est stocké le temps que tous les éventuels paquets arrivés avant lui soient transmis sur le canal, puis il est lui-même transmis.

On modélise le système ainsi décrit par une file d'attente dont les clients correspondent aux paquets et dont le serveur représente le canal. Les paquets étant supposés de longueur constante, le temps de service est constant et égal à la durée θ de transmission d'un paquet. Puisqu'il n'y a pas de paquets perdus et que les paquets sont transmis dans leur ordre d'arrivée, on suppose que la file est munie d'une salle d'attente infinie et que la discipline de service est PAPS.

Il faut maintenant caractériser le processus des arrivées qui modélise l'émission de n communications paquetisés identiques et indépendantes. Soit $[0, T[$ un intervalle fixe. Le processus $\mathcal{C}(t_k, k \in \mathbb{Z})$ des arrivées à la file d'attente correspondant à une unique communication est périodique de période T , et donc

$$t_{k+1} \stackrel{ps}{=} t_k + T$$

Par conséquent, il existe un unique point X de $\mathcal{C}$ tel que $0 \leq X < T$. On

considère alors le processus $\mathcal{S}$ résultant de la superposition des n processus élémentaires $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ et pour tout i , on note X_i l'unique point de $\mathcal{C}_i$ appartenant à $[0, T[$. On suppose les communications indépendantes les unes des autres et donc les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont aussi supposées indépendantes. De plus, le choix de l'intervalle $[0, T[$ ne dépend pas des communications et l'on peut supposer que pour tout i , X_i est uniformément distribué sur $[0, T[$. Par conséquent, si $(Z_1, \dots, Z_n)$ est le n -uplet ordonné obtenu à partir de $(X_1, \dots, X_n)$, il suit une répartition de Dirichlet sur $[0, T[$ (on dit aussi répartition bernoullienne sur $[0, T[$) dont la densité conjointe est

$$(1.1) \quad \frac{n!}{T^n} 1_{0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_n < T}$$

Si z_i est la date d'arrivée du $i^{\text{ème}}$ client à la file après l'instant 0, en utilisant le caractère périodique des communications, nous voyons que

$$(1.2) \quad \begin{cases} z_i = Z_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ z_i = Z_{i-kn} + kT & \text{si } kn + 1 \leq i \leq (k+1)n \end{cases}$$

En particulier, si les indices des dates d'arrivée de 2 clients sont congruents modulo n , ces 2 clients correspondent à 2 paquets d'une même communication. On remarque en effet que $z_{i+n} = z_i + T$. D'autre part, $\mathcal{S}$ est un processus déterministe au sens que la donnée des points de $\mathcal{S}$ appartenant à $[0, T[$ définit presque sûrement tous ses autres points. Par la suite, nous notons nD le processus des interarrivées ($y_k = z_{k+1} - z_k$) de $\mathcal{S}$. Remarquons que pour tout k de $\mathbb{N}^*$

$$y_k + \dots + y_{k+n-1} = z_{k+n} - z_k \stackrel{ps}{=} T$$

En particulier, un processus nD n'est pas de type GI.

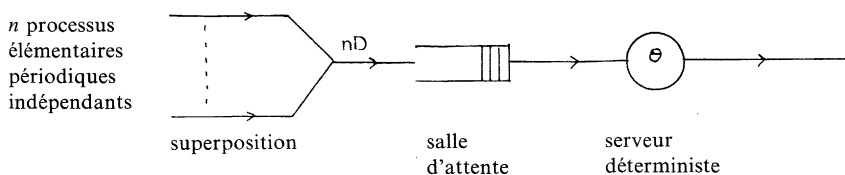


FIG. 1.

En utilisant (1.2) et la formule de Lindley, on a démontré dans [1] la propriété suivante

PROPRIÉTÉ 1.3. — Notons $A'(k)$ l'attente subie par le $k^{\text{ème}}$ client. Après

un intervalle d'initialisation dont la durée dépend uniquement de la quantité de travail restant dans le système à l'instant de début d'observation, la suite des attentes des clients vérifie $A'(k+n)=A'(k)$ presque sûrement pour tout k de $\mathbb{N}$.

La démonstration, basée sur la formule de Lindley, est donnée dans [1]. Une conséquence directe de cette propriété est que la moyenne temporelle des attentes, $\left(\sum_1^m A'(k)\right)/m$ ne converge pas vers A' quand m croît, même en loi. En effet, d'après 1.3,

$$\lim_m \left(\sum_1^m A'(k)\right)/m \stackrel{ps}{=} (A'(1) + \dots + A'(n))/n$$

et $P((A'(1) + \dots + A'(n))/n=0) = P(A'(1)=0, \dots, A'(n)=0) < P(A'=0)$.

Par la suite nous nous intéressons uniquement aux distributions du temps d'attente et du nombre de clients présents dans le système quand la file a atteint son régime périodique.

Dans un précédent article [1] nous avons donné la distribution conjointe des périodes d'activité et d'inactivité du serveur. Ici nous nous intéressons à la distribution du temps d'attente (virtuel ou réel) ainsi qu'à celle du nombre de clients présents dans le système (à un instant quelconque indépendant de l'état du système ou juste avant l'arrivée d'un client).

Dans [2] Eckberg fournit une méthode itérative de calcul de la distribution du temps d'attente. Cependant, la distribution n'est pas explicitement donnée. [3], [4], [5], sont des articles traitant des files du type $nM/D/1$. Dans [6] Pollaczek donne une méthode permettant l'étude du temps d'attente des n premiers clients d'une file $nD/G/1$. Mais cette méthode ne s'applique pas à l'étude du temps d'attente des clients en régime périodique dans le cas où le serveur est déterministe.

2. ATTENTE VIRTUELLE ET NOMBRE DE CLIENTS *A PRIORI*

Soit une file $nD/D/1$ ayant atteint son régime périodique. Notons $[0, T[$ l'intervalle d'observation, choisi indépendamment de l'état de la file. Dans ce paragraphe nous allons donner la distribution de l'attente virtuelle A (c'est-à-dire du travail restant dans le système) à la date T , ainsi que la

distribution du nombre N de clients présents dans le système à la même date. Nous donnons aussi les valeurs moyennes de ces distributions.

Dans l'intervalle $[0, T[$ arrivent n clients $C_1, \dots, C_n$ dont les dates d'arrivée vérifient $0 \leq Z_1 \leq Z_2 \leq \dots \leq Z_n < T$ presque sûrement.

2.1. Distributions de A et N .

Nous définissons tout d'abord une famille d'événements disjoints qui est à la base du calcul de la distribution de A .

LEMME 2.1.1. — Si $\mathcal{E}(k)$ désigne l'événement suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{le serveur est actif à l'instant } T \text{ et } k \text{ clients se sont présentés} \\ \text{depuis le début de la période d'activité en cours} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{E}(k)$ se décrit à l'aide des variables $Z_1, \dots, Z_n$ par :

$$(H1) \quad Z_{n-k+1} + k\theta \geq T$$

$$(H2) \quad Z_{n-k+1} + (i-1)\theta \geq Z_{n-k+i} \quad \text{pour } i = 2, \dots, k$$

$$(H3) \quad Z_i + (n-k+1-i)\theta < Z_{n-k+1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-k$$

Démonstration. — *Condition nécessaire :* les k derniers clients à s'être présentés avant la date T sont $C_{n-k+1}, \dots, C_n$. La période d'activité doit avoir commencé à la date Z_{n-k+1} et elle doit être encore en cours à la date T . Par conséquent (H1) est vérifiée. D'autre part, pour que $C_{n-k+1}, \dots, C_n$ soient servis sans interruption, puisque la période d'activité a débuté à la date Z_{n-k+1} , il faut aussi que (H2) soit vérifiée. Finalement, pour que le serveur soit inactif à gauche de Z_{n-k+1} , il faut que la période d'activité précédente soit terminée à la date Z_{n-k+1} , et donc qu'une période d'activité éventuelle commencée à la date Z_i , pour $i = 1, \dots, n-k$, soit terminée, ce que traduit la condition (H3).

Condition suffisante : d'après (H1) et (H2) $C_{n-k+1}, \dots, C_n$ sont servis pendant une même période d'activité qui est encore en cours à la date T . Or, comme le système a atteint son régime périodique, nous voyons à l'aide de la propriété 1.3 que le serveur va connaître des périodes d'inactivité durant $[0, T[$. Donc au moins l'un des clients parmi $C_1, \dots, C_{n-k+1}$ doit débiter une période d'activité. Comme (H3) précise que si une période d'activité débute à la date Z_i , pour $i = 1, \dots, n-k$, elle est terminée à la date Z_{n-k+1} , il est clair que dans tous les cas Z_{n-k+1} est le début d'une période d'activité du serveur.

PROPRIÉTÉ 2.1.2. — Soit j appartenant à $\{1, \dots, n\}$. Pour tout a de $[(j-1)\theta, j\theta[$ et tout réel da suffisamment petit,

$$P(A \in [a, a + da]) = f_j(a)da/T$$

$$\text{où} \quad f_j(a) = \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \left[1 - \frac{(n-r)\theta}{T} \right] r \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{r-1}$$

Démonstration. — Dans une première étape, $\{A \in [a, a + da]\}$ est décomposé en événements disjoints $\{A \in [a, a + da] \cap \mathcal{E}(k)\}$ dont nous calculons les probabilités; puis dans une seconde étape, nous sommes pour obtenir $f_j(a)$.

1^{re} étape :

Considérons a et da vérifiant $(j-1)\theta < a < a + da \leq j\theta$. Si l'attente A est comprise entre a et da , au moins j clients se sont présentés au système depuis le début de la période d'activité en cours à l'instant T . Nous avons donc :

$$\{A \in [a, a + da]\} = \bigcup_{k=j}^n \{A \in [a, a + da] \cap \mathcal{E}(k)\}$$

et comme les $\mathcal{E}(k)$ sont disjoints

$$P[A \in [a, a + da]] = \sum_{k=j}^n P[\{A \in [a, a + da] \cap \mathcal{E}(k)\}]$$

D'autre part, A appartient à $[a, a + da]$ si et seulement si le dernier client arrivé avant T termine son service entre $T + a$ et $T + a + da$, c'est-à-dire si

$$Z_{n-k+1} + k\theta \in [T + a, T + a + da]$$

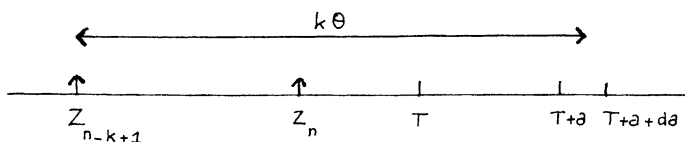


FIG. 2

Nous pouvons maintenant utiliser le lemme 2.1.1 explicitant $\mathcal{E}(k)$ pour écrire :

$$\begin{aligned}
P[\{A \in [a, a + da[\} \cap \mathcal{E}(k)] \\
= \frac{n!}{T^n} \int_{T+a-k\theta}^{T+a+da-k\theta} dz_{n-k+1} \prod_{i=1}^{n-k} \int_{z_{i-1}}^{z_{n-k+1}-(n-k-i+1)\theta} dz_i \\
\prod_{i=2}^{k-j+1} \int_{z_{n-k+i-1}}^{z_{n-k+1}+(i-1)\theta} dz_{n-k+i} \prod_{i=2}^j \int_{z_{n-j+i-1}}^T dz_{n-j+i}
\end{aligned}$$

En utilisant les calculs d'intégrales donnés dans l'annexe 2 nous avons :

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n-k} \int_{z_{i-1}}^{z_{n-k+1}-(n-k-i+1)\theta} dz_i = \frac{1}{(n-k)!} [z_{n-k+1}-(n-k)\theta] z_{n-k+1}^{n-k-1} \\
& \prod_{i=2}^{k-j+1} \int_{z_{n-k+i-1}}^{z_{n-k+1}+(i-1)\theta} dz_{n-k+i} \prod_{i=2}^j \int_{z_{n-j+i-1}}^T dz_{n-j+i} \\
& = \prod_{i=2}^{k-j} \int_{z_{n-k+i-1}}^{z_{n-k+1}+(i-1)\theta} dz_{n-k+i} \int_{z_{n-j}}^{z_{n-k+1}+(k-j)\theta} \frac{[T-z_{n-j+i}]^{j-1}}{(j-1)!} dz_{n-j+1} \\
& = \frac{1}{k!} [k(T-z_{n-k+1})]^{k-1} \\
& - \sum_{i=1}^{k-j} \binom{k}{j+i-1} [(k-j-i+1)\theta]^{k-j-i} [T-z_{n-k+1}-(k-j-i+1)\theta]^{j+i-1}
\end{aligned}$$

et finalement, pour da suffisamment petit

$$\begin{aligned}
P[\{A \in [a, a + da[\} \cap \mathcal{E}(k)] \\
= \binom{n}{k} \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{n\theta}{T} \right] \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{k\theta}{T} \right]^{n-k-1} \times \left[k \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{k-1} \right. \\
\left. - \sum_{i=1}^{k-j} \binom{k}{j+i-1} \left[\frac{(k-j-i+1)\theta}{T} \right]^{k-i-j} \left[\frac{(j+i-1)\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{j+i-1} \right] da/T
\end{aligned}$$

2^e étape :

En décomposant $P[\{A \in [a, a + da[\} \cap \mathcal{E}(k)]$, nous obtenons :

$$f_j(a) = B_j(a) - C_j(a)$$

$$\text{où } B_j(a) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{n\theta}{T} \right] \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{k\theta}{T} \right]^{n-k-1} k \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{k-1}$$

$$\text{et } C_j(a) = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{n\theta}{T} \right] \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{k\theta}{T} \right]^{n-k-1} \\ \times \left[\sum_{i=1}^{k-j} \binom{k}{i+j-1} \left[\frac{(k-j-i+1)\theta}{T} \right]^{k-j-i} \left[\frac{(j+i-1)\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{j+i-1} \right]$$

En utilisant $1 + \frac{a}{T} - \frac{n\theta}{T} = \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{k\theta}{T} \right] - \left[\frac{(n-k)\theta}{T} \right]$ et en développant les puissances de $1 + \frac{a}{T} - \frac{k\theta}{T}$ nous pouvons écrire :

$$B_j(a) = B_j^1(a) - B_j^2(a)$$

$$\text{où } B_j^1(a) = \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n r \binom{n}{r} \binom{r-1}{k-1} (-1)^{r-k} \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{r-1}$$

$$\text{et } B_j^2(a) = \frac{n\theta}{T} \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n r \binom{n-1}{r} \binom{r-1}{k-1} (-1)^{r-k} \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{r-1}$$

En prenant $u = i + j - 1$

$$C_j(a) = \sum_{u=j}^{n-1} \binom{n}{u} \left[\frac{u\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^u D_u(a)$$

$$\text{où } D_u(a) = \sum_{k=u+1}^n \binom{n-u}{k-u} \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{n\theta}{T} \right] \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{k\theta}{T} \right]^{n-k-1} \left[\frac{(k-u)\theta}{T} \right]^{k-u-1}$$

En décomposant à nouveau $1 + \frac{a}{T} - \frac{n\theta}{T}$, des changements appropriés d'indices font alors apparaître l'identité d'Abel (voir annexe 1). Finalement, on trouve :

$$D_u(a) = (n-u) \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{u\theta}{T} \right]^{n-u-1} - (n-u)(n-u-1) \frac{\theta}{T} \left[1 + \frac{a}{T} - \frac{u\theta}{T} \right]^{n-u-2}$$

En reportant cette expression dans $C_j(a)$ et en développant les puissances de $\left[1 + \frac{a}{T} - \frac{u\theta}{T} \right]$ nous obtenons finalement :

$$C_j(a) = C_j^1(a) - C_j^2(a)$$

$$\text{où} \quad C_j^1(a) = \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n r \binom{n}{r} \binom{r-1}{k} (-1)^{r-k-1} \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{r-1}$$

$$\text{et} \quad C_j^2(a) = \frac{n\theta}{T} \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n r \binom{n-1}{r} \binom{r-1}{k} (-1)^{r-k-1} \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{r-1}$$

Pour obtenir $f_j(a)$ il suffit alors d'effectuer $B_j(a) - C_j(a)$ en regroupant $B_j^1(a)$ avec $C_j^1(a)$ et $B_j^2(a)$ avec $C_j^2(a)$:

$$f_j(a) = \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k} r (-1)^{r-k} \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{r-1} \left[1 - \frac{(n-r)\theta}{T} \right]$$

PROPRIÉTÉ 2.1.3. — Soient A la quantité de travail restant dans le système à l'instant T et N le nombre de clients présents dans le système au même instant. Le support de A est $[0, n\theta]$; A admet une unique masse, en 0, d'intensité $(1 - n\theta/T)$ et une densité f/T définie sur $]0, n\theta]$ et pour tout j de $\{1, \dots, n\}$ donnée par

$$\begin{aligned} f(a) &= f_j(a) \\ &= \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \left[1 - \frac{(n-r)\theta}{T} \right] r \left[\frac{k\theta}{T} - \frac{a}{T} \right]^{r-1} \end{aligned}$$

sur $[(j-1)\theta, j\theta]$.

N a une distribution de support $\{0, 1, \dots, n\}$ donnée par

$$P(N=0) = 1 - n\theta/T$$

$$P(N=j) = \pi_j = \frac{n\theta}{T} \delta_1(j) + \sum_{r=j}^n \binom{n}{r} \left(\frac{\theta}{T} \right)^r (g(j, r+1, 1) - rg(j, r, 1))$$

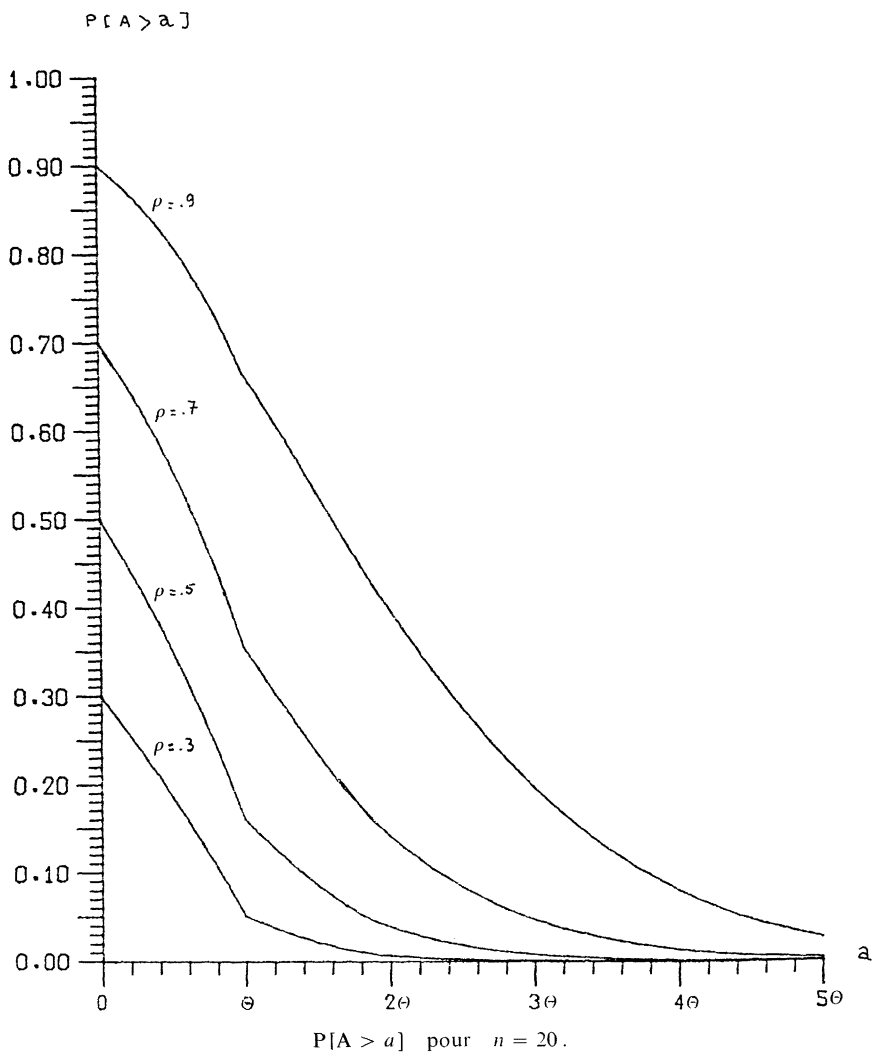
$$\text{où} \quad g(j, r, 1) = \sum_{u=j}^r \binom{r}{u} (-1)^{r-u} (u-j)^{r-1}$$

(voir graphiques 1 et 2).

Démonstration. — Le service étant déterministe de longueur θ , la distribution de N et celle de A vérifient les relations suivantes

$$\begin{cases} P(N=0) = P(A=0) \\ P(N=j) = P((j-1)\theta < A \leq j\theta) \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

GRAPHIQUE 1



Pour prouver la propriété 2.1.3, il suffit donc de montrer que

$$1) \quad P(A = 0) = 1 - n\theta/T$$

$$2) \quad \int_0^{n\theta} f(a) da / T = \sum_{j=1}^n \pi_j = n\theta/T$$

GRAPHIQUE 2.

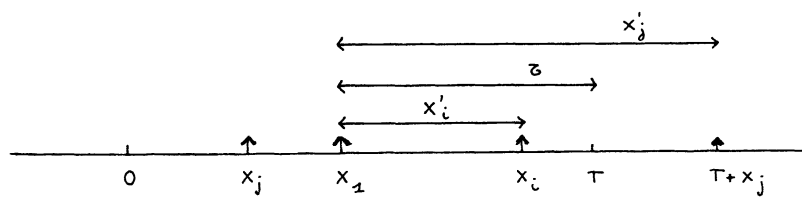
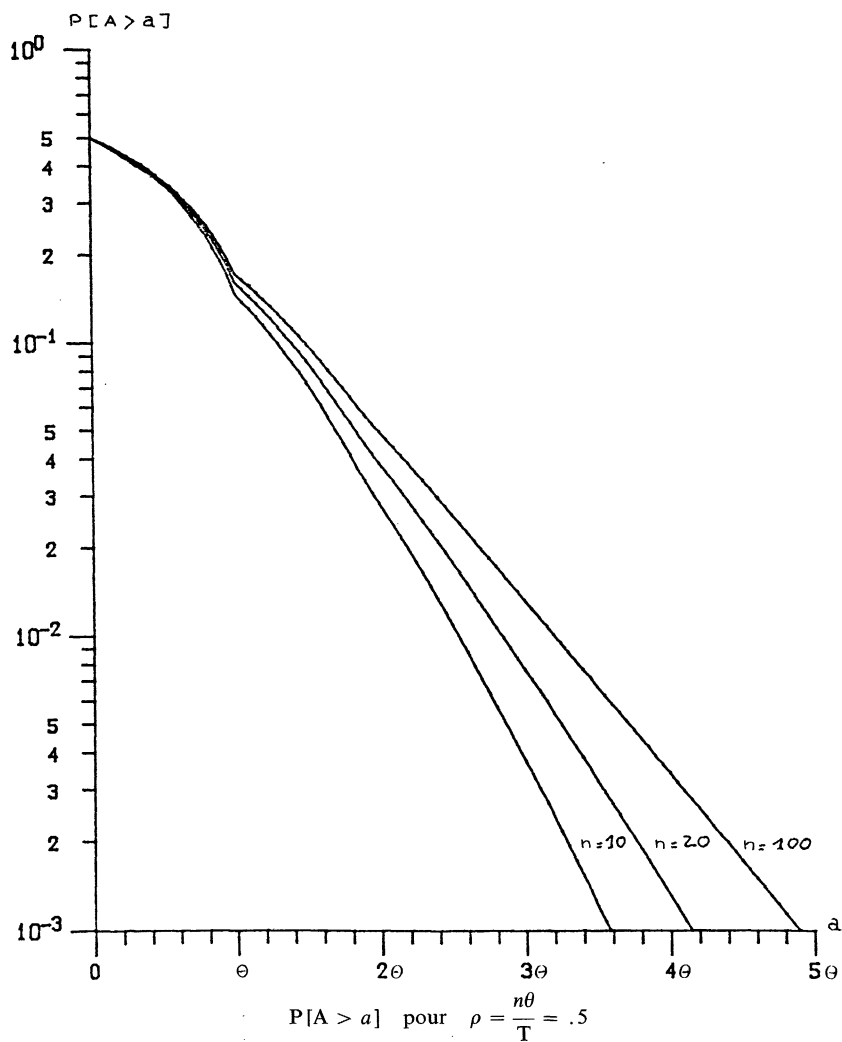


FIG. 3

1) Soit X_i la date d'arrivée du client correspondant au processus $\mathcal{C}_i$. Notons

$$\begin{cases} X'_i = X_i - X_1 + T1_{\{X_i < X_1\}} & \text{pour } i \in \{2, \dots, n\} \\ \tau = T - X_1 \end{cases}$$

$(\tau, X'_2, \dots, X'_n)$ sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, T[$ (voir propriété 3.1.1). Il est clair que $\{A = 0\}$ est $(\tau, X'_2, \dots, X'_n)$ -mesurable. D'autre part, $P(A = 0 | X'_2, \dots, X'_n)$ est la probabilité que le système soit vide à un instant aléatoire d'observation uniformément distribué sur un intervalle de longueur T durant lequel les périodes d'activité du serveur sont connues et ont une durée cumulée $n\theta$. Donc

$$P(A = 0 | X'_2, \dots, X'_n) = 1 - n\theta/T \quad \text{et} \quad P(A = 0) = 1 - n\theta/T \quad \text{aussi.}$$

2)

$$\int_{(j-1)\theta}^{j\theta} f_j(a) da / T = \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r \left[1 - \frac{(n-r)\theta}{T}\right] \times [(k-j+1)^r - (k-j)^r]$$

En ordonnant suivant les puissances de $\frac{\theta}{T}$ et en notant

$$g(j, r, 1) = \sum_{u=j}^r \binom{r}{u} (-1)^{r-u} (u-j)^{r-1}$$

nous obtenons

$$\int_{(j-1)\theta}^{j\theta} f_j(a) da / T = \frac{n\theta}{T} \delta_1(j) + \sum_{r=j}^n \binom{n}{r} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r (g(j, r+1, 1) - rg(j, r, 1))$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{n\theta} f(a) da / T &= \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)\theta}^{j\theta} f_j(a) da / T \\ &= \frac{n\theta}{T} + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r \left[\sum_{j=1}^r (g(j, r+1, 1) - rg(j, r, 1)) \right] \end{aligned}$$

En utilisant l'annexe 3 on voit que

$$\sum_{j=1}^r (g(j, r+1, 1) - rg(j, r, 1)) = G(r+1, 1) - rG(r, 1) = 0$$

2.2. Valeurs moyennes de A et N.

PROPRIÉTÉ 2.2.1. —

$$E(A) = \frac{\theta}{2} \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r$$

$$E(N) = \frac{1}{2} \left[\frac{n\theta}{T} + \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r \right]$$

Démonstration. —

$$E(N) = \sum_{j=1}^n j\pi_j$$

$$= \frac{n\theta}{T} + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r \sum_{j=1}^r j(g(j, r+1, 1) - rg(j, r, 1))$$

En utilisant les notations et les résultats de l'annexe 3 nous avons $g(1, 1) = 1$ et, si $r > 1$

$$\sum_{j=1}^r jg(j, r, 1) = -G(r, 0) + r \left[G(r-1, 0) + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (-1)^{r-1-k} k^{r-1} \right]$$

$$= r!/2$$

Donc

$$E(N) = \frac{1}{2} \left[\frac{n\theta}{T} + \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r \right]$$

Posons $1 - F(a) = P(A > a)$

$$E(A) = \int_0^{n\theta} [1 - F(a)] da$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)\theta}^{j\theta} [1 - F(a)] da$$

$$= T \sum_{j=1}^n \int_0^{\frac{\theta}{T}} \left[\int_0^x f_j(j\theta - Tu) du + \sum_{k=j+1}^n \pi_k \right] dx$$

$$= \theta \left[E(N) - \frac{n\theta}{T} \right] + T \int_0^{\frac{\theta}{T}} \left[\sum_{j=1}^n \int_0^x f_j(j\theta - Tu) du \right] dx$$

Nous allons montrer que $\sum_{j=1}^n \int_0^x f_j(j\theta - Tu) du = nx$, ce qui nous permettra de conclure.

$$\begin{aligned} \int_0^x f_j(j\theta - Tu) du &= \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \left[1 - \frac{(n-r)\theta}{T} \right] \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{(k-j)\theta}{T} + x \right]^r - \left[\frac{(k-j)\theta}{T} \right]^r \right\} \\ &= \sum_{k=j}^n \sum_{r=k}^n \sum_{s=1}^r \binom{n}{r} \binom{r}{k} \binom{r}{s} (-1)^{r-k} \left[1 - \frac{(n-r)\theta}{T} \right] \left[\frac{(k-j)\theta}{T} \right]^{r-s} x^s \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_0^x f_j(j\theta - Tu) du &= \sum_{s=1}^n X(s) x^s \\ \text{où } X(s) &= \sum_{r=s}^n \binom{n}{r} \binom{r}{s} \left(\frac{\theta}{T} \right)^{r-s} \left[1 - \frac{(n-r)\theta}{T} \right] \times \left[\sum_{j=1}^r \sum_{k=j}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} (k-j)^{r-s} \right] \\ X(s) &= \sum_{r=s}^n \binom{n}{r} \binom{r}{s} \left(\frac{\theta}{T} \right)^{r-s} (G(r, s) - (r-s)G(r-1, s)) \end{aligned}$$

où $G(r, s)$ est défini dans l'annexe 3 dont nous utilisons les résultats pour conclure que $X(s) = n\delta_1(s)$.

Il est intéressant de comparer $E(A(n/T, \theta))$ et $E(N(n/T, \theta))$ à l'attente virtuelle moyenne $E(\mathcal{A}(n/T, \theta))$ et au nombre moyen de clients *a priori* $E(\mathcal{N}(n/T, \theta))$ d'une file M/D/1 de taux d'arrivée $\lambda = n/T$ et de temps de service θ .

PROPRIÉTÉ 2.2.2. — $E(\mathcal{A}(n/T, \theta))$ (respectivement $E(\mathcal{N}(n/T, \theta))$) est un majorant de $E(A(n/T, \theta))$ (respectivement de $E(N(n/T, \theta))$) et si l'on fait croître n et T , le rapport n/T restant égal à λ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} E(A(n/T, \theta)) &= E(\mathcal{A}(\lambda, \theta)) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} E(N(n/T, \theta)) &= E(\mathcal{N}(\lambda, \theta)) \end{aligned}$$

Démonstration. — Posons $\rho = n\theta/T$.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\theta}{T} \right)^r &= \left[n! \left(\frac{\rho}{n} \right)^n \sum_{j=0}^n \left(\frac{n}{\rho} \right)^j \frac{1}{j!} - 1 \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \left[1 + \frac{u\rho}{n} \right]^n e^{-u} du - 1 \end{aligned}$$

Or, la suite $\left[1 + \frac{u\rho}{n}\right]^n$ est croissante et converge vers $e^{u\rho}$ quand n croît, ρ restant constant. Avec le théorème de convergence monotone, nous avons donc

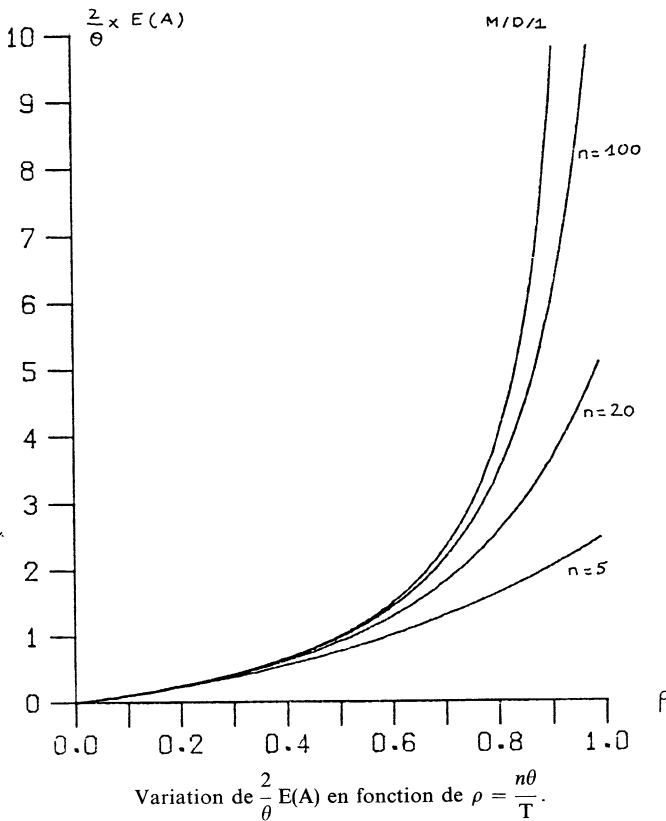
$$\sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r < \frac{\rho}{1-\rho} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r=1}^n \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{\theta}{T}\right)^r = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Donc
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(A(n/T, \theta)) = \frac{\theta}{2} \left[\frac{\rho}{1-\rho} \right] = E(\mathcal{A}(\lambda, \theta))$$

et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(N(n/T, \theta)) = \frac{1}{2} \left[\rho + \frac{\rho}{1-\rho} \right] = E(\mathcal{N}(\lambda, \theta))$$

(voir le graphique 3).

GRAPHIQUE 3.



3. ATTENTE RÉELLE, NOMBRE DE CLIENTS VUS PAR UN CLIENT ARRIVANT

3.1. Propriété du processus des arrivées.

PROPRIÉTÉ 3.1.1. — Soient $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0, T[$. Soit F une variable aléatoire indépendante du n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$, distribuée sur $[0, T[$. Définissons le n -uplet $(Y_1, \dots, Y_n)$ par :

$$Y_j = X_j - F + 1_{\{X_j < F\}}T$$

Alors $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont n variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, T[$.

Démonstration :

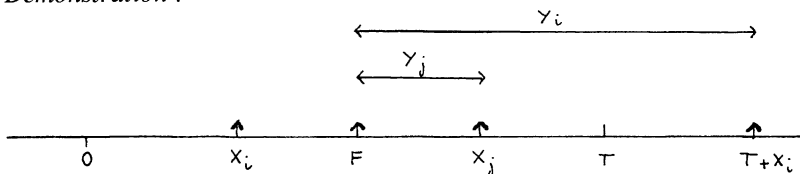


FIG. 4

Notons $\varphi_f(s)$ et $\psi_f(s)$ les fonctions caractéristiques de X_j et Y_j .

$$\begin{aligned}\varphi_f(s) &= E(e^{isX_j}) = \int_0^T e^{ist} dt/T \\ &= (e^{isT} - 1)/isT \\ \psi_f(s) &= E[E(e^{isY_j} | F)] \\ &= E\left[\int_0^F e^{is(t-F+T)} dt/T + \int_F^T e^{is(t-F)} dt/T\right] \\ &= E[(e^{isT} - 1)/isT]\end{aligned}$$

Donc Y_j a même loi que X_j .

Soit $\psi_{1, \dots, n}(s_1, \dots, s_n)$ la fonction caractéristique du n -uplet $(Y_1, \dots, Y_n)$

$$\begin{aligned}\psi_{1, \dots, n}(s_1, \dots, s_n) &= E[e^{i(s_1 Y_1 + \dots + s_n Y_n)}] \\ &= E[E[e^{i(s_1 Y_1 + \dots + s_n Y_n)} | F]] \\ &= E\left[\prod_{j=1}^n (e^{is_j T} - 1)/is_j T\right]\end{aligned}$$

d'après les propriétés d'indépendance du $(n+1)$ -uplet $(F, X_1, \dots, X_n)$. Par conséquent les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

Considérons en particulier une file $nD/D/1$ dont le processus des arrivées est la superposition de n processus élémentaires périodiques $\bar{\mathcal{C}}_1, \dots, \bar{\mathcal{C}}_n$. Notons $X'_1, \dots, X'_{n-1}$ les dates d'arrivées de clients au système entre 2 arrivées successives de clients du processus $\bar{\mathcal{C}}_n$. Alors, $X'_1, \dots, X'_{n-1}$ sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, T[$.

Rappelons que d'après la proposition 1.3 les clients dont les dates d'arrivée sont les points d'un même processus périodique élémentaire subissent la même attente et trouvent donc aussi le même nombre de clients présents dans le système à leur arrivée. Notons A' l'attente d'un client C dont la date d'arrivée est un point de $\bar{\mathcal{C}}_n$ et N' le nombre de clients présents dans le système juste avant l'arrivée de C .

3.2. Distributions de A' et N' .

Choisissons l'origine des temps de telle sorte que la date d'arrivée de C soit égale à T . Notons $Z'_1, \dots, Z'_{n-1}$ la suite ordonnée des dates d'arrivée des clients au système entre 0 et T .

LEMME 3.2.1. — *C est servi après exactement k clients si et seulement si :*

- (H₁) $Z'_{n-k} + k\theta \geq T$
- (H₂) $Z'_{n-k} + (i-1)\theta \geq Z'_{n-1-k+i}$ pour $i = 2, \dots, k$
- (H₃) $Z'_i + (n-k-i)\theta < Z'_{n-k}$ pour $i = 1, \dots, n-1-k$

La démonstration est similaire à celle de la proposition 2.1.1.

En utilisant cette dernière propriété, ainsi que le fait que le $(n-1)$ -uplet $(Z'_1, \dots, Z'_{n-1})$ suit la loi de Dirichlet d'ordre $n-1$ sur $[0, T[$, nous pouvons évaluer la loi de A' et celle de N' en utilisant la même procédure que celle utilisée pour A et N . Par conséquent, A' et N' suivent respectivement les mêmes lois que l'attente virtuelle A et le nombre de clients *a priori* N calculés pour une file $(n-1)D/D/1$. Ces lois sont données par la propriété 2.1.3 et leurs moyennes par la propriété 2.2.1 en changeant n en $n-1$.

Nous remarquons en particulier que l'attente réelle et l'attente virtuelle n'ont pas la même distribution (il en est de même pour le nombre de clients présents dans le système *a priori* ou juste avant l'arrivée d'un client).

Par contre la formule de Little est vérifiée :

- le taux moyen d'arrivée est n/T
- le temps de séjour réel moyen est $\theta + E(A')$
- le nombre moyen de clients dans le système est $E(N)$

et $n/T[\theta + E(A')] = E(N)$.

ANNEXE 1

Formule d'Abel. —

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+k)^{k-1} (y+n-k)^{n-k} = (x+y+n)^n/x \quad \text{si} \quad n \geq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0$$

Démonstration. —

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+k)^{k-1} (y+n-k)^{n-k} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (x+y+n)^r \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^{n-r-k} (x+k)^{n-r-1}$$

or, $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (x+k)^{p-1}$ est la dérivée $(p-1)^e$ au point $t=0$ de la fonction $e^{tx}(e^t-1)^p$.

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^{n-r-k} (x+k)^{n-r-1} &= 0 & \text{si} \quad n \neq r \\ &= 1/x & \text{si} \quad n = r \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x+k)^{k-1} (y+n-k)^{n-k} = (x+y+n)^n/x$$

ANNEXE 2

Proposition. — Pour p et q de $\mathbb{N}$, soit

$$H(x, y, p, q) = \int_0^x dz_1 \int_{z_1}^{x+\theta} dz_2 \dots \int_{z_{p-1}}^{x+(p-1)\theta} (y - z_p)^q / q! dz_p$$

alors $H(x, y, p, 0) = x(x + p\theta)^{p-1}/p!$

$$H(x, y, p, q) = \frac{1}{(p+q)!} \left[y^{p+q} - x \sum_{i=1}^p \binom{p+q}{p-i} (x + (p-i)\theta)^{p-i-1} (y - x - (p-i)\theta)^{q+i} \right]$$

Démonstration. — Pour $q \geq 0$ et $p > 0$, on obtient en intégrant par rapport à z_p :

$$H(x, y, p, q) = H(x, y, p-1, q+1) - \frac{(y - x - (p-1)\theta)^{q+1}}{(q+1)!} H(x, y, p-1, 0)$$

et donc

$$H(x, y, p, q) = \frac{y^{p+q}}{(p+q)!} - \sum_{i=1}^p \frac{(y - x - (p-i)\theta)^{q+i}}{(q+i)!} H(x, y, p-i, 0) \quad (\text{A.2.1})$$

En utilisant cette relation, on prouve par récurrence que

$$H(x, y, p, 0) = x(x + p\theta)^{p-1}/p!$$

En effet, $H(x, y, 1, 0) = x$ et si pour tout $i \leq p-1$, $H(x, y, i, 0) = x(x + i\theta)^{i-1}/i!$ on a :

$$H(x, y, p, 0) = y^p/p! - x/p! \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (y - x - i\theta)^{p-i} (x + i\theta)^{i-1}$$

nous déduisons de la formule d'Abel donnée en annexe 1 que

$$H(x, y, p, 0) = x(x + p\theta)^{p-1}/p!$$

On conclut en reportant l'expression de $H(x, y, p, 0)$ dans A.2.1.

ANNEXE 3

Proposition. — Si $1 \leq j \leq r$ et $0 \leq u \leq r$, posons

$$g(j, r, u) = \sum_{k=j}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} (k-j)^{r-u}$$

$$G(r, u) = \sum_{j=1}^r g(j, r, u)$$

Alors

$$\begin{cases} G(r, 0) = (r-1)r!/2 \\ G(r, 1) = (r-1)! \\ G(r, u) = 0 \quad \text{si} \quad u \geq 2 \end{cases}$$

Démonstration. — En prenant comme couple de variables $i = k - j$ et j et en changeant l'ordre de sommation, nous obtenons :

$$G(r, u) = \sum_{i=0}^{r-1} i^{r-u} \sum_{j=0}^{r-i-1} (-1)^j \binom{r}{j}$$

or

$$(-1)^{r-i-1} \binom{r-1}{i} = \sum_{j=0}^{r-i-1} (-1)^j \binom{r}{j}$$

donc

$$G(r, u) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i-1} \binom{r-1}{i} i^{r-u}$$

qui est la $(r-u)^e$ dérivée au point $t=0$ de la fonction $(e^t - 1)^{r-1}$.

Par conséquent

$$\begin{cases} G(r, 0) = (r-1)r!/2 \\ G(r, 1) = (r-1)! \\ G(r, u) = 0 \quad \text{si} \quad u \geq 2 \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BOYER, A. DUPUIS, A. GRAVEY, J. M. PITIÉ, Description du flux de sortie d'un multiplexeur de canaux déterministes identiques. Séminaire international sur la modélisation et les méthodes d'évaluation de performances. Paris, janvier 1983.
- [2] A. E. ECKBERG, The single server queue with periodic arrival process and deterministic service time, *IEEE Trans. Comm.*, COM-27, 1979, p. 556-562.

- [3] M. RUBINOVITCH, The output of a buffered data communication system, *Stoch. Proc. Appl.*, t. 1, 1973, p. 375-382.
- [4] J. W. COHEN, Superimposed renewal processes and storage with gradual input, *Stoch. Proc. Appl.*, t. 2, 1974, p. 31-58.
- [5] H. KASPI, M. RUBINOVITCH, The stochastic behavior of a buffer with non identical input lines, *Stoch. Proc. Appl.*, t. 3, 1975, p. 73-88.
- [6] F. POLLACZEK, Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet. Chapitre 3. *Mémorial des sciences mathématiques*, Gauthier-Villars, 1957.

(Manuscrit reçu le 25 avril 1983).