ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J.-C. MARCUARD
B. SCHMITT

Entropie et itinéraires des applications unimodales de l'intervalle

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 4 (1983), p. 351-367
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_4_351_0>

© Gauthier-Villars, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIX, n° 4-1983, p. 351-367. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Entropie et itinéraires des applications unimodales de l'intervalle

par

J.-C. MARCUARD et B. SCHMITT
Département de Mathématiques,
Université de Dijon

RÉSUMÉ. — Dans l'étude des applications unimodales de l'intervalle, nous donnons une formule simple permettant d'obtenir l'entropie topologique d'une application unimodale f à partir de son itinéraire maximal $I_f(1)$ (Théorème 4.2), ainsi que les propriétés de cette entropie. Et nous présentons d'autres démonstrations de résultats obtenus par Milnor-Thurston [*2*] et Jonker-Rand [*3*] [*4*].

ABSTRACT. — We establish a sample formula which give the topological entropy of a unimodal map from it maximal itinerary $I_f(I)$ (Theorem 4.2), and also we study the properties of this entropy. We give other proofs of Milnor-Thurston and Jonker Rands's results [*2*] [*3*] [*4*].

I. NOTATIONS

Nous considérons des applications f de l'intervalle $I = [-1, +1]$ dans lui-même telles que :

1) f est continue.

2) $f(0) = 1$.

3) f est strictement croissante sur $[-1, 0]$, strictement décroissante sur $[0, 1]$.

4) L'intervalle $\mathscr{I}(f) = [f(1), 1]$ est stable par f.

© Gauthier-Villars

Une telle application est dite application unimodale de l'intervalle I. De tels exemples sont donnés, en particulier, par les applications

$$f(x) = 1 - \mu \mid x \mid, \; g(x) = 1 - \mu x^2 \; (0 < \mu \leqslant 2).$$

On associe à une application unimodale f une représentation symbolique I_f de l'intervalle $I = [-1, +1]$ à l'aide de l'alphabet (L, C, R) en posant :

$$\begin{array}{lll} A_i = L & \text{si} & f^i(x) < 0, \\ A_i = C & \text{si} & f^i(x) = 0, \\ A_i = R & \text{si} & f^i(x) > 0. \end{array}$$

$I_f(x) = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est l'itinéraire du point x de I associé à f. C'est un élément $\underline{A}$ de l'ensemble $\{ L, C, R \}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit.

On désigne par $\underline{A}_n = A_0 A_1 \ldots A_n$ un bloc de longueur $n + 1$, constitué de R et de L. Par convention, une suite périodique de plus petite période $n + 2$, du type $(\underline{A}_n C)^\infty$ est notée $\underline{A}_n C$ et est dit un élément fini.

L'ensemble $\mathscr{I}$ formé des éléments suivants de $\{ L, C, R \}^{\mathbb{N}}$

$$\underline{A} \in \{ L, R \}^\infty$$
$$\underline{A} = \underline{A}_n C$$

est appelé l'ensemble des suites admissibles.

Si f est une application unimodale et si $x \neq 1$ n'est pas un antécédent de zéro, alors l'itinéraire $I_f(x)$ est un élément de $\mathscr{I}$.

Un bloc $\underline{A}_n = A_0 \ldots A_n$ est dit pair s'il contient un nombre pair de R et impair s'il contient un nombre impair de R.

Si on munit l'alphabet de la relation d'ordre $L < C < R$, on induit sur $\mathscr{I}$ une relation d'ordre totale, compatible avec la topologie et telle que l'application I_f soit croissante. Pour cela on pose

$$\underline{A} < \underline{B}$$

si k étant le premier indice pour lequel $A_k \neq B_k$ on a

$$\begin{array}{lll} \text{ou } \underline{A}_{k-1} \text{ est pair} & \text{et} & A_k < B_k \\ \text{ou } \underline{A}_{k-1} \text{ est impair} & \text{et} & A_k > B_k. \end{array}$$

On définit dans $\mathscr{I}$ une opération $*$ en posant

Si $\underline{A}_{n-1} C$ est un élément fini et $\underline{B}$ un élément quelconque

$$\underline{A}_{n-1} * B = \begin{cases} \underline{A}_{n-1} B_0 \underline{A}_{n-1} B_1 \ldots & \text{si} \quad A_{n-1} \text{ est pair}. \\ \underline{A}_{n-1} \check{B}_0 \underline{A}_{n-1} \check{B}_1 \ldots & \text{si} \quad A_{n-1} \text{ est impair}, \end{cases}$$
$$\text{avec} \quad \check{R} = L, \; \check{C} = C, \; \check{L} = R.$$

Un élément est dit primaire s'il n'est pas décomposable par l'opération $*$. Les propriétés de ces éléments ainsi que de nombreuses propriétés des applications unimodables sont présentées dans l'ouvrage de M. P. Collet et J. P. Eckmann [*1*].

II. ITINÉRAIRES MAXIMAUX

Si S désigne le décalage à droite sur $\mathscr{I}$ un élément $\underline{A}$ est dit maximal si pour tout entier k, $S^k(\underline{A}) \leqslant \underline{A}$.

Remarquons qu'un itinéraire du type $I_f(1)$ est un élément maximal, c'est la « kneading-Sequence » (k. s) introduite par Milnor Thurston [*2*], associée à l'application unimodale f. Réciproquement, tout élément de $\mathscr{I}$ maximal différent de L^∞ et C peut être réalisé comme k.s ou itinéraire maximal d'une fonction unimodale et c'est un invariant semi-topologique [*1*] [*2*].

On note $\mathscr{I}_{\max}$ l'ensemble des éléments maximaux de $\mathscr{I}$ différent de L^∞ et C, ces éléments sont des itinéraires $I_f(1)$ associés à des applications unimodales. Cet ensemble est un fermé contenu dans le segment $[R^\infty, RL^\infty]$ de $\mathscr{I}$.

Sur $\mathscr{I}_{\max}$ l'opération $*$ est interne et l'application $\underline{A}_{n-1} *$ est croissante [*1*]. Si $\underline{A}$ est un bloc fini on pose

$$\begin{aligned} \underline{A} * L &= \underline{A}L \text{ ou } \underline{A}R \quad \text{selon que } \underline{A} \text{ est pair ou impair} \\ \underline{A} * R &= \underline{A}R \text{ ou } \underline{A}L \quad \text{selon que } \underline{A} \text{ est pair ou impair} \\ \underline{A} * C &= \underline{A}C . \end{aligned}$$

On remarque que l'on a les égalités

$$\underline{A} * L < \underline{A} * C < \underline{A} * R, \qquad \text{et que } \underline{A} * L \text{ est pair et } \underline{A} * R \text{ est impair} .$$

Si $\underline{A}C$ est un itinéraire maximal alors les itinéraires périodiques

$$\underline{A} * L^\infty = (\underline{A} * L)^\infty \qquad \text{et} \qquad \underline{A} * R^\infty = (\underline{A} * R)\infty$$

sont maximaux.

Dans la suite le segment $[R^\infty, RL^\infty]$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{I}$ des suites admissibles.

THÉORÈME 2.1. — (1) *Un élément* $\underline{B} = (B_i)$ *du segment* $[R^\infty, RL^\infty]$ *est non maximal si et seulement si il existe un itinéraire fini maximal* $\underline{A}C$ *différent de* $\underline{B}$ *tel que*

$$\underline{A} * L^\infty < \underline{B} < \underline{A} * R^\infty .$$

(2) *Si* n_0 *est le premier indice tel que* $S^{n_0}(\underline{B}) > \underline{B}$ *alors l'élément maximal* $\underline{A}C$ *associé à* $\underline{B}$ *est égal à* $\underline{B}_{n_0-2}C$.

$$(3) \qquad \mathscr{I}_{\max} = \underset{\{\underline{A} : \underline{A}C \text{ maximal}\}}{[R^\infty, RL^\infty] - U(]\underline{A} * L^\infty, \underline{A}C[U]\underline{A}C, \underline{A} * R^\infty[)}.$$

Démonstration. — Les propositions (2) et (3) sont des conséquences de la démonstration de la proposition (1).

a) Soit $\underline{A}C$ un élément fini maximal de longueur n_0. Si l'élément $\underline{B}$ est compris entre $\underline{A} * L^\infty$ et $\underline{A}C$, il peut s'écrire

$$\underline{B} = (\underline{A} * L)^m \underline{B}' \qquad \text{avec} \quad B'_j \neq A_j \text{ pour un indice } j \text{ compris entre } 0 \text{ et } n_0.$$

La relation $\underline{B} > \underline{A} * L^\infty = (\underline{A} * L)^\infty$ implique que $(\underline{A} * L)^m \underline{B}'_j > (\underline{A} * L)^{m+1}$. Comme le bloc $\underline{A} * L$ est pair on en déduit que $(\underline{A} * L)^{m-1}\underline{B}'_j > (\underline{A} * L)^m$, d'où $S^{n_0}(\underline{B}) = (\underline{A} * L)^{m-1}\underline{B}' > \underline{B}$, ce qui prouve la non maximalité de $\underline{B}$. Un raisonnement analogue si $\underline{B}$ est compris entre $\underline{A}C$ et $\underline{A} * R$ démontre la condition suffisante de la proposition.

b) Soit $\underline{B}$ un élément non maximal du segment $[R^\infty, RL^\infty]$. Il existe alors un indice n_0 tel que :

$$S^{n_0}(\underline{B}) > \underline{B} \qquad \text{et} \qquad S^i(\underline{B}) < \underline{B} \qquad \text{pour tout entier } i \text{ inférieur à } n_0.$$

Posons $\qquad \underline{A} = B_0 \ldots B_{n_0-2}$

α) Si $\underline{B}_{n_0-1}$ est pair, alors $\underline{B}_{n_0-1} = \underline{A} * L$ et on a immédiatement $\underline{B} < \underline{A}C$. Par ailleurs $\underline{B}$ peut s'écrire :

$$\underline{B} = (\underline{A} * L)^m \underline{B}' \quad \text{avec} \quad B'_j \neq B_j \text{ pour un indice } j \text{ compris entre } 0 \text{ et } n_0 - 1.$$

La relation $S^{n_0}(\underline{B}) = (\underline{A} * L)^{m-1}\underline{B}' > \underline{B}$ implique que $S^{n_0}(\underline{B}) > (\underline{A} * L)^\infty$. Comme le bloc $\underline{A} * L$ est pair on a

$$\underline{B} = (\underline{A} * L)s^{n_0}(\underline{B}) > (\underline{A} * L)^\infty, \qquad \text{d'où} \qquad \underline{A} * L^\infty < \underline{B} < \underline{A}C.$$

Montrons que l'élément $\underline{A}C$ est maximal. Soit i compris entre 1 et $n_0 - 1$; si $\underline{A}C$ et $S^i(\underline{A}C)$ différent avant C, le fait que $S^i(\underline{B}) < \underline{B}$ montre que $S^i(\underline{A}C) < \underline{A}C$.

Si $\underline{A}C$ et $S^i(\underline{A}C)$ ne diffèrent qu'au niveau de C, considérons $\underline{B}$ et $S^i(\underline{B})$.

$$\begin{aligned} \underline{B} &= B_0 \ldots B_{n_n-1-i} \overbrace{B_{n_0-i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}^{S^{n_0-i}(\underline{B})} \\ S^i(\underline{B}) &= B_i \ldots B_{n_0-1} \quad \underbrace{B_{n_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{S^{n_0}(\underline{B})} \end{aligned}$$

Si $B_{n_0-1} \neq B_{n_0-1-i}$ alors $S^i(\underline{B}) < \underline{B}$ montre encore que $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$.

Si $B_{n_0-1} = B_{n_0-1-i}$ les éléments $\underline{B}$ et $S^i(\underline{B})$ diffèrent nécessairement sinon $S^{n_0-i}(\underline{B}) = S^{n_0}(\underline{B}) > \underline{B}$ et n_0 ne serait pas le plus petit indice niant la maximalité de $\underline{B}$.

Les relations $S^i(\underline{B}) < \underline{B}$ et $S^{n_0-1}(\underline{B}) \leqslant \underline{B} < S^{n_0}(\underline{B})$ montrent que le bloc $\underline{B}_{n_0-1-i}$ est impair donc égal à $\underline{B}_{n_0-2-i} * R$. Comme $\underline{B}_{n_0-2-i} * C < \underline{B}_{n_0-2-i} * R$ on en déduit l'inégalité $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$, ce qui prouve la maximalité de l'élément AC.

β) Si $\underline{B}_{n_0-1} = \underline{A} * R$ est impair, une démonstration analogue montre que $\underline{B}$ est compris entre $\underline{AC}$ et $\underline{A} * R^\infty$ et que $\underline{AC}$ est un élément maximal.

THÉORÈME 2.2. — (1) *Un élément* $\underline{I}$ *périodique est maximal si et seulement si il existe un élément fini maximal* $\underline{AC}$ *tel que* $\underline{I} = (\underline{A} * L)^\infty$ *ou* $\underline{I} = (\underline{A} * R)^\infty$.

(2) *Un élément infini non périodique maximal est limite d'une suite d'éléments finis maximaux.*

Démonstration. — (1) $\underline{AC}$ étant un élément maximal, la maximalité de L^∞ et de R^∞ entraîne la maximalité des éléments $(\underline{A} * L)^\infty = \underline{A} * L^\infty$ et $(\underline{A} * R)^\infty = \underline{A} * R^\infty$.

Réciproquement, soit $\underline{I}$ un élément périodique maximal de période minimale n_0, $\underline{I} = (A_0 \ldots A_{n_0-1})^\infty$.

Posons $\underline{A} = A_0 - A_{n_0-2}$, alors $\underline{I} = (\underline{A} * L)$ ou $(\underline{A} * R)$ selon la parité de $\underline{A}$ et la valeur de A_{n_0-1}. Montrons que l'élément $\underline{AC}$ est maximal.

En raison de la périodicité, il suffit de comparer les éléments $\underline{I}$ et $S^i(\underline{I})$ pour les indices i compris entre 1 et $n_0 - 1$:

$$\underline{I} = A_0 \ldots A_{n_0-1-i} A_{n_0-i} \ldots A_{n_0-1} \ldots$$
$$S^i(\underline{I}) = A_i \ldots A_{n_0-1} A_{n_0} \ldots A_{n_0-1-i} \ldots$$

Si $\underline{I}$ et $S^i(\underline{I})$ diffèrent avant le symbole A_{n_0-1-i} la relation $S^i(\underline{I}) < \underline{I}$ montre que $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$.

Si $\underline{I}$ et $S^i(\underline{I})$ coïncident jusqu'au symbole A_{n_0-1-i}, ils diffèrent nécessairement plus loin, sinon on aurait $S^i(\underline{I}) = \underline{I}$. Cette égalité entraîne que $\underline{I} = (A_0 \ldots A_{n_0-i-1})^\infty$ et n_0 ne serait pas la période minimale.

Les relations $S^i(\underline{I}) < \underline{I}$ et $S^{n_0-i-1}(\underline{I}) < \underline{I} = S^{n_0}(\underline{I})$ montrent que le bloc $\underline{A}_{n_0-1-i}$ est impair, ce qui entraîne comme dans la démonstration du théorème 1 que $S^i(\underline{AC}) < \underline{AC}$. L'élément $\underline{AC}$ est maximal.

(2) Soit $\underline{I}$ un élément infini ; non périodique, maximal. S'il n'était pas limite d'éléments finis maximaux, il existerait un indice n_1 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_1, les éléments tronqués $\underline{I}_n C$ seraient non maximaux.

Il résulte du théorème 1 qu'il existe un élément maximal $\underline{A}C$ indépendant de n, tel que :

$$\underline{A} * L^{\infty} < \underline{I}_n C < \underline{A} * R^{\infty} \qquad \text{pour tout } n \geqslant n_1 .$$

L'élément $\underline{I}$ étant non périodique, on en déduit à la limite que

$$\underline{A} * L^{\infty} < \underline{I} < \underline{A} * R^{\infty}$$

ce qui est contradictoire avec la maximalité de $\underline{I}$ d'après le théorème 1.

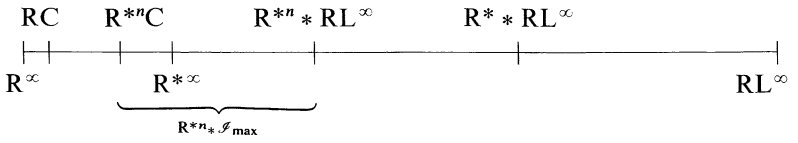
Remarques. — 1) Tous les éléments tronqués d'un élément infini maximal ne sont pas nécessairement maximaux. Par exemple l'itinéraire $\underline{I} = RLRRLR^{\infty}$ est maximal alors que l'itinéraire tronqué $\underline{I}_5 C = RLRRLC$ ne l'est pas.

2) Dans la suite nous appellerons itinéraires maximaux les éléments de $\mathscr{I}_{\max}$ car ils sont associés à tous les itinéraires $I_f(1)$ pour les applications unimodales f.

Dans $\mathscr{I}_{\max}$ muni de la topologie induite de $\{ L, C, R \}^{\infty}$, les itinéraires finis sont des points isolés, les itinéraires infinis non périodiques sont des points d'accumulation. Les itinéraires périodiques peuvent être isolés ou points d'accumulation. Par exemple $(RLL)^{\infty} = RL * R^{\infty}$ est un itinéraire isolé alors que $(RLR)^{\infty} = RL * L^{\infty}$ est un point d'accumulation à gauche.

3) Dans l'intervalle $\mathscr{I}_{\max}$, les itinéraires maximaux définis par récurrence $R^{*n}C = R^{*n-1} * RC$ forment une suite croissante convergeant vers $R^{*\infty}$. De même les itinéraires maximaux $R^{*n} * RL^{\infty}$ forment une suite décroissante vers le même itinéraire $R^{*\infty}$. Il est facile de voir comme dans [8] que

$$R^{*\infty} = \bigcap_{n \geqslant 0} (R^{*n} * \mathscr{I}_{\max})$$



III. PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES APPLICATIONS UNIMODALES

Soit f une application unimodale de l'intervalle I. Rappelons que $\mathscr{I}(f) = [f(1), 1]$, pour tout n de $\mathbb{N}$ posons

$$E_n = \left\{ x \in \mathscr{I}(f) \mid f^n(x) = 0 \right\}, \quad F_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k, \quad u_n = \operatorname{card} E_n . \quad (E_0 = \{ 0 \})$$

L'ensemble F_n représente l'ensemble des zéros de $f^0, f^1, \ldots, f^{n-1}$ dans $\mathscr{I}(f)$, son complémentaire $\mathscr{I}(f)\backslash F_n$ est une réunion d'intervalles disjoints sur lesquels l'application f^n est strictement monotone. En fait nous allons montrer que les points de F_n correspondent aux extrémas de f^n et préciser leur nature.

A la fonction f on associe l'orbite du point 1, $O_f(1) = (a_n = f^n(1))$ et la suite de droite (D_n) d'équation $(y = a_n)$.

Par l'intermédiaire de l'itinéraire $I_f(1) = A_0A_1 \ldots$ de f on associe la suite $(\varepsilon(n))$ en posant :

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) &= +1 \\ \varepsilon(n) &= +1 \qquad \text{si } \underline{A}_{n-1} \text{ est pair} \\ \varepsilon(n) &= -1 \qquad \text{si } \underline{A}_{n-1} \text{ est impair}. \end{aligned}$$

LEMME 3.1. — *Soit f une application unimodale de l'intervalle.*

(1) *Les extrémas de f^{n+1} sont situés sur les droites $D_k (0 \leqslant k \leqslant n)$. Sur une droite D_k, tous les extrémas sont de même nature donnée par la règle suivante :*

. *Si $\underline{A}_{k-1}$ est pair D_k est une droite de maximas de f^{n+1}*

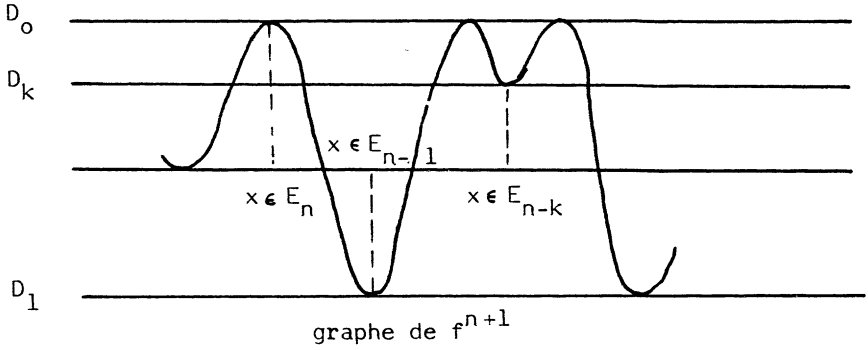
. *Si $\underline{A}_{k-1}$ est impair D_k est une droite de minimas de f^{n+1}.*

(2) *Les nombres des zéros de $f^0, f^1, \ldots, f^n$ vérifient les relations*

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon(k) u_{n-k} = \delta_n \qquad \textit{si} \quad I_f(1) \textit{ infini}.$$

$$\sum_{k=0}^{p} \varepsilon(k) u_{n-k} = \delta_n \qquad \textit{si} \quad I_f(1) = A_{p-1}C \textit{ fini avec } p < n$$

avec $\delta_n = -1, 0,$ ou 1.



Démonstration. — 1) Étudions d'abord la nature de l'extremum $(0, f^{k+1}(0))$. — *Dans le cas où l'itinéraire* $I_f(1)$ *est infini*, prenons un intervalle $\mathscr{I} = [0, a]$ de monotonie de f^{k+1}, $\mathscr{I}$ ne contient pas de zéros de $f, f^2 \ldots f^k$. Les intervalles $f^i(\mathscr{I})$ $(j = 0, \ldots, k)$ sont donc inclus dans $[-1, 0[$ soit dans $]0, 1]$ selon que $A_{i-1} = R$ ou L. Nous dirons que $f^i(\mathscr{I}) \leqslant 0$ $(f^i(\mathscr{I}) \geqslant 0)$ si $f^i(\mathscr{I})$ est inclus dans $[-1, 0[$ $(]0, 1])$.

Supposons que pour un indice i, $f^i(\mathscr{I}) \geqslant 0$, le diagramme

$$\mathscr{I} \xrightarrow{f^i} f^i(\mathscr{I}) \xrightarrow{f} f^{i+1}(\mathscr{I})$$

et la stricte décroissance de f sur $[0, 1]$ montrent que $f^i/\mathscr{I}$ et $f^{i+1}/\mathscr{I}$ ont des sens de monotonie opposés. Par contre si $f^i(\mathscr{I}) \leqslant 0$, les sens de monotonie sont les mêmes, d'où la règle.

si $\underline{A}_{k-1}$ est pair $f^{k+1}/\mathscr{I}$ est décroissante,
si $\underline{A}_{k-1}$ est impair $f^{k+1}/\mathscr{I}$ est croissante.

Le même raisonnement appliqué à l'intervalle $\mathscr{I}' = [-a', 0]$ de monotonie de f^{k+1}, compte tenu du fait que f est strictement décroissante sur $\mathscr{I}'$ montre que $(0, f^{k+1}(0))$ est un maximum si $\underline{A}_{k-1}$ est pair et un minimum si $\underline{A}_{k-1}$ est impair.

— *Dans le cas où l'itinéraire* $I_f(1) = \underline{A}_{p-\frac{C}{2}}$ *est fini* (l'orbite de 0 est périodique de période p, $f^p(0) = 0$) la démonstration précédente s'applique pour $k = 1 \ldots p$.

Montrons que pour $n = pq + k$ les extrémas $(0, f^n(0))$ et $(0, f^k(0))$ sont de même nature.

Étudions le cas où $\underline{A}_{p-2}$ est impair, $(0, f^p(0))$ est alors un minimum. Soit $\mathscr{I} = [0, a]$ un intervalle de monotonie de f^{p+k}, c'est également un intervalle de monotonie de f^k et de f^p, et comme $(0, f^p(0))$ est un minimum $f^p(\mathscr{I}) \geqslant 0$. Considérons le diagramme

$$\mathscr{I} \xrightarrow{f^p} f^p(\mathscr{I}) \xrightarrow{f^k} f^{p+k}(\mathscr{I}).$$

La fonction $f^p/\mathscr{I}$ étant croissante, les applications f^k sur $f^p(\mathscr{I})$ et f^{p+k} sur $\mathscr{I}$ ont même sens de monotomie, donc $(0, f^k(0))$ et $(0, f^{p+k}(0))$ sont des extrémas de même nature. Un raisonnement par récurrence montre le résultat annoncé. Le cas $\underline{A}_{p-2}$ pair se traite de la même façon. Dans le cas où O est périodique de période p, $f^{qp+k}(0) = f^k(0)$ et les droites D_{qp+k} et D_k sont confondues, il n'y a que p droites D_k distinctes.

2) Pour montrer la première partie du lemme nous allons prouver que tous les extrémas de f^{n+1} situés sur la droite D_k sont de même nature que l'extremum $(0, f^{k+1}(0))$. $(k \leqslant n)$.

L'application f étant unimodale, tous les extrémas de f^{n+1} sont obtenus pour les points de l'ensemble F_{n+1}. Les extrémas situés sur la droite D_k sont obtenus pour les points de l'ensemble E_{n-k} car si $x \in E_{n-k}$ on a

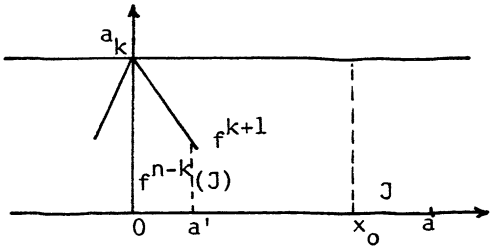
$$f^{n+1}(x) = f^{k+1} \circ f^{n-k}(x) = f^{k+1}(0) = f^k(1) = a_k .$$

Soit x_0 appartenant à E_{n-k} et $\mathscr{I} = [x_0, a]$ un intervalle de monotomie de f^{n+1}. L'intervalle $\mathscr{I}$ est également un intervalle de monotomie de f^{n-k} et l'intervalle $f^{n-k}(\mathscr{I})$ est de monotomie pour f^{k+1}. Considérons le diagramme :

$$\mathscr{I} \xrightarrow{f^{n-k}} f^{n-k}(\mathscr{I}) \xrightarrow{f^{k+1}} f^n(\mathscr{I}) .$$

Il y a quatre cas à étudier selon que $(0, f^{k+1}(0))$ est un maximum ou un minimum et selon que $f^{n-k}(\mathscr{I})$ est du type $[0, a']$ ou $[-a', 0]$.

Plaçons-nous dans la situation où $(0, f^{k+1}(0))$ est un maximum et $f^{n-k}(\mathscr{I}) = [0, a']$; les autres cas se traitent de manière analogue.
$f^{n-k}_{|\mathscr{I}}$ est croissante car $f^{n-k}(x_0) = 0$ et $f^{n-k}(\mathscr{I}) \geqslant 0$.
$f^{k+1}_{|f^{n-k}(\mathscr{I})}$ est décroissante.



Il en résulte que $f^{n+1}_{|\mathscr{I}}$ est décroissante, donc $(x_0, f^{n+1}(x_0))$ est un maximum comme $(0, f^{k+1}(0))$, ce qui prouve la première proposition du lemme.

Les 3 autres cas s'étudient de la même façon.

3) La deuxième proposition du lemme se démontre en écrivant que *pour l'application f^{n+1} le nombre de maximas est égal au nombre de minimas à une unité près.*

En effet, si l'itinéraire $I_f(1)$ est infini, l'ensemble F_{n+1} est l'union disjointe des E_{n-k} pour $k = 0, 1, \ldots, n$. A tous les points de E_{n-k} correspondent des extrémas de même nature, des maximas si $\underline{A}_{k-1}$ est pair, des minimas si $\underline{A}_{k-1}$ est impair, d'où la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon(k) u_{n-k} = \delta_n \qquad \text{avec} \qquad \delta_n = -1, 0 \quad \text{ou} \quad 1 .$$

Si l'itinéraire $I_f(x) = \underline{A}_{p-1}C$ est fini, la périodicité de 0 entraîne que F_{n+1} est l'union disjointe des sous-ensembles E_{n-k} pour $k = 0, 1, \ldots, p$. D'où la relation

$$\sum_{k=0}^{p} \varepsilon(k) u_{n-k} = \delta_n$$

Remarques. — (1) Les nombres u_n de zéros de f^n sont donnés par une relation de récurrence liée à l'itinéraire maximal $I_f(1)$ avec $u_0 = 1$. L'itinéraire $I_f(1)$ de $\mathscr{I}_{\max}$ est donc un invariant pour la suite (u_n).

(2) Si $I_f(1) = R^\infty$, alors $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$.

IV. ENTROPIE TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS UNIMODALES

Soit f une application unimodale de l'intervalle et c_n le nombre de branches de monotomie de f^n dans l'intervalle $\mathscr{I}(f) = [f(1), 1]$, d'après un résultat de Misiurewicz-Slenk [5] l'entropie topologique de f est

$$h(f) = h(f_{|\mathscr{I}(f)}) = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_n .$$

Rappelons que $E_k = f^{-k}(0) \cap \mathscr{I}_f$, $F_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_k$, $u_n = \operatorname{card} E_n$.

LEMME 4.1. — *L'entropie topologique d'une application unimodale f est donnée par son itinéraire maximal $I_f(1)$ à l'aide de la formule*

$$h(f) = 0 \qquad si \qquad I_f(1) = R^\infty$$

$$h(f) = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} u_n \qquad \text{si} \qquad I_f(1) > R^\infty .$$

Démonstration. — Si $I_f(1) = R^\infty$ on a $c_n = 2$ pour tout n et $h(f) = 0$.

Si $I_f(1) > R^\infty$, il est clair que $c_n = \operatorname{card} F_n \pm 1$. L'application $f_{|\mathscr{I}(f)}$ étant surjective et puisque $f^{-1}(E_{n-1}) = E_n$, la suite (u_n) est croissante d'où les inégalités

$$u_n \leqslant \operatorname{card} F_n \leqslant n u_n,$$

et $h(f) = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_n = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \operatorname{card} F_n = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} u_n$, ce qui prouve le lemme.

Dans la suite, on note également h l'application de $\mathscr{I}_{\max}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$h(\underline{A}) = h(f) \qquad \text{si} \qquad \underline{A} = I_f(1).$$

On sait que la suite (u_n) associée à un itinéraire maximal $\underline{A}$ vérifie les relations

$$u_0 = 1, \sum_{k=0}^{n} \varepsilon(k) u_{n-k} = \delta_n \qquad (n > 0) \quad \text{avec} \quad \delta_n = -1, 0 \text{ ou } 1.$$

Si(v_u) est la suite définie par les relations

$$v_0 = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \varepsilon(k) v_{u-k} = 0 \qquad (n > 0),$$

l'étude des rayons de convergence des séries entières $\Sigma u_n t^n$ et $\Sigma v_n t^n$ montre que $\lim \frac{1}{n} \operatorname{Log} u_n = \lim \frac{1}{n} \operatorname{Log} v_n$ si bien que l'on a également $h(\mathrm{A}) = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} v_n$. Dans la suite on déterminera l'entropie d'un itinéraire maximal à partir de la suite (v_n) associée.

THÉORÈME 4.1. — *L'entropie topologique est une application h croissante de l'ensemble des itinéraires maximaux $\mathscr{I}_{\max}$ sur l'intervalle* $[0, \log 2]$.

Pour démontrer le théorème, on utilise le lemme suivant :

LEMME 4.2. — *Soit $\underline{A}$ un itinéraire maximal, pour tout entier n, $v_n \geqslant 0$, et tout $j < n$ les quantités tronquées*

$$\bar{\varepsilon}_{n-j} = \sum_{k=j}^{n} \varepsilon(k) v_{n-k} \qquad \textit{si} \qquad \underline{A} \textit{ est infini},$$

$$\bar{\varepsilon}_{n-j} = \sum_{k=j}^{p} \varepsilon(k) v_{n-k} \qquad \textit{si} \qquad \underline{A} = \mathrm{A}_{p-2} c$$

sont nulles ou du signe de $\varepsilon(j)$.

Démonstration. — Nous ferons la démonstration dans le cas d'un itinéraire infini, la démonstration pour un itinéraire fini étant analogue.

Soit $\underline{A} = \mathrm{A}_0 \mathrm{A}_1 \ldots$ un itinéraire maximal infini, supposons le lemme vrai jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et à l'ordre n pour les indices $1, 2, \ldots, j-1$.

Si $\varepsilon(j) = \varepsilon(j+1)$ alors $\bar{\varepsilon}_{n-j} = \varepsilon(j) v_{n-j} + \bar{\varepsilon}_{n-j+1}$ et la proposition résulte

de l'hypothèse d'induction et du fait que $v_{n-j} \geqslant 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Si $\varepsilon(j) = -\varepsilon(j+1)$ alors $A_j = R$. Comparons $\underline{A}$ et $S^j(\underline{A})$

$$\underline{A} = A_0 \ldots A_l \ldots A_{n-j} \ldots$$
$$S^j(\underline{A}) = A_j \ldots A_{j+l} \ldots A_n \ldots$$

Si $\underline{A}$ et $S^j(\underline{A})$ coïncident jusqu'au symbole A_{n-j} on a

$$\bar{\varepsilon}_{n-j} = \varepsilon(j)(\varepsilon(0)v_{n-j} + \ldots + \varepsilon(n-j)v_0) = 0 .$$

Si $\underline{A}$ et $S^j(\underline{A})$ diffèrent au symbole A_l avec $l \leqslant n-j$, on peut écrire en tenant compte du lemme 3.1

$$0 = (\varepsilon(0)v_{n-j} + \ldots + \varepsilon(l)v_{n-l}) + (\varepsilon(l+1)v_{n-j-l-1} + \ldots + \varepsilon(n-j)v_0)$$

et

$$\bar{\varepsilon}_{n-j} = (\varepsilon(j)v_{n-j} + \ldots + (j+l)v_{n-j-l}) + (\varepsilon(j+l+1)v_{n-j-l-1} + \ldots + \varepsilon(n)v_0) .$$

La maximalité de l'itinéraire $\underline{A}$ montre que :

$$\underline{A}_l = \underline{A}_{l-1} * R \qquad \text{et} \qquad A_j \ldots A_{j+l} = A_{l-1} * L .$$

Il en résulte que

$$\varepsilon(l+1) = -1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(j+l+1) = \varepsilon(j) .$$

D'après l'hypothèse d'induction la seconde parenthèse de $\bar{\varepsilon}_{n-j}$ est du signe de $\varepsilon(j+l+1)$ donc du signe de $\varepsilon(j)$ ou nulle.

Comme $A_0 \ldots A_l = A_j \ldots A_{j+l}$ on a

$$\varepsilon(j)v_{n-j} \qquad + \ldots + \varepsilon(j+l)v_{n-j-l} = \varepsilon(j)(\varepsilon(0)v_{n-j} + \ldots + \varepsilon(l)v_{n-j-l}) .$$

D'après l'hypothèse d'induction et du fait que $\varepsilon(l+1) = -1$, on obtient que la première parenthèse de $\bar{\varepsilon}_{n-j}$ est aussi de signe de $\varepsilon(j)$ ou nulle ce qui prouve le lemme. En particulier, nous avons prouvé que $\bar{\varepsilon}_{n-1}$ est du signe de $\varepsilon(1)$; donc $\bar{\varepsilon}_{n-1} < 0$ et ceci implique que $v_n \geqslant 0$.

Démonstration du théorème 4.1. — 1) Montrons la croissance de l'application h définie sur $\mathscr{I}_{\max}$.

Soient $\underline{A}$ et $\underline{B}$ deux itinéraires maximaux tels que $\underline{A} < \underline{B}$. ($\underline{A} \neq R^\infty$). Notons (a_n) et (b_n) les suites associées à ces itinéraires, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon(k)a_{n-k} = 0 \qquad (n > 0)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon'(k)b_{n-k} = 0 \qquad (n > 0)$$

où $(\varepsilon(k))_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $\varepsilon'(k)_{k\in\mathbb{N}}$) est une suite de -1 ou $+1$ associée à $\underline{A}$ (resp. $\underline{B}$).

Comme $A < B$, il existe un premier indice l tel que $A_l \neq B_l$ et tel que :

$$A_l = A_{l-1} * L \qquad \text{et} \qquad B_l = A_{l-1} * R$$

Il en résulte que :

$$\varepsilon(k)=\varepsilon'(k) \quad \text{pour} \quad k=0, 1, \ldots, -1\,; \quad \text{et} \quad \varepsilon(l+1)=+1, \quad \varepsilon'(l+1)=-1\,.$$

La propriété du lemme 4.2 donne les inégalités

$$\varepsilon(0)a_n + \ldots + \varepsilon(l)a_{n-l} \leqslant 0\,,$$
$$\varepsilon(0)b_n + \ldots + \varepsilon(l)b_{n-l} \geqslant 0\,.$$

Les itinéraires $\underline{A}$ et $\underline{B}$ commencent par le symbole RL donc $\varepsilon(0)=1$, $\varepsilon(1) = -1$. On en déduit alors par itération les inégalités :

$$a_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(n)a_k\,, \qquad b_n \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(n)b_k\,.$$

Les termes a_k et b_k étant égaux pour $k = 0, 1, \ldots, l-1$, on obtient que $a_n \leqslant b_n$ ce qui prouve la croissance de l'entropie h sur $\mathscr{I}_{\max}$.

2) $h(R^\infty) = 0$ car dans ce cas $v_n = 0$ pour $n \geqslant 1$

$h(RL^\infty) = \operatorname{Log} 2$ car dans ce cas $v_n=v_{n+1}+\ldots+v_0$ et donc $v_n=2^{n+1}$.

Pour montrer la continuité de l'application h, sachant que cette application est croissante, il suffit de montrer qu'elle est surjective de l'ensemble $\mathscr{I}_{\max}$ sur l'intervalle $[0, \operatorname{Log} 2]$.

Pour cela considérons la famille a un paramètre d'application unimodale sur $I = [-1, +1]$

$$g_\mu(x) = 1 - \mu\,|\,x\,| \qquad 1 \leqslant \mu \leqslant 2\,.$$

D'après un résultat de Lasota-Yorke [*6*] il existe une mesure ν absolument continue invariante pour g_μ. D'après un résultat de F. Ledrappier [*7*] l'entropie topologique des fonctions g_μ est donnée par la formule

$$h(g_\mu) = \int_I \operatorname{Log} \left| \frac{dg'_\mu}{dx}(x) \right| d\nu(x) = \operatorname{Log} \mu$$

Donc

$$h(I_{g_\mu}(1)) = \operatorname{Log} \mu\,,$$

l'application h est surjective sur l'intervalle $[0, \operatorname{Log} 2]$.

THÉORÈME 4.2. — *Soit h l'application entropie de $\mathscr{I}_{\max}$ sur* $[0, \operatorname{Log} 2]$.

(1) *Si* $\underline{I} = \underline{A}_{p-1}C$ *est un itinéraire maximal fini de longueur* $p+1$ *alors* $h(\underline{I}) = \operatorname{Log} \lambda$ *où* λ *est le plus grand zéro du polynôme* $p_{\underline{I}}(x) = \sum_{k=0}^{p} \varepsilon(k) x^{p-k}$.

(2) *Si* $\underline{I} = (\underline{A}_p)^{\infty}$ *est un itinéraire maximal périodique de période minima de longueur* $p+1$ *alors*

$$h(\underline{I}) = h(\underline{A}_{p-1}C).$$

(3) *Si* $\underline{I}$ *est un itinéraire maximal infini non périodique, il existe une sous-suite croissante d'entiers* (n_k) *telle que :*

$$h(I) = \lim_{n_k} \operatorname{Log} \lambda_{n_k}$$

où λ_{n_k} *est la valeur associée par* (1) *à l'itinéraire tronqué, maximal et fini* $\underline{I}_{n_k-1}C$.

Démonstration. — 1) La première affirmation résulte des lemmes 3.1 et 4.1 et de la théorie générale des suites récurrentes linéaires.

2) Soit f une application unimodale d'itinéraire maximal $I_f(1) = (\underline{A}_p)^{\infty}$ périodique de période minima de longueur $p+1$. D'après le lemme 3.1, on a pour tout entier n

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon(k) v_{n-k} = 0.$$

Décomposons cette somme

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon(k) v_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} \varepsilon(k) v_{n-k} + \sum_{k=p+1}^{n} \varepsilon(k) v_{n-k}.$$

Posons $k = p+1+j$ dans la deuxième somme

$$\sum_{k=p+1}^{n} \varepsilon(k) v_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-p-1} \varepsilon(p+1+j) v_{n-p-i-j}.$$

L'itinéraire $\underline{I}$ étant périodique de période $p+1$ on a

$$\varepsilon(p+1+j) = \varepsilon(p+1) . \varepsilon(j).$$

Il en résulte que :

$$\sum_{k=p+1}^{n} \varepsilon(k) v_{n-k} = \varepsilon(p+1) \sum_{j=0}^{n-p-1} \varepsilon(j) v_{n-p-1-j} = 0$$

d'après le lemme 3.1 appliqué à la fonction f^{n-p}. D'où

$$\sum_{k=0}^{p} \varepsilon(k) v_{n-k} = 0,$$

ce qui prouve la deuxième affirmation du théorème.

3) Soit $\underline{I}$ un itinéraire infini, non périodique et maximal, d'après le théorème 2.2, il existe toujours une sous-suite d'itinéraires maximaux finis tronqués qui converge vers $\underline{I}$. La troisième affirmation résulte de la continuité de l'application entropie h.

Exemples :

$$P_{RC}(\lambda) = \lambda - 1 \qquad h(RC) = h(R^{\infty}) = h((RL)^{\infty}) = 0$$

$$P_{RLC}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 \qquad h(RLC) = h((RLR)^{\infty}) = h((RLL)^{\infty}) = \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$P_{RL^nC}(\lambda) = \lambda^{n+1} - \lambda^n \ldots 1 = \frac{\lambda^{n+2} - 2\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}.$$

$P_{RL^nC}(\lambda) = 0$ donne $\lambda = 2 - \dfrac{1}{\lambda^{n+1}}$ comme $\lambda > 1$, on en déduit

$$h(RL^{\infty}) = \lim_n h(RL^nC) = \operatorname{Log} 2.$$

COROLLAIRE 4.1. — *Soit* $\underline{A}_{p-1}C$ *un itinéraire fini maximal de longueur* $p+1$, *et* $\underline{B}$ *un itinéraire maximal quelconque :*

$$h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = \sup \left\{ h(\underline{A}_{p-1}C), \frac{h(\underline{B})}{p+1} \right\}.$$

Démonstration. — 1) Si $\underline{B} = \underline{B}_{q-1}C$ est un itinéraire maximal fini, de la définition de l'opération * on déduit

$$P_{\underline{A}_{p-1}*B}(x) = P_{\underline{A}_{p-1}C}(x) \cdot P_{\underline{B}}(x^{p+1})$$

le corollaire découle alors de la première proposition du théorème 4.2.

2) Si $\underline{B}$ est un itinéraire infini maximal, le corollaire résulte de la continuité de l'entropie sur $\mathscr{I}_{\max}$.

COROLLAIRE 4.2. — *Soit h l'application entropie de* $\mathscr{I}_{\max}$ *sur* $[0, \operatorname{Log} 2]$.

(1) $$h^{-1}(0) = [R^{\infty}, R^{*\infty}] \cap \mathscr{I}_{\max}.$$

(2) Si $\underline{A}_{p-1}C > R^{*\infty}$ *alors pour tout itinéraire maximal* $\underline{B}$ *de* $[L^{\infty}, RL^{\infty}]$

$$h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = h(\underline{A}_{p-1}C).$$

(3) *Si* $\underline{A}_{p-1}C < R^{*\infty}$ *alors pour tout itinéraire maximal* $\underline{B}$ *de* $[L^\infty, RL^\infty]$

$$h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = \frac{h(\underline{B})}{p+1}.$$

Démonstration. — (1) D'après le théorème 4.2

$$h(R^\infty) = h(RC) = \operatorname{Log} 1 = 0.$$

Par récurrence, on obtient à partir du corollaire 4.1

$$h(R^{*n} * RC) = 0.$$

Et par continuité de h on obtient

$$h(R^{*\infty}) = 0.$$

Par ailleurs si $\underline{A} > R^{*\infty}$, comme les itinéraires $R^{*n} * RL^\infty$ convergent vers $R^{*\infty}$, il existe un indice n_0 tel que

$$R^{*n_0+1} * RL^\infty \leqslant \underline{A} \leqslant R^{*n_0} * RL^\infty.$$

Comme $h(RL^\infty) = \operatorname{Log} 2$, on a d'après le corollaire 4.1

$$\frac{1}{2^{n_0+1}} \operatorname{Log} 2 = h(R^{*n_0+1} * RL^\infty) \leqslant h(\underline{A}) \leqslant h(R^{*n_0} * RL) = \frac{1}{2^{n_0}} \operatorname{Log} 2,$$

donc $h(\underline{A}) > 0$.

(2) Si $\underline{A}_{p-1}C > R^{*\infty}$, comme précédemment les inégalités

$$R^{*n_0+1} * RL^\infty \leqslant \underline{A}_{p-1} \leqslant R^{*n_0} * RL^\infty$$

entraînent que $p + 1 > 2^{n_0+1}$, donc

$$\frac{h(\underline{B})}{p+1} < \frac{h(\underline{B})}{2^{n_0+1}} < \frac{\operatorname{Log} 2}{2^{n_0+1}} \leqslant h(\underline{A}_{p-1}C)$$

d'où $h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = h(\underline{A}_{p-1}C)$

(3) Si $\underline{A}_{p-1}C < R^{*\infty}$, comme $h(\underline{A}_{p-1}C) = 0$ on a bien

$$h(\underline{A}_{p-1} * \underline{B}) = \frac{h(\underline{B})}{p+1}$$

ce qui prouve le corollaire.

On constate que l'entropie est constante sur tous les intervalles de la forme $[\underline{A}_{p-1} * L^\infty, \underline{A}_{p-1} * RL^\infty] \cap \mathscr{I}_{\max}$ où $\underline{A}_{p-1}C = R^{*n} * \underline{B}C$ $(n \geqslant 0)$ et $\underline{B}C$ est un itinéraire fini maximal primaire, la valeur de l'entropie étant

$\frac{h(\underline{BC})}{2^n}$. Il est aisé d'autre part de voir que l'entropie est strictement croissante sur l'ensemble des itinéraires infinis maximaux non périodiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. COLLET, J.-P. ECKMANN, *Iterated maps on the interval as dynamical systems. Progress in Physics.* Birkhauser, Boston, 1980.

[2] J. MILNOR, W. THURSTON, *On iterated maps on the interval I and II.* Handwritten notes.

[3] L. JONKER, D. RAND, *Bifurcation in one dimension I and II.* Preprint.

[4] L. JONKER, D. RAND, *A lower bound for the entropy of certain maps of the unit interval.* Preprint.

[5] M. MISIUREWICZ, W. SZLENK, Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math.*, t. **67**, 1980, p. 45-63.

[6] A. LASOTA, J. A. YORKE, On the existence of invariant measures for piecewise monotomic transformations. *Trans. A. M. S.*, t. **183**, 1973, p. 481-485.

[7] F. LEDRAPPIER, *Some properties of absolutely continues invariant measures on an interval.*

[8] MATSUMOTO Shigenori, *On the bifurcation of Periodic Points of one dimensional dynamical systems of a certain kind.* Preprint.

(Manuscrit reçu le 1er mars 1983)