ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CATHERINE LAREDO
ALAIN ROUAULT

Grandes déviations, dynamique de populations et phénomènes malthusiens

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 4 (1983), p. 323-350
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_4_323_0>

© Gauthier-Villars, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIX, n° 4-1983, p. 323-350.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Grandes déviations, dynamique de populations et phénomènes malthusiens

par

Catherine LAREDO
INRA, Biométrie, Route de Saint-Cyr
78000 Versailles, France

et

Alain ROUAULT
ERA CNRS 532, Univ. Paris-Sud,
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

ABSTRACT. — An ε-indexed family of Crump-Mode-Jagers branching process with random walk is constructed from a given process, multiplying jumps and life-lengths and dividing frequency of jumps by the same factor ε. Let $\zeta_t^\varepsilon(A)$ be the cardinal of the population lying in A at t. It is shown that either a. s. $\zeta_t^\varepsilon(A)=0$ for ε small enough or $\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(A)$ tends to a positive deterministic limit, in probability as ε tends to 0. That allows to define a time and space homogeneous function α, generalizing the Malthusian parameter of the classical (non spatial) model.

RÉSUMÉ. — Nous considérons une famille, indexée par $\varepsilon > 0$, de processus de branchement de Crump-Mode-Jagers [*10*] avec marche aléatoire. Le processus correspondant à ε est obtenu à partir d'un processus donné en multipliant par ε les sauts et les durées de vie et en divisant par ε. la fréquence des sauts. Soit $\zeta_t^\varepsilon(A)$ l'effectif de la population située dans A à l'instant t. Nous montrons que, ou bien p. s. pour ε assez petit $\zeta_t^\varepsilon(A) = 0$ ou bien $\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(A)$ a, en probabilité, une limite déterministe positive quand ε tend vers 0. Ceci permet de définir une fonction homogène α du temps et de l'espace, qui généralise le paramètre de Malthus du modéle classique (non spatial).

© Gauthier-Villars

I. INTRODUCTION

Un modèle classique de croissance de populations est décrit par un processus de Bellman-Harris [*10*]. Chaque individu a une durée de vie aléatoire de loi G et à sa mort donne naissance à un nombre aléatoire (d'espérance $m > 1$) d'enfants. Partons d'un seul individu à $t = 0$ et construisons l'arbre généalogique. A l'instant t, des individus de différentes générations sont en vie. Pour t grand, la moyenne empirique des sauts (durées de vie) sur une branche donnée est proche de $\int t\mathrm{G}(dt)$ d'après la loi des grands nombres. Les branches correspondant à des moyennes inférieures à $\int t\mathrm{G}(dt)$ sont moins probables, mais ont eu le temps de proliférer plus. Il y a phénomène de compensation dont le résultat est qu'asymptotiquement le nombre d'individus en vie à l'instant t est proche de $e^{\alpha t}\mathrm{W}$. W est une v. a. positive (strictement sous certaines conditions) et α, appelé *paramètre de Malthus* est l'unique solution positive de

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} m\mathrm{G}(dt) = 1 . \tag{1.1}$$

Ceci se démontre généralement en utilisant la théorie du renouvellement [*10*]. Nous lui préférons l'approche « grandes déviations » qui peut se résumer ainsi.

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k, \ldots$ des v. a. i. i. d. de loi G et $\mathrm{S}_k = \mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_k$. Pour tout $\beta > 0$, la contribution de la génération numéro $\left[\frac{t}{\beta}\right]$ (1) à l'espérance du cardinal de la population en vie à l'instant t est, pour t grand, de l'ordre de

$$\begin{aligned} m^{\left[\frac{t}{\beta}\right]}\mathrm{P}(\mathrm{S}_{\left[\frac{t}{\beta}\right]} \simeq t) &= m^{\left[\frac{t}{\beta}\right]} \exp\left(-\frac{t}{\beta}(h_{\mathrm{G}}(\beta) + o(1))\right) \\ &= \exp\left(-\frac{t}{\beta}(h_{\mathrm{G}}(\beta) - \operatorname{Log} m + o(1))\right) \end{aligned}$$

(1) $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x.

où h_G est la transformée de Cramer [2] de la loi G, c'est-à-dire

$$h_G(\beta) = \sup_\theta (\theta\beta - L_G(\theta)) \qquad \text{avec} \qquad L_G(\theta) = \operatorname{Log} \int_0^\infty e^{\theta s} G(ds).$$

Les différentes exponentielles obtenues pour des β différents sont toutes négligeables par rapport à la plus grande $e^{\alpha' t}$ où

$$\alpha' = -\inf_{\beta > 0} \left(\frac{1}{\beta} (h_G(\beta) - \operatorname{Log} m) \right). \tag{1.2}$$

Cet inf est atteint en $\beta_0 = \int_0^\infty t e^{-\alpha t} m G(dt)$ et $\alpha' = \alpha$. Les générations portant les numéros $\frac{t}{\beta_0} + o(t)$ sont prépondérantes car leurs espérances le sont et une loi des grands nombres joue. β_0 est l'âge moyen de procréation, connu en démographie [10].

Outre cette mise en évidence, cette approche a l'avantage de s'étendre au cas plus général du modèle décrit par Jagers ([10], chap. 6) (²), auquel nous rajoutons une dimension spatiale. A un individu y sont associés : une durée de vie λ_y, un instant de naissance T_y et une position (fixe) X_y. Sa descendance immédiate est décrite par une mesure ponctuelle ξ_y sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, donnant les instants de naissance et les positions de ses enfants, calculés à partir de (T_y, X_y) pris comme origine. Nous étudions un processus de branchement où tous les (λ_y, ξ_y) sont i.i.d. Les sauts sur une ligne généalogique prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. L'échelle asymptotique du modèle de Bellman-Harris ($t \to \infty$) conduit ici à effectuer une homothétie de rapport ε dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et à étudier le comportement de la population quand ε tend vers 0. Autrement dit, à partir d'un processus de référence nous construisons une famille de processus indexée par ε en multipliant par ε les sauts (dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) et les durées de vie. Soit $\zeta_t^\varepsilon(A)$ le cardinal de la population en vie à l'instant t et située dans A, borélien de $\mathbb{R}$. Soient μ l'intensité du processus ponctuel ξ, L le logarithme de sa transformée de Laplace, supposée définie partout et h sa transformée de Cramer.

Définissons α, homogène de degré 1, par

$$\alpha(t, x) = -\inf_{\beta > 0} \frac{1}{\beta} h\left(\frac{t}{\beta}, \frac{x}{\beta}\right). \tag{1.3}$$

(²) Ce modèle est souvent appelé modèle de Crump-Mode-Jagers.

Nous montrons, sous certaines hypothèses, qu'il existe un cône $\mathscr{S}$ tel que, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

1) si $\{ t \} \times \mathrm{I}$ est inclus dans $(\overline{\mathscr{S}})^c$, alors p. s. $\zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) = 0$ pour ε assez petit;

2) si $\{ t \} \times \mathrm{I}$ coupe $\mathscr{S}$, alors $\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I})$ converge en probabilité vers $\sup_{x \in \mathrm{I}} \alpha(t, x)$ quand ε tend vers 0.

La fonction α joue le rôle de paramètre de Malthus local, et la relation (1.1) devient

$$\mathrm{L}\left(-\frac{\partial \alpha}{\partial t}, -\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) = 0 . \tag{1.4}$$

Le travail décisif sur l'utilisation des grandes déviations dans les processus de branchement est dû à Biggins [*4*] [*5*] [*6*], dont nous utilisons plusieurs techniques. Après la rédaction de ce travail, nous avons appris [*8*] (voir aussi [*7*]) que Biggins avait obtenu un résultat voisin (convergence p. s. mais avec durée de vie infinie). Son optique est un peu différente, il fait tendre t vers l'infini, sans introduire de ε. L'intérêt de ε est d'envisager $\alpha(t, .)$ dans son évolution au cours du temps. Dans le cas présent, il est possible de ne pas introduire de ε car la fonction α est homogène à cause de l'hypothèse d'équidistribution des ξ_y (la reproduction ne dépend ni de l'instant, ni de la position). Cependant ce cadre de travail est adéquat pour étudier le cas général d'une dépendance de ξ_y par rapport à $(\mathrm{T}_y, \mathrm{X}_y)$.

II. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1. Processus de branchement.

Les notations de base sont proches de Jagers ([*10*], chap. 6). Nous rajoutons seulement une dimension spatiale sous la forme de l'analogue d'une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$. A un individu né à l'instant σ, situé en a, on associe un couple de v. a. (λ, ξ) où λ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et ξ à valeurs dans M, ensemble des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne pour la topologie vague. λ représente la durée de vie de l'individu et ξ son processus de reproduction. Les points de ξ représentent les couples (instant de naissance, position) des différents enfants, à partir de (σ, a) pris pour origine. Nous supposons que la loi de (λ, ξ), définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathrm{M}$ est indé-

pendante de (σ, a) (processus homogène) et que ξ a une intensité μ, mesure de Radon sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ telle que

$$\mu(\mathrm{B}) = \mathrm{E}\xi(\mathrm{B}) \qquad (\mathrm{B} \text{ borélien borné})$$

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} f(t, x)\mu(dt, dx) = \mathrm{E} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} f(t, x)\xi(dt, dx)$$

(f borélienne bornée).

Nous supposerons

$$\text{(H1)} \qquad 1 < m = \mu(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) < \infty$$

(m est le nombre moyen d'enfants par individu)

$$\text{(H2)} \qquad \mathrm{P}(\xi([0, \lambda] \times \mathbb{R}) \geqslant 1) = 1$$

(un individu a au moins un enfant durant sa vie).

Soient $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $\mathrm{J}_n = \mathbb{N}^{*n}$, $\mathrm{J} = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_n\right)$. J est l'ensemble potentiel des descendants de $\{0\}$ y compris ce dernier, décomposé en générations. Notons y l'élément général, dont les descendants potentiels sont les z de $\mathrm{J}(y) = \{y\} \times \mathrm{J}$ (par convention $(y, 0) = y$).

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}) = \prod_{y \in \mathrm{J}} (\Omega_y, \mathscr{A}_y, \mathrm{P}_y)$ où les $(\Omega_y, \mathscr{A}_y, \mathrm{P}_y)$ sont des espaces identiques sur lesquels on définit (λ_y, ξ_y) de même loi que (λ, ξ). La notion de réalisation est définie par récurrence:

0 est réalisé;

(y, k) est réalisé si y l'est et $\xi_y(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \geqslant k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$.

Il est facile de construire une indexation mesurable dans M, c'est-à-dire une application mesurable de $\mathrm{M} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (cf. [*12*], p. 247) permettant de définir sans ambiguïté « le $k^{\text{ième}}$ point de ξ_y » noté $(\mathrm{T}_y^k, \mathrm{X}_y^k)$, pour $k \leqslant \xi_y(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. L'instant de naissance T_y et la position X_y d'un individu $y = (i_1, \ldots, i_n)$ sont obtenus en additionnant les quantités relatives à chacun de ses ancêtres par rapport au précédent :

$$(2.1.1) \quad \mathrm{T}_y = \mathrm{T}_0^{i_1} + \ldots + \mathrm{T}_{(i_1, \ldots, i_{n-1})}^{i_n}, \qquad \mathrm{X}_y = \mathrm{X}_0^{i_1} + \ldots + \mathrm{X}_{(i_1, \ldots, i_{n-1})}^{i_n}$$

(et $(\mathrm{T}_0, \mathrm{X}_0) = (0, 0)$).

L'ensemble aléatoire des individus réalisés de J_n (resp. $\mathrm{J}_n(y)$) est noté R_n (resp. $\mathrm{R}_n(y)$). Le processus obtenu en oubliant les positions, $(\mathrm{card}\, \mathrm{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus de Galton-Watson d'espérance m, supercritique, avec non-extinction p. s. sous les hypothèses (H1) et (H2).

Soit $A \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$; $\eta(A)$ est l'ensemble des « nés dans A », décomposé suivant les générations en les $\eta_n(A)$; $Z(A)$ et $Z_n(A)$ sont les cardinaux de ces ensembles

$$(2.1.2) \qquad \eta_n(A) = \{ y \in R_n \mid (T_y, X_y) \in A \}, \qquad \eta(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \eta_n(A)$$

$$Z_n(A) = \sum_{y \in R_n} \chi((T_y, X_y) \in A)\,(^3), \qquad Z(A) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(A)$$

Si $t \in \mathbb{R}^+$, $I \subset \mathbb{R}$, le nombre d'individus en vie à l'instant t et situés dans I est $\zeta_t(I)$:

$$(2.1.3) \quad \zeta_t(I) = \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta_{t,n}(I); \quad \zeta_{t,n}(I) = \sum_{y \in R_n} \chi(T_y \leqslant t < T_y + \lambda_y)\chi(X_y \in I).$$

De même, le nombre de descendants de y en vie à l'instant t et situés dans I est

$$(2.1.4) \qquad \zeta_t(I\,;\,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{z \in R_n(y)} \chi(T_z \leqslant t < T_z + \lambda_z)\chi(X_z \in I).$$

L'hypothèse H2 peut alors se réécrire

$$(2.1.5) \qquad \chi(T_y \leqslant t) \leqslant \zeta_t(\mathbb{R}\,;\,y) \qquad \text{(pour tout } y \text{ et tout } t).$$

Par construction, deux individus différents de la même génération ont des descendances distinctes (principe d'exclusion):

$$(2.1.6) \qquad \sum_{y \in R_n} \zeta_t(I\,;\,y) \leqslant \zeta_t(I) \qquad \text{(pour tout } n, y, t).$$

On peut relier les v. a. ζ et Z de la façon suivante. I_1 et I_2 sont 2 intervalles de $\mathbb{R}$, $I_1 \subset I_2$, u et t vérifient $0 < u < t$ et A est le rectangle $[t-u, t] \times I_1$. Alors, sous (H2), on a :

$$(2.1.7) \qquad \zeta_t(I_2) \geqslant Z_n(A) - \sum_{y \in \eta_n(A)} \zeta_t(I_2^c\,;\,y).$$

En effet si $y \in \eta_n(A)$, on a $T_y \leqslant t$, donc d'après (2.1.5)

$$1 \leqslant \zeta_t(\mathbb{R}\,;\,y) = \zeta_t(I_2\,;\,y) + \zeta_t(I_2^c\,;\,y).$$

(3) $\chi(.)$ est la fonction indicatrice d'événement.

Il suffit d'appliquer le principe d'exclusion (2.1.6) pour aboutir à (2.1.7).

La famille indexée par ε est définie par

$$\zeta^{\varepsilon}_{t,n}(\mathrm{I}) = \zeta_{\frac{t}{\varepsilon},n}\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{I}\right), \qquad \zeta^{\varepsilon}_{t}(\mathrm{I}) = \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{I}\right). \tag{2.1.8}$$

En combinant (2.1.1) et (2.1.2) on vérifie facilement la relation suivante, base d'une analogie fructueuse avec les marches aléatoires [*4*]

$$\mathrm{E}Z_n(\mathrm{A}) = \mu_n(\mathrm{A}) \quad (\mu_n \text{ n}^{\text{ième}} \text{ puissance de convolution de } \mu). \tag{2.1.9}$$

Enfin $\mathscr{B}_n$ désigne la tribu engendrée par les n premières générations non comptés leurs temps de vie, c'est-à-dire engendrée par les ξ_y, $y \in \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathrm{J}_k$.

2. Transformée de Cramer.

Considérons une mesure μ positive sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, finie. Si $y = (t, x)$ est le point courant de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, supposons

(H3) 1) pour tout θ de $\mathbb{R}^2$ $\exp \mathrm{L}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \exp((\theta, y))\mu(dy) < \infty$(*)

2) C étant l'enveloppe convexe fermée du support de μ, on a $\mu(\partial \mathrm{C}) = 0$ (donc $\mathrm{C} \neq \emptyset$) (*).

$$h(y) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^2} ((\theta, y) - \mathrm{L}(\theta)) \tag{2.2.1}$$

L est convexe et analytique. h est s. c. i. partout, finie sur $\mathring{\mathrm{C}}$, infinie sur $\partial \mathrm{C}$ et C^c, strictement convexe et analytique sur $\mathring{\mathrm{C}}$. grad L est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathring{\mathrm{C}}$. De plus, pour tout y de $\mathring{\mathrm{C}}$, on a :

$$h(y) = (\theta, y) - \mathrm{L}(\theta) \tag{2.2.2}$$

où θ est l'unique solution de grad $\mathrm{L}(\theta) = y$, et alors grad $h(y) = \theta$. Nous dirons qu'un tel couple (θ, y) est en dualité [*2*].

Pour tout B sous-ensemble de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, posons

$$\mathrm{H}(\mathrm{B}) = \inf_{y \in \mathrm{B}} h(y). \tag{2.2.3}$$

---

(4) (θ, y) désigne le produit scalaire de θ et y dans $\mathbb{R}^2$; $\partial \mathrm{C}$, $\mathring{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{C}}$, C^c sont resp. la frontière, l'intérieur, la fermeture et le complémentaire de C.

Au voisinage de l'axe $\{0\} \times \mathbb{R}$, h a les 2 propriétés suivantes :

1) Si $a \in \mathbb{R}^+$ et si Γ_a^+ et Γ_a^- sont les 2 cônes $\{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x \geqslant at\}$ et $\{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x \leqslant -at\}$ alors $\underline{\mathrm{H}}(a) = \mathrm{H}(\Gamma_a^+ \cup \Gamma_a^-)$ vérifie

$$\lim_{a \to +\infty} \underline{\mathrm{H}}(a) = +\infty . \tag{2.2.4}$$

En effet l'ensemble $\mathrm{K_M} = \{y \mid h(y) \leqslant \mathrm{M}\}$ est compact car convexe fermé borné dans toutes les directions (Banach-Steinhaus) et ne touche pas $\{0\} \times \mathbb{R} \subset (\mathring{\mathrm{C}})^c$. Il existe donc $a > 0$ tel que $\mathrm{K_M} \cap (\Gamma_a^+ \cup \Gamma_a^-) = \emptyset$ (voir fig. 1).

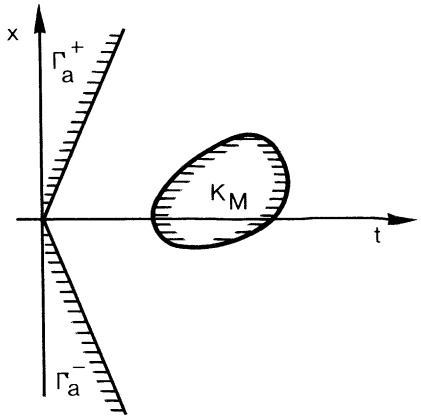

FIG. 1.

2) Si B est compact et $k > 0$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{H}\left(\frac{1}{k}\mathrm{B}\right) = +\infty . \tag{2.2.5}$$

Il suffit en effet de remarquer qu'il existe k tel que $\frac{1}{k}\mathrm{B} \cap \mathrm{K_M} = \emptyset$.

Le minimum de h est obtenu pour $\theta = 0$, il vaut $-\mathrm{L}(0) = -\mathrm{Log}\, m$. Le cône $\mathscr{S} = \{y \mid$ il existe $\beta > 0$ tel que $h(\beta y) < 0\}$ est donc non vide sous (H1) et la fonction α définie par

$$\alpha(y) = \sup_{\beta > 0} \left(-\frac{1}{\beta} h(\beta y)\right) \tag{2.2.6}$$

est finie sur $\mathscr{C} = \mathbb{R}^{+*} \cdot \mathring{\mathrm{C}}$ et strictement positive sur $\mathscr{S}$, négative sur $\mathscr{S}^c$.

THÉORÈME 1. — Sous l'hypothèse (H3), il existe une fonction β définie

sur $\mathscr{C}$, à valeurs positives telle que $\beta(y)\alpha(y) = -h(\beta(y)y)$. Sur $\mathscr{C}$, α et β sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, β est homogène de degré -1, α est homogène de degré 1 et vérifie

$$\text{(2.2.7)} \qquad L(-\operatorname{grad}\alpha) = 0$$

Démonstration. — Sur $\mathscr{C}$, h est finie, de sorte que $\frac{1}{\beta}h(\beta y)$ a un minimum à distance finie, comme l'indique le dessin, h étant convexe et infinie aux deux extrémités de $\mathbb{R}^+ \cdot y$; la tangente réalise la pente minimum, l'abscisse est $\beta \cdot y$; les homogénéités sont bien claires. Au minimum, on a successivement $h(\beta y) = (\beta y, \operatorname{grad} h(\beta y))$ d'où

$$L(\operatorname{grad} h(\beta y)) = 0 \qquad \text{et} \qquad -\alpha\beta = h(\beta y) = (\beta y, \operatorname{grad} h(\beta y))$$

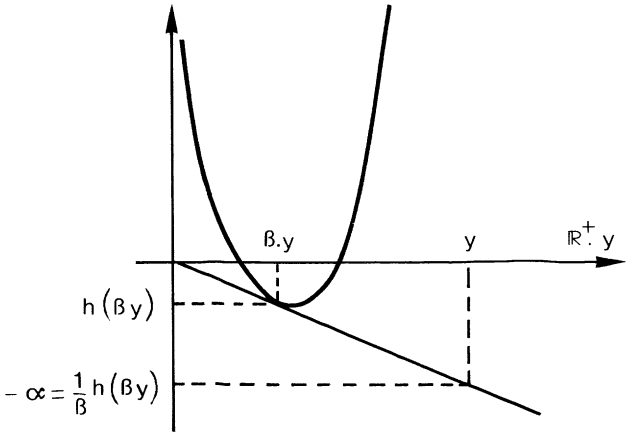

FIG. 2.

d'où $-\alpha = (y, \operatorname{grad} h(\beta y))$ ce qui entraîne $\operatorname{grad}\alpha(y) = -\operatorname{grad} h(\beta y)$ par la formule d'Euler et permet de conclure à la validité de (2.2.7).

3. Encadrements à la Cramer-Chernov.

a) Changement de loi :

Soient θ et y en dualité suivant (2.2.2). Posons

$$\mu^\theta(dz) = \exp((\theta, z) - L(\theta))\mu(dz)$$

C'est une probabilité, de transformée de Laplace analytique valant en s : $\exp(L(\theta + s) - L(\theta))$. Le moment du 1er ordre s'obtient par dérivation et vaut grad $L = y$. La variance est finie, continue par rapport à y (ou θ) (c'est en effet le Hessien de L) et de rang plein (sinon une combinaison affine est p. p. nulle et on est en dimension inférieure, ce qui contredit (H3) 2)). On appelle $\bar{\mu}^\theta$ la probabilité centrée d'expression :

$$(2.3.1) \qquad \begin{aligned} \bar{\mu}^\theta(dz) &= \exp((\theta, y + z) - L(\theta))\cdot\mu(y + dz) \\ &= \exp(h(y))\cdot\exp(\theta, z)\cdot\mu(y + dz). \end{aligned}$$

Il est immédiat de vérifier que sa $n^{\text{ième}}$ puissance de convolution est

$$(2.3.2) \qquad \begin{aligned} (\bar{\mu}^\theta)_n(dz) &= \exp((\theta, ny + z) - nL(\theta))\cdot\mu_n(ny + dz) \\ &= \exp(nh(y))\cdot\exp(\theta, z)\cdot\mu_n(ny + dz). \end{aligned}$$

C'est aussi $(\overline{\mu_n})^\theta(dz)$, car θ et ny sont duales pour μ_n. Nous la noterons définitivement $\bar{\mu}_n^\theta$.

D'après (2.1.2), Z_n est un élément aléatoire de M ; la transformation de μ_n en $\bar{\mu}_n^\theta$ conduit à définir :

$$(2.3.3) \qquad \begin{aligned} \bar{Z}_n^\theta(dz) &= \exp((\theta, ny + z) - nL(\theta))\cdot Z_n(ny + dz) \\ &= \exp(nh(y))\cdot\exp(\theta, z)\cdot Z_n(ny + dz). \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont immédiates (A est un borélien de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$)

$$(2.3.4) \qquad Z_n(A) = \exp(-nh(y))\cdot\int_{A-ny} \exp(-(\theta, z))\cdot\bar{Z}_n^\theta(dz)$$

$$(2.3.5) \qquad E\bar{Z}_n^\theta(A) = \bar{\mu}_n^\theta(A) \qquad \text{(analogue de 2.1.9)}$$

b) Inégalités :

Soit B un convexe borné, inclus dans $\mathring{C}$. Le sup de h sur B est atteint en y de ∂B, de dual θ. Si $u \in B$, μ p. p. on a : $(\theta, u - y) \leqslant 0$ (voir fig. 3). (2.3.3) entraîne pour tout B :

$$(2.3.6) \qquad Z_n(nB) \geqslant \exp(-nh(y))\cdot\bar{Z}_n^\theta(n(B - y))$$

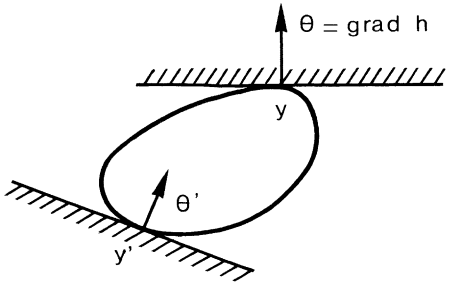

FIG. 3.

et par intégration (cf. (2.1.9))

$$\mu_n(n\mathrm{B}) \geqslant \exp(-nh(y))\cdot\bar{\mu}_n^{\theta}(n(\mathrm{B}-y)). \tag{2.3.6'}$$

Si B ne contient pas le minimum de h, l'inf de h sur B est atteint en y' sur $\partial\mathrm{B}$, de dual θ'. Si $u \in \mathrm{B}$, on a μ p. p. $(\theta', u-y) \geqslant 0$ d'où

$$\mathrm{Z}_n(n\mathrm{B}) \leqslant \exp(-nh(y'))\cdot\bar{\mathrm{Z}}_n^{\theta'}(n(\mathrm{B}-y')) \tag{2.3.7}$$

$$\mu_n(n\mathrm{B}) \leqslant \exp(-nh(y'))\cdot\bar{\mu}_n^{\theta'}(n(\mathrm{B}-y')). \tag{2.3.7'}$$

Enfin si B contient le minimum de h (égal à $-\operatorname{Log} m$), on a évidemment $u_n(n\mathrm{B}) \leqslant \mu_n(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) = m^n$ donc dans tous les cas :

$$\mu_n(n\mathrm{B}) \leqslant \exp(-n\mathrm{H}(\mathrm{B})) \tag{2.3.8}$$

Lorsque μ est une probabilité (2.3.6'). (2.3.7') et (2.3.8) sont des formules de base de la théorie des grandes déviations. Enfin nous utiliserons, en vue de l'étude de domaines variables, un résultat voisin de (2.3.6).

Soit $y \in \mathring{\mathrm{C}}$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ son dual, $|\theta| = |\theta_1| + |\theta_2|$, $\mathrm{B} = \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ un rectangle contenant y et $\rho = \max(|\mathrm{I}|, |\mathrm{J}|)$. On a

$$\mathrm{Z}_n(n\mathrm{B}) \geqslant \exp(-n(h(y)+\rho|\theta|))\cdot\bar{\mathrm{Z}}_n^{\theta}(n(\mathrm{B}-y)). \tag{2.3.9}$$

Il suffit en effet dans (2.3.4) de constater que $\mathrm{B}-y$ contient 0 et donc que $|(\theta, z)| \leqslant |\theta| n\rho$.

III. RÉSULTAT PRINCIPAL

Énonçons encore 2 hypothèses :

(H4) La loi G de la v. a. λ (durée de vie) a une transformée de Laplace finie partout $\left(\hat{\mathrm{G}}(\eta) = \int_0^\infty e^{\eta t}\mathrm{G}(dt) < \infty \text{ pour tout } \eta\right)$.

(H5) Il existe $k > 1$, tel que, si on pose $g_k(x) = x[(\operatorname{Log}^+ x)^k + 1]$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, on ait pour tout θ $\mathrm{E}g_k(\bar{\mathrm{Z}}_1^{\theta}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})) < \infty$.

THÉORÈME 2. — Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

a) (Sous les hypothèses H3 et H4). Si $\{t\} \times \mathrm{I}$ est inclus dans $(\bar{\mathscr{S}})^c$ alors p. s. il existe ε_0 tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ on ait $\zeta_t^{\varepsilon}(\mathrm{I}) = 0$.

b) (Sous les hypothèses H1 à H5). Si $\{t\} \times \mathrm{I}$ a une intersection non vide avec $\mathscr{S}$, $\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^{\varepsilon}(\mathrm{I})$ converge en probabilité vers $\sup_{x \in \mathrm{I}} \alpha(t, x)$ quand ε tend vers 0.

Comme dans tous les processus de branchement il y a alternative entre

extinction et croissance exponentielle (sur $\mathscr{S}$, α est positive). La difficulté réside ici dans la présence simultanée de plusieurs générations. La décomposition (2.1.3) et les majorations de Cramer-Chernov mettent en évidence un majorant exponentiel pour $E\zeta_t^\varepsilon(I)$ dont la contribution essentielle est apportée par les n de l'ordre de $\frac{C}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ pour un c convenable. La démonstration de b) nécessite une minoration obtenue en isolant un tel n dans (2.13), en comparant $\zeta_t^\varepsilon(I)$ à un $Z_n(nB_n)$ pour B_n convenable grâce à (2.1.7), en extrayant la partie exponentielle grâce à (2.3.9) et en appliquant le principe de la génération intermédiaire (cf. [*6*] où est faite une étude précise, dans $\mathbb{R}$ de $\int g(x - nb)Z_n(dx)$ pour b et g fixés).

La démonstration du théorème 2 utilise le lemme suivant.

LEMME 1. — Sous les hypothèses (H3) et (H4), si I est un intervalle fermé tel que $\{ t \} \times I$ ait une intersection non vide avec $\mathscr{S}$ on a

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} E\zeta_t^\varepsilon(I) \leqslant \sup_{x \in I} \alpha(t, x). \tag{3.1}$$

Démonstration du lemme. — Si pour $0 < \tau < t$ on note $B_\tau = [t-\tau, t] \times I$ et $B_t = [0, t] \times I$ on a d'après (2.1.3) pour tout n, t, ε

$$\zeta_{t,n}^\varepsilon(I) \leqslant Z_n\left(\frac{1}{\varepsilon} B_t\right), \qquad \zeta_{t,n}^\varepsilon(I) \leqslant Z_n\left(\frac{1}{\varepsilon} B_\tau\right) + \sum_{y \in R_n} \chi\left(\lambda_y > \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \tag{3.2}$$

d'où pour $N > 0$ quelconque, d'après (2.1.8)

$$\begin{aligned} E\zeta_t^\varepsilon(I) \leqslant & \sum_{n=1}^{N} \mu_n\left(\frac{B_\tau}{\varepsilon}\right) + \sum_{n=0}^{N} E \sum_{y \in R_n} \chi\left(\lambda_y > \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \\ & + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu_n\left(\frac{1}{\varepsilon} B_t\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Or les λ_y, $y \in J_n$, sont indépendants de $\mathscr{B}_n$ et de loi G, et les $\chi(y \in \mathbb{R}_n)$ pour $y \in J_n$ sont $\mathscr{B}_n$ mesurables d'où pour tout $n \geqslant 0$ et tout $d > 0$

$$E \sum_{y \in R_n} \chi\left(\lambda_y > \frac{\tau}{\varepsilon}\right) = m^n G\left(\left]\frac{\tau}{\varepsilon}, +\infty\right[\right) \leqslant m^n \hat{G}(d) \exp\left(-\frac{d\tau}{\varepsilon}\right) \tag{3.4}$$

grâce à la majoration exponentielle classique et (H4). Appliquant (2.3.8) à chacun des μ_n il vient

$$(3.5)\qquad \mathrm{E}\zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \exp\left(-n\mathrm{H}\left(\frac{1}{n\varepsilon}\mathrm{B}_\tau\right)\right) + \frac{m^{\mathrm{N}+1}}{m-1}\hat{\mathrm{G}}(d)\exp\left(-\frac{d\tau}{\varepsilon}\right) + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \exp\left(-n\mathrm{H}\left(\frac{1}{n\varepsilon}\mathrm{B}_t\right)\right).$$

D'après (2.2.5), pour tout $r > 0$ on peut trouver k_0 tel que $\mathrm{H}\left(\frac{1}{k}\mathrm{B}_t\right) \geqslant r$ pour $k \geqslant k_0$. Le choix de $\mathrm{N} = \left[\frac{k_0}{\varepsilon}\right]$ conduit à :

$$(3.6)\qquad \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \exp\left(-n\mathrm{H}\left(\frac{1}{n\varepsilon}\mathrm{B}_t\right)\right) \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} e^{-nr} = \mathrm{O}(e^{-\mathrm{N}r}).$$

Pour majorer $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \exp\left(-n\mathrm{H}\left(\frac{1}{n\varepsilon}\mathrm{B}_\tau\right)\right)$ on écrit :

$$(3.7)\qquad n\mathrm{H}\left(\frac{1}{n\varepsilon}\mathrm{B}_\tau\right) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\inf_{n>0}\left(n\varepsilon \inf_{y\in\mathrm{B}_\tau} h\left(\frac{y}{n\varepsilon}\right)\right) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\inf_{y\in\mathrm{B}_\tau}(-\alpha(y))$$

d'après la définition de α (2.2.6). En regroupant on obtient

$$(3.8)\qquad \mathrm{E}\zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) \leqslant \frac{k_0}{\varepsilon}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\sup_{y\in\mathrm{B}_\tau}\alpha(y)\right) + \frac{1}{m-1}\hat{\mathrm{G}}(d)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(k_0 \operatorname{Log} m - d\tau)\right) + 0(e^{-\mathrm{N}r}).$$

Puisque la fonction α vaut $-\infty$ à l'extérieur de $\mathscr{C}$, est négative sur $\mathscr{S}^c$ et positive sur $\mathscr{S}$ et que $\mathrm{B}_0 \cap \mathscr{S} \neq \emptyset$, le sup de α sur B_τ est le même que sur $\mathrm{B}_\tau \cap \mathscr{S}$ donc strictement positif, et ε Log du premier terme de (3.8) tend vers $\sup_{y\in\mathrm{B}_\tau\cap\mathscr{S}} \alpha(y) > 0$. Pour tout $\tau > 0$, les deux autres termes sont bornés pour le choix $d > \frac{k_0 \operatorname{Log} m}{\tau}$ (possible d'après (H4)). Comme

$$\varepsilon \operatorname{Log}(a+b) \leqslant \varepsilon \operatorname{Log} 2 + \varepsilon \operatorname{Log}(a \vee b)$$

et que ε tend vers 0, seul le plus grand terme, ici le premier, compte à la limite et donc

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \varepsilon \operatorname{Log} \mathrm{E}\zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) \leqslant \sup_{u\in\mathrm{B}_\tau\cap\mathscr{S}} \alpha(u).$$

Comme sur $\mathscr{S}$, α est continue $(t.1)$ on obtient (3.1) en faisant tendre τ vers 0.

En fait tout se passe comme si n'avaient été conservés que les n réalisant presque l'égalité dans (3.7), c'est-à-dire, compte tenu du théorème 1, les $n_\varepsilon = \dfrac{1}{\beta(t, x)\varepsilon} + o\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ où x réalise le sup de $\alpha(t, .)$ sur I.

Démonstration du théorème 2.

A) *Démonstration de a)*

Si $\{ t \} \times \mathrm{I}$ est contenu dans $(\overline{\mathscr{S}})^c$, on peut trouver I', $\varepsilon_1 > 0$ et τ (tel que $0 < \tau < t$) avec

i) $\mathrm{B}'_\tau = [t - \tau, t] \times \mathrm{I}'$ contenu dans $(\overline{\mathscr{S}})^c$

ii) pour $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\dfrac{1}{\varepsilon}(\{ t \} \times \mathrm{I})$ contenu dans $k_\varepsilon \mathrm{B}'_{\frac{\tau}{2}}$ avec $k_\varepsilon = 1 + \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

La première condition assure que pour tout k et tout n

$$\frac{n}{k}\,\mathrm{H}\left(\frac{k}{n}\mathrm{B}'_\tau\right) \geqslant \mathrm{C}_2 > 0$$

la seconde que $\zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I})$ est majoré par ρ_{k_ε} où

$$\rho_k = \sum_1^{\mathrm{N}} \mathrm{Z}_n(k\mathrm{B}'_\tau) + \sum_0^{\mathrm{N}} \sum_{y \in \mathrm{R}_n} \chi\left(\lambda_y > k\frac{\tau}{2}\right) + \sum_{\mathrm{N}+1}^{+\infty} \mathrm{Z}_n(k\mathrm{B}'_t)\,. \tag{3.9}$$

On utilise deux majorations différentes pour $n \leqslant \mathrm{N}$ et $n > \mathrm{N}$ en suivant (3.2) comme l'indique la figure 4. Reprenant les évaluations (3.3),

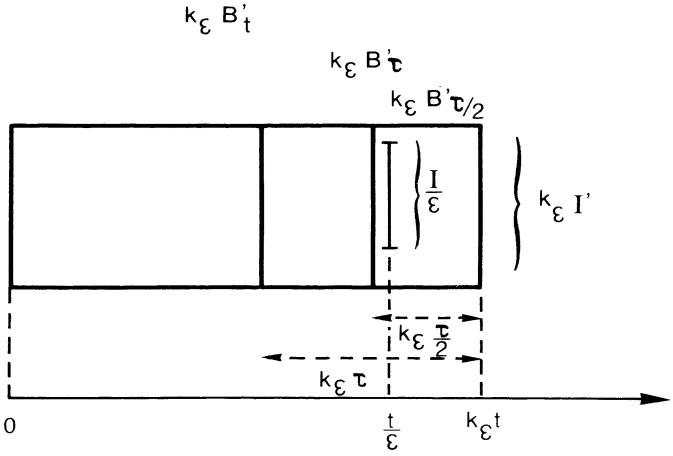

FIG. 4.

(3.4) et (3.5) on trouve, pour un choix de N de type : constante $\times k$, $E\rho_k \leqslant C_1 k \exp(-C_2 k)$. La série étant convergente, ρ_k tend p. s. vers 0 et, étant à valeurs entières, est p. s. nul à partir d'un certain rang. Il en est donc de même pour $\zeta_t^\varepsilon(I)$ pour ε assez petit.

B) *Démonstration de b).*

Le lemme 1 et l'inégalité de Tchebytchev montrent que pour tout $\delta > 0$ $P(\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(I) > \sup_{x \in I} \alpha(t, x) + \delta)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Nous voulons montrer maintenant que pour tout $\delta > 0$ on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P(\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(I) < \sup_{x \in I} \alpha(t, x) - \delta) = 0. \tag{3.10}$$

Soit D_t la section de $\mathscr{S}$ en t. Comme $I \cap D_t$ est non vide, le sup de $\alpha(t, .)$ sur I est atteint en $x \in I \cap D_t$ et strictement positif. Il suffit de montrer (3.10) pour I inclus dans D_t. $\alpha(t, .)$ est continue sur D_t donc ou bien elle est constante sur I et on peut choisir x dans $\mathring{I}$, ou bien pour δ' assez petit, inférieur à δ, il existe x_0 dans $\mathring{I}$ tel que $\alpha(t, x_0) = \sup_{x \in I} \alpha(t, x) - \delta'$. Le problème consiste désormais, étant donnés δ, I, $x_0 \in \mathring{I}$ et $\alpha_0 = \alpha(t, x_0)$ à majorer

$$P_\varepsilon = P(\varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(I) < \alpha_0 - \delta).$$

Choisissons I_1 et I_2, centrés en $\frac{x_0}{\varepsilon}$, de longueurs 2V et 2(V + W) avec $W > 0$ et inclus dans $\frac{1}{\varepsilon}\mathring{I}$ (ce qui est possible pour $\varepsilon(V + W)$ assez petit) et appliquons (2.1.7) pour n quelconque, t remplacé par $\frac{t}{\varepsilon}$ et W par U (cf. fig. 5).

$$\zeta_t^\varepsilon(I) \geqslant \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(I_2) \geqslant Z_n(A) - \sum_{y \in \eta_n(A)} \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(I_2^c ; y), \quad A = \left[\frac{t}{\varepsilon} - U, \frac{t}{\varepsilon}\right] \times I_1 \tag{3.11}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} P_\varepsilon &\leqslant P\left(Z_n(A) < \frac{1}{1-\delta} e^{\frac{\alpha_0 - \delta}{\varepsilon}}\right) \\ &\quad + P\left(Z_n(A) \geqslant \frac{1}{1-\delta} e^{\frac{\alpha_0 - \delta}{\varepsilon}}, \quad Z_n(A) - \sum_{y \in \eta_n(A)} \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(I_2^c ; y) < e^{\frac{\alpha_0 - \delta}{\varepsilon}}\right) \\ &\leqslant P\left(Z_n(A) < \frac{1}{1-\delta} e^{\frac{\alpha_0 - \delta}{\varepsilon}}\right) \\ &\quad + P\left(Z_n(A) > 0, \sum_{y \in \eta_n(A)} \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(I_2^c ; y) > \delta Z_n(A)\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

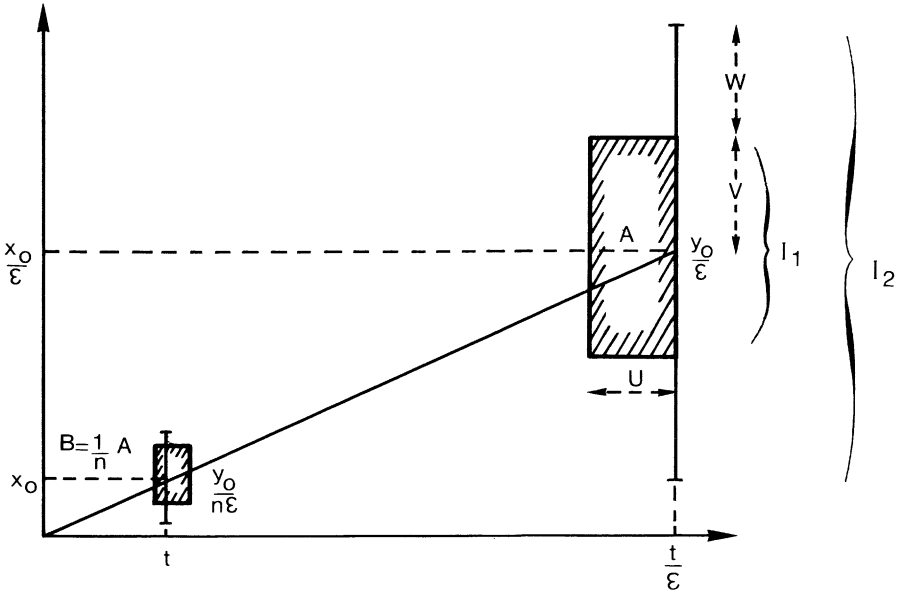

FIG. 5.

Or on peut majorer $P^{\mathscr{B}_n}\left[Z_n(A) > 0, \sum_{y \in \eta_n(A)} \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(I_2^c\,;\,y) > \delta Z_n(A)\right]$ par

$$\chi(Z_n(A) > 0)\,\frac{1}{\delta Z_n(A)}\left[\sum_{y \in \eta_n(A)} E^{\mathscr{B}_n}\zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(I_2^c\,;\,y)\right]$$

et dans cette dernière somme, chacun des termes par $\sup_{x \in I_1,\, 0 \leqslant w \leqslant U} E\zeta_u(I_2^c - x)$. $\Big($On a conditionné par $X_y = \frac{x}{\varepsilon}$, $T_y = \frac{t}{\varepsilon} - u$ et utilisé le fait que $\zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(I_2^c\,;\,y)$ a alors conditionnellement la même loi que $\zeta_u(I_2^c - x)\Big)$. Mais $E\zeta_u(I_2^c - x)$ est majoré par $\sum_{n \geqslant 1} Z_n([0, u] \times (I_2^c - x))$ (car pour ce rectangle Z_0 est nul, 0 ne lui appartenant pas) soit pour l'espérance, via la majoration (2.3.8), par $2\sum_{n \geqslant 1} \exp(-n\underline{H}(a)) \leqslant 2\underline{H}(a)^{-1}$ où on a posé $a = \frac{W}{U}$, supposé assez grand pour que $\underline{H}(a) > 0$.

On a obtenu finalement :

$$(3.13)\qquad P\left(\sum_{y\in\eta_n(A)} \zeta_{\frac{t}{\varepsilon}}(I_2^c\,;\,y) > \delta Z_n(A)\right) \leqslant \frac{2}{\delta \underline{H}(a)}$$

qui tend vers 0 dès que $a = \dfrac{W}{U}$ tend vers l'infini (cf. (2.2.4)).

Il reste à étudier $P\left(Z_n(A) \leqslant \dfrac{1}{1-\delta} e^{\frac{\alpha_0-\delta}{\varepsilon}}\right)$. Via une homothétie, on peut supposer que $y_0 = (t, x_0)$ vérifie $\beta(y_0) = 1$ (cf. théorème 1) et donc $\alpha(y_0) = -h(y_0) > 0$. Choisissons désormais $n = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Le rectangle $B = \dfrac{1}{n} A$ a comme dimensions $\dfrac{U}{n}, \dfrac{2V}{n}$ (cf. (3.11)) et contient y_0 dès que $U > t$ et $V > x_0$ (cf. fig. 5). En appliquant (2.3.9), il vient

$$(3.14)\qquad P\left(Z_n(A) \leqslant \frac{1}{1-\delta} e^{\frac{\alpha_0-\delta}{\varepsilon}}\right) \leqslant P(\overline{Z}_n^\theta(n(B-y_0)) \leqslant \delta_\varepsilon)$$

où on a posé $\delta_\varepsilon = \dfrac{1}{1-\delta} \exp\left(\alpha_0\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - n\right) - \dfrac{\delta}{\varepsilon} + n\rho\,|\,\theta\,|\right)$ avec $\rho = \max\left(\dfrac{U}{n}, \dfrac{V}{n}\right)$. Si on impose à εU et εV de tendre vers 0 quand ε tend vers 0, on a

$$(3.15)\qquad \operatorname{Log} \delta_\varepsilon = -\frac{\delta}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Nous allons appliquer maintenant la méthode de la génération intermédiaire [*11*] [*6*]. L'essentiel des calculs se trouve déjà dans [*6*], à une seule dimension. Le contexte est ici un peu différent : le rôle joué par la variable t ne permet pas d'espérer une convergence p. s. avec cette méthode ; nous utilisons donc une approximation uniforme par la loi normale (Berry-Esséen) et non un théorème limite local, ce qui simplifie les calculs.

Soit s un entier inférieur à n ; qui sera précisé plus tard. On a la décomposition

$$(3.16)\qquad \overline{Z}_n^\theta(n(B - y_0)) = \sum_{z\in R_s} a_z \overline{Z}_{n-s}^\theta(n(B-y_0) - z\,;\,z)$$

où

1) on a identifié, pour alléger les notations, z et (T_z, X_z)
2) on a posé $a_z = \exp((\theta, z) - sL(\theta))$

3) les $\overline{Z}^{\theta}_{n-s}(\,.\,;z)$, pour $z \in R_s$ sont, conditionnellement à $\mathscr{B}_s$ des copies indépendantes de $\overline{Z}^{\theta}_{n-s}(\,.\,)$.

Il suffit en effet d'écrire $\sum_{y \in R_n} = \sum_{z \in R_s} \sum_{y \in R_{n-s}(z)}$ et d'appliquer (2.1.1).

Conditionnellement à $\mathscr{B}_s$, la v. a. $\overline{Z}^{\theta}_n(n(B-y_0))$ est donc une combinaison linéaire de v. a. i. Elles n'ont pas même loi mais nous pouvons contrôler leurs queues. Nous allons les centrer conditionnellement. Définissons pour $z \in R_s$

$$(3.17) \qquad \begin{aligned} b_z &= \overline{\mu}^{\theta}_{n-s}(n(B-y_0)-z) \\ V_z &= \overline{Z}^{\theta}_{n-s}(n(B-y_0)-z\,;z) - b_z \qquad (E^{\mathscr{B}_s}V_z = 0 \quad \text{d'après } 2.3.5). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, les sommations non précisées sont faites sur $z \in R_s$; Si p est un réel positif, destiné à tendre vers 0, on a :

$$(3.18) \qquad \begin{aligned} P(\overline{Z}^{\theta}_n(n(B-y_0)) \leqslant \delta_\varepsilon) &\leqslant P_1 + P_2 \\ P_1 &= P\Big(\sum a_z b_z \leqslant p\Big) \\ P_2 &= P\Big(\sum a_z V_z < \delta_\varepsilon - p\Big). \end{aligned}$$

Si s tend vers l'infini et $\dfrac{s}{n}$ tend vers 0, une application de Berry-Esséen permet de majorer P_1. Cette majoration n'est utile, autrement dit $\overline{Z}^{\theta}_n(n(B-y_0))$ n'est proche de son espérance conditionnelle que s'il y a suffisamment d'individus dans nB : la majoration de P_2 se fait sous l'hypothèse $\{t\} \times I \subset \mathscr{S}$ qui entraîne $h(y_0) < 0$. L'hypothèse (H5) sert dans la majoration de P_2 mais pas dans celle de P_1.

1) Étude de P_1.

Minorons b_z grâce au lemme suivant

Lemme 2. — Soit ν une probabilité sur $\mathbb{R}^2$, centrée, de matrice de covariance Γ de rang 2, de troisièmes moments finis. $C_n = L_n \times M_n$ est une suite de rectangles contenant 0 et tels que, quand n tend vers l'infini, $\dfrac{|L_n|}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{|M_n|}{\sqrt{n}}$ restent minorés par des nombres strictement positifs. k_n est

une suite d'entiers telle que $\frac{k_n}{n}$ tende vers 1. Alors il existe deux constantes K_1 et $K_2 > 0$ telles que pour tout z, et tout n assez grand

$$v^{*k_n}(C_n - z) \geqslant K_1 - K_2 \frac{\| z \|}{\sqrt{n}} \tag{3.19}$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration du lemme 2. — Soit Ψ la loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$. D'après Berry-Esséen, on peut écrire

$$v^{*k_n}(C_n - z) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{k_n}}\right) + \Psi\left(\frac{1}{\sqrt{k_n}}(C_n - z)\right).$$

La relation $| \Psi(A + u) - \Psi(A) | = 0_\Gamma(\| u \|)$ permet d'écrire

$$v^{*k_n}(C_n - z) \geqslant 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \Psi\left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} C_n\right) - K_2 \frac{\| z \|}{\sqrt{n}}.$$

Par hypothèse, $\frac{1}{\sqrt{k_n}} C_n$ contient un rectangle fixe contenant 0, donc $\Psi\left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} C_n\right)$ reste minoré, ce qui achève la démonstration.

Appliquons ce lemme à $k_n = n - s$ $\left(\text{désormais } \frac{s}{n} = o(1)\right)$, $v = \bar{\mu}^\theta$ et $C_n = n(B - y_0)$. C_n contient 0 car B contient y_0. L'hypothèse sur les dimensions sera vérifiée si $\frac{U}{\sqrt{n}}$ et $\frac{2V}{\sqrt{n}}$ restent minorés, donc si $\sqrt{\varepsilon}U$ et $\sqrt{\varepsilon}V$ restent minorés quand ε tend vers 0.

On peut résumer les contraintes sur U, V, W par :

$$\begin{array}{llll} \sqrt{\varepsilon}U \quad \text{et} \quad \sqrt{\varepsilon}V > \text{cste} > 0 & & \varepsilon(V + W) \to 0 & \text{(cf. (3.11))} \\ \frac{W}{U} \to \infty & \text{(cf. (3.14))} & \varepsilon U \to 0 & \text{(cf. (3.16))} \end{array} \tag{3.20}$$

ce qu'il est toujours possible de réaliser.

Dans ces conditions on a $b_z = \bar{\mu}^\theta_{n-s}(n(B - y_0) - z) \geqslant K_1 - K_2 \frac{\| z \|}{\sqrt{n}}$ et en remarquant que $\Sigma a_z = \bar{Z}^\theta_s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ on obtient :

$$P_1 = P(\Sigma a_z b_z < p) \leqslant P(K_1 \bar{Z}^\theta_s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \leqslant 2p) + P(K_2 \Sigma \| z \| a_z > p\sqrt{n})$$

θ est fixe (dual de y_0), donc $\bar{Z}^\theta_s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ en temps que martingale positive ([*1*], p. 248) a une limite p. s. quand s tend vers l'infini. Il est facile de

montrer que sous (H2) (qui entraîne la non-extinction p. s.) cette limite n'a pas de masse en 0 donc le premier terme de la majoration de P_1 tend vers 0 dès que p tend vers 0. Pour finir, on applique Tchebytchev:

$$P(\Sigma \| z \| a_z > Ap\varepsilon^{-1/2}) \leqslant \frac{\varepsilon^{1/2}}{Ap} E(\Sigma \| z \| a_z)$$

et comme $E(\Sigma \| z \| a_z) = \int \| z \| \mu_s^\theta(dz) = 0(s)$ on conclut

$$(3.21) \qquad P_1 = o(1) + 0(p^{-1}\varepsilon^{1/2}s) \qquad (s = o(\varepsilon^{-1}),\ p = o(1)).$$

2) ÉTUDE DE P_2.

$$(3.22) \quad P_2 = P(\Sigma a_z V_z \leqslant \delta_\varepsilon - p) \leqslant P\left(| \Sigma a_z V_z | > \frac{p}{2}\right), \qquad \text{dès que } p > 2\delta\varepsilon$$

si Φ est la fonction croissante définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$(3.23) \qquad \Phi(u) = u^2\chi(u < 1) + (2u - 1)\chi(u \geqslant 1), \qquad \text{si} \quad p < 2$$

(3.22) entraîne

$$(3.23) \qquad P_2 \leqslant \frac{4}{p^2} E\Phi(| \Sigma a_z V_z |), \qquad \text{si} \quad p < 2$$

Φ est convexe et vérifie $\Phi(2x) \leqslant 4\Phi(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$; les a_z sont $\mathscr{B}_s$ mesurables et les V_z conditionnellement à $\mathscr{B}_s$ sont indépendantes et centrées. D'après le théorème 1.1 de [9] il existe donc une constante C_Φ ne dépendant que de Φ telle que

$$E^{\mathscr{B}_s}\Phi(| \Sigma a_z V_z |) \leqslant C_\Phi E^{\mathscr{B}_s}\Phi(\sqrt{\Sigma(a_z V_z)^2}).$$

La fonction Φ_1 définie par $\Phi_1(x) = \Phi(\sqrt{x})$ est concave donc sous-additive et par conséquent :

$$(3.24) \qquad E^{\mathscr{B}_s}\Phi(| \Sigma a_z V_z |) \leqslant C_\Phi \Sigma E^{\mathscr{B}_s}\Phi(a_z | V_z |).$$

Pour étudier $E^{\mathscr{B}_s}\Phi(a_z | V_z |)$ on remarque d'après (3.16) et (3.17) que $| V_s | \leqslant Y_z$ où conditionnellement à $\mathscr{B}_s$ les Y_z sont des v. a. i. et de même loi que $Y = 1 + \sup_n \overline{Z}_n^\theta(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. (H5) assure [6] que Y est p. s. finie de loi Q vérifiant

$$(3.25) \qquad \int g_{k-1}(u)Q(du) < \infty .$$

La majoration de V_z entraîne, pour toute f croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$,

$$\text{(3.26)} \qquad E^{\mathscr{B}_s} f(|V_z|) \leqslant \int f(u) Q(du)$$

ce qui joint à (3.24) et (3.23) permet la majoration

$$\text{(3.27)} \qquad P_2 \leqslant \frac{4C_\Phi}{p^2} E\Sigma \int \Phi(a_z u) Q(du) = \frac{4C_\Phi}{p^2} \iint \Phi(au) Q(du) v_s(da)$$

où $v_s(da)$ est la mesure image de $\mu^{*s}(dz)$ par l'application

$$\varphi : z \mapsto a_z = \exp((\theta, z) - sL(\theta)).$$

Comme $av_s(da)$ est l'image par φ de μ_s^θ, on a $\int av_s(da) = 1$. Pour évaluer l'intégrale double de (3.27), on commence par majorer $\Phi(au)$ par $\Phi_2(au) = 2[(au)^2 \wedge (au)]$ (cf. (3.23)) et décomposer $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ en

$$\Delta_1 = \{u > M\}, \qquad \Delta_2 = \left\{u < M, a < \frac{1}{M}\right\}, \qquad \Delta_3 = \left\{u < M, a > \frac{1}{M}\right\},$$

où $M > 1$ sera fixé plus tard. On a successivement :

sur Δ_1 $\quad \Phi_2(au) \leqslant 2a\omega \quad$ et $\quad \iint_{\Delta_1} \leqslant 2 \int_{u>M} uQ(du)$

sur Δ_2 $\quad \Phi_2(au) \leqslant 2a^2u^2 \leqslant 2\dfrac{au^2}{M} \quad$ et $\quad \iint_{\Delta_2} \leqslant 2 \int_{u<M} \dfrac{u^2}{M} Q(du)$

sur Δ_3 $\quad \Phi_1(au) \leqslant 2au \quad$ et $\quad \iint_{\Delta_3} \leqslant 2\left[\int_{a>\frac{1}{M}} av_s(da)\right]\left[\int uQ(du)\right]$

$$\text{(3.28)} \qquad \iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \leqslant 2 \int \left(u \wedge \frac{u^2}{M}\right) Q(du) = 0((\operatorname{Log} M)^{-k+1})$$

d'après (3.2.5) et $\sup\limits_u \dfrac{u \wedge \dfrac{u^2}{M}}{g_{k-1}(u)} = \sup\limits_u \dfrac{1 \wedge \dfrac{u}{M}}{[1 + (\operatorname{Log}^+ u)^{k-1}]} = 0((\operatorname{Log} M)^{-k+1})$

$$\text{(3.29)} \qquad \iint_{\Delta_3} = 0\left[\int_{a>\frac{1}{M}} av_s(da)\right]$$

soit $l > 0$ et $M = e^{ls}$. On a $\varphi^{-1}\left(a > \frac{1}{M}\right) = sD_l$ avec $D_l = \{z : (\theta, z) - L(\theta) > -l\}$ et par conséquent

$$\int_{a > \frac{1}{M}} a\nu_s(da) = \mu_s^\theta(sD_l)$$

μ^θ a comme barycentre y_0, vérifiant $h(y_0) > 0$. Si l est choisi tel que $0 < l < -h(y_0)$, D_l ne contient pas y_0 et donc d'après (2.3.8) il existe $\gamma > 0$ tel que $\mu_s^\theta(sD_l) \leqslant e^{-\gamma s}$, ce qui donne

$$\iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} = 0(s^{-k+1}) \qquad \iint_{\Delta_3} = 0(e^{-\gamma s}) \tag{3.30}$$

et, joint à (3.27)

$$P_2 = 0(p^{-2}s^{-k+1}). \tag{3.31}$$

Les contraintes en p, s pour que P_1 et P_2 tendent vers 0 avec ε sont :

$$p^{-1}\exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) < \frac{1}{2} \qquad p \to 0, \qquad s\varepsilon \to 0, \qquad s \to \infty$$
$$sp^{-1}\varepsilon^{1/2} \to 0 \qquad s^{-k+1}p^{-2} \to 0.$$

On peut prendre par exemple $p = \varepsilon^{\frac{k-1}{4(k+1)}}$ $\quad s = \left[\varepsilon^{-\frac{1}{k+1}}\right]$.

IV. DISCUSSION

1. Deux cas particuliers.

Nous supposons ici que l'instant de naissance de tous les enfants coïncide avec celui de la mort du père (processus dit de Sevastyanov [*10*], p. 8).

a) Absence de marche aléatoire dans l'espace :
c'est le processus de Bellman-Harris classique ; on a

$$\mu(dt, dx) = mG(dt)\delta_0(x) \text{ (5)}, \qquad L(\theta_1, \theta_2) = \operatorname{Log} m + L_G(\theta_1)$$

$\alpha(t, x)$ se simplifie en αt avec α donné par la formule (1.2). La relation (2.2.7) devient

$$\operatorname{Log} \int_0^\infty e^{-\alpha t} mG(dt) = 0. \tag{4.1.1}$$

(5) δ_a désigne la masse de Dirac au point a.

On retrouve le résultat classique (1.1) sur le paramètre de Malthus [*10*].

b) Absence de marche aléatoire dans le temps :

c'est le processus de branchement avec marche aléatoire à temps discret [*4*] [*11*] ; on a, si F est la mesure d'intensité spatiale :

$$\alpha(t, x) = -\, t h_{\mathrm{F}}\left(\frac{x}{t}\right) \tag{4.1.2}$$

(qui est à rapprocher de [*4*], p. 676). Enfin la formule (2.2.7) devient :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \mathrm{L}_{\mathrm{F}}\left(-\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right). \tag{4.1.3}$$

Ces cas particuliers permettent en retour d'éclairer le cas général. Pour θ_2 fixé, la mesure $\mu_{\theta_2}(dt) = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta_2 x}\mu(dt, dx)$ ne charge pas $\{0\}$ et a un support inclus dans $\mathbb{R}^+$ donc il existe un unique θ_1 tel que $\mathrm{Log} \int_0^\infty e^{\theta_1 t}\mu_{\theta_2}(dt) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{L}(\theta_1, \theta_2) = 0$ ($-\theta_1$ est aussi la pente de la tangente menée de (0, 0) au graphe de $h_{\mu_{\theta_2}}$). Ceci permet de définir une fonction $\tilde{\mathrm{L}}$ définie partout telle que :

$$\mathrm{L}(\theta_1, \theta_2) = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = -\,\tilde{\mathrm{L}}(\theta_2).$$

En vertu du théorème des fonctions implicites $\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta} > 0\right.$ d'après (H3) et [*2*] prop. (9.7)$\left.\right)$, $\tilde{\mathrm{L}}$ est C^∞ et on vérifie $\tilde{\mathrm{L}}'' > 0$ donc $\tilde{\mathrm{L}}$ est convexe. La formule (2.2.7) devient

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \tilde{\mathrm{L}}\left(-\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right). \tag{4.1.4}$$

Elle est analogue à (4.1.3) et entraîne, si $\tilde{h}$ est la duale convexe de $\tilde{\mathrm{L}}$

$$\alpha(t, x) = -\, t\tilde{h}\left(\frac{x}{t}\right). \tag{4.1.5}$$

Par homogénéité, le sup de $\alpha(t, .)$ sur $\mathbb{R}$ est atteint en $t\tilde{x}$ où $\tilde{x}$ réalise l'inf de $\tilde{h}$, et ce sup vaut $-\, t\tilde{h}(\tilde{x}) = t\tilde{\mathrm{L}}(0)$ par dualité. D'après le théorème 2, la population totale est donc de l'ordre de $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(t\tilde{\mathrm{L}}(0) + o(1))\right)$. Or par construction $\tilde{\mathrm{L}}(0)$ est le paramètre de Malthus d'un processus de Bellman-Harris où $\mu_0(dt)$ jouerait le rôle de $m\mathrm{G}(dt)$. Dans l'échelle utilisée (ε Log),

à l'instant t la population totale est donc du même ordre que celle située « près de » $t\tilde{x}$; c'est aussi celle d'un processus non spatial régi par la marginale de μ en t.

2. Affaiblissement des hypothèses.

a) Nous avons déjà dit que (H1) est nécessaire pour que $\mathscr{S} \neq \emptyset$.

b) Nous conjecturons que (H2) utilisée en (2.1.7) peut être affaiblie en

$$\mathrm{P}(\xi([0, \lambda] \times \mathbb{R}) \geqslant 1) > 0 \tag{4.2.1}$$

le théorème 2 restant valable conditionnellement à la non-extinction. En effet soit $\tau = \inf \{ t : \xi([0, t] \times \mathbb{R}) > 1 \}$ (âge du père à la naissance de son 1er enfant). Seul le cas $0 < \mathrm{P}(\lambda \leqslant \tau) < 1$ reste à traiter. Soit $\lambda^+ = \max(\lambda, \tau)$ et $\zeta_t^+(\mathrm{I})$ la v. a. obtenue en remplaçant dans (2.1.3) λ par λ^+. Il est clair que $\zeta_t^+(\mathrm{I}) \geqslant \zeta_t(\mathrm{I})$ d'où

$$\overline{\lim}\, \varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) \leqslant \lim \varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^{+\varepsilon}(\mathrm{I}) = \sup_{x \in \mathrm{I}} \alpha(t, x).$$

Soit $\zeta_t^-(\mathrm{I})$ le nombre d'individus de la nouvelle population, en vie à l'instant t, situés dans I et vérifiant $\lambda_y^+ = \lambda_y$. On a évidemment $\zeta_t(\mathrm{I}) \geqslant \zeta_t^-(\mathrm{I})$ (on a supprimé dans la population de référence née avant l'instant t les individus n'ayant que des enfants posthumes). Soit $\eta_n^-(\mathrm{A})$ le sous-ensemble de $\eta_n(\mathrm{A})$ formé des individus dont tous les descendants en vie à t vérifient $\lambda_y^+ = \lambda_y$. D'après le principe d'exclusion (2.1.6), tout se passe comme si dans $\eta_n(\mathrm{A})$ on avait conservé ou non chaque individu, indépendamment les uns des autres (conditionnellement à $\mathscr{B}_n$). Ceci suggère une loi des grands nombres (conditionnelle). Si toutes les probabilités de conservation étaient les mêmes (p_n) on aurait $\dfrac{\mathrm{Z}_n^-(\mathrm{A})}{\mathrm{Z}_n(\mathrm{A})} \simeq p_n$ et la démonstration à partir de (3.11) conduirait à

$$\underline{\lim}\, \zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) \geqslant \sup_{x \in \mathrm{I}} \alpha(t, x)$$

pourvu que $\varepsilon \operatorname{Log} p_n$ tende vers 0. La difficulté réside dans la dépendance de ces probabilités par rapport à l'instant de naissance : si cet instant est noté $\dfrac{t}{\varepsilon} - u$, cette probabilité (conditionnellement à $\mathscr{B}_n$) vaut $\mathrm{E}p^{\varepsilon u(\mathbb{R})}$ où $p = \mathrm{P}(\lambda \leq \tau)$. Mais conditionnellement à la non-extinction, elle est équivalente à $\mathrm{Q}(q)e^{-\alpha u}$ quand u tend vers l'infini ([*1*], p. 162, $\mathrm{Q}(q) > 0$, α paramètre de Malthus global). Notre conjecture s'appuie alors sur le fait que

$u \leqslant \mathrm{U}$, $\varepsilon\mathrm{U}$ tend vers 0 et $\sqrt{\varepsilon}\mathrm{U}$ reste minoré. Il ne semble pas possible de descendre en deçà de (4.2.1). On peut en effet construire un processus de branchement tel que p. s. $\lambda = \dfrac{\tau}{2} = l$ (l fixé déterministe). Alors pour tout t il existe toujours une suite ε_k tendant vers 0 telle que $\zeta_t^{\varepsilon_k}(\mathbb{R}) = 0$ pour tout k.

c) (H3) est fondamentale. Seul 1) pourrait sans doute être affaibli en : il existe un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ sur lequel $\exp \mathrm{L}(.) < \infty$.

d) (H4) est utilisée dans la démonstration du lemme 1. A première vue elle peut sembler artificielle, le résultat final ne faisant intervenir que la fonction α, qui ne dépend pas de la forme de G (remarque également valable pour (H2). Il suffit pour se convaincre de son utilité, d'étudier le cas extrême de la durée de vie infinie. Dans un tel cas, on a évidemment

$$\overline{\lim}\, \varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) \leqslant \sup_{[0,t]\times \mathrm{I}} \alpha(y)$$

et on minore $\zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I})$ par $\eta_n(\mathrm{A}')$ où A′ est un certain rectangle construit à partir de y' réalisant le sup, avec naturellement $n = \left[\dfrac{1}{\beta(y')\varepsilon}\right]$, d'où la formule :

$$\lim \varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) = \sup_{[0,t]\times \mathrm{I}} \alpha(y). \tag{4.2.2}$$

Dans un cas intermédiaire, si $\eta_0 = \sup\{\eta : \hat{\mathrm{G}}(\eta) < \infty\}$ vérifie $0 < \eta_0 < \infty$, nous conjecturons l'existence d'une limite

$$\lim \varepsilon \operatorname{Log} \zeta_t^\varepsilon(\mathrm{I}) = \sup_{x\in \mathrm{I}} \alpha_{\eta_0}(t, x) \tag{4.2.3}$$

$$\alpha_{\eta_0}(t, x) = \sup_{0<t'<t} [\alpha(t', x) - \eta_0(t - t')].$$

Cette conjecture s'appuie sur l'idée suivante. Si la durée de vie est exponentielle de paramètre η_0, construisons un nouveau processus de branchement à 2 types d'individus. Ceux du 1er type donnent à la fois des individus du 1er type de la manière habituelle (ξ) et au bout d'un temps T fixé (suffisant pour vérifier (4.2.1)), s'ils ne sont pas déjà morts, meurent et avec une probabilité $e^{-\eta_0}$ donnent un enfant de type 2 au même endroit. Ceux de type 2 vivent un temps unité au bout duquel ils donnent avec probabilité $e^{-\eta_0}$ un autre individu au même endroit. Si on s'intéresse à l'effectif total (types 1 et 2) dans I à l'instant t les méthodes de processus multitypes [*14*] conduisent à (4.2.3). D'autre part nous conjecturons que cet effectif total a même loi que celui du processus unitype initial.

e) (H5) est du genre « $x \operatorname{Log} x$ », hypothèse usuelle dans les résultats sur les processus de branchement.

3. Conjecture sur les âges.

Soit $(t, x) \in \mathscr{S}$. On a vu que pour la population en vie à l'instant t autour de x, l'essentiel venait des générations de numéro $\varepsilon^{-1}\beta(t, x)^{-1} + o(\varepsilon^{-1})$. Tout semble donc se passer comme si le saut moyen dans l'espace-temps, correspondant à une génération était

$$\frac{\varepsilon^{-1}t}{\varepsilon^{-1}\beta(t, x)^{-1} + o(\varepsilon^{-1})} = t\beta(t, x) + o(1),$$

$$\frac{\varepsilon^{-1}x}{\varepsilon^{-1}\beta(t, x)^{-1} + o(\varepsilon^{-1})} = x\beta(t, x) + o(1).$$

Or d'après la dualité, si $y = (t, x)$ et $(\theta_1, \theta_2) = \operatorname{grad} h(\beta(y)y)$ on a

$$t\beta(t, x) = \int \tau \exp\,[\theta_1\tau + \theta_2\xi - \mathrm{L}(\theta_1, \theta_2)]\mu(d\tau, d\xi)$$

$$x\beta(t, x) = \int \xi \exp\,[\theta_1\tau + \theta_2\xi - \mathrm{L}(\theta_1, \theta_2)]\mu(d\tau, d\xi).$$

Ceci suggère que pour la plupart des individus en vie à l'instant t, autour de x, la loi empirique du saut, calculée le long de leur ligne généalogique est voisine de

$$(\tau, \xi) \mapsto \exp\,[\theta_1\tau + \theta_2\xi - \mathrm{L}(\theta_1, \theta_2)]\mu(d\tau, d\xi).$$

De tels résultats ont été démontrés rigoureusement pour le processus à temps discret unitype [*13*] et multitype [*14*]. Le fait que $\alpha(t, x) = \theta_1 t + \theta_2 x$ joue le rôle d'un paramètre de Malthus local permet de conjecturer en plus que la répartition des âges à l'instant t autour de x converge vers la loi sur $\mathbb{R}^+$

$$\tau \mapsto \frac{e^{\theta_1\tau}\mathrm{G}(]\tau, +\infty[)d\tau}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} e^{\theta_1 u}\mathrm{G}(]u, +\infty[)du}$$

Si on se place en $t\tilde{x}$ (cf. IV, 1.*b*) on a $\theta_1 = \tilde{\mathrm{L}}(0)$ et on retrouve la distribution stable des âges pour un processus non spatial régi par la marginale de μ en t [*10*].

4. Processus non-homogène.

Revenons sur l'intérêt de l'introduction de ε et donc sur la différence d'optique par rapport à Biggins [*7*] déjà évoquée dans l'introduction.

Dans le cas présent on peut effectivement se passer de ε car α est 1-homogène. Ceci est dû au fait que le processus de reproduction ne dépend pas de la position du père dans l'espace-temps. On peut se libérer de cette restriction en supposant qu'un père en (σ, a) a des enfants répartis suivant un processus ponctuel d'intensité $\mu(\sigma, a\,;\,.)$. L'analogue pour un seul individu serait une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. La théorie des grandes déviations dans ce cas a été construite dans [*3*] et dans [*15*]. A la famille $(\mu(\sigma, a\,;\,.))_{\sigma,a}$ on associe $(\mathrm{L}(\sigma, a\,;\,.))_{\sigma,a}$ et $(h(\sigma, a\,;\,.))_{\sigma,a}$ et à tout $\mathrm{T} > 0$ et tout chemin $\varphi\,[0, \mathrm{T}] \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux on associe l'intégrale d'action

$$\mathrm{I}(\mathrm{T}, \varphi) = \int_0^{\mathrm{T}} h(s, \varphi(s)\,;\,\dot{\varphi}(s))ds\,.$$

Dans un travail ultérieur nous montrerons qu'on peut encore définir une ε-log densité α, l'analogue de (2.2.6) étant $-\inf_{\mathrm{T}} \inf_{\varphi \in \Gamma_{\mathrm{T}}(t,x)} \mathrm{I}(\mathrm{T}, \varphi)$ où $\Gamma_{\mathrm{T}}(t, x)$ est un sous-ensemble convenable de $\{\, \varphi : \varphi(\mathrm{T}) = (t, x) \,\}$. On peut attendre comme analogue de (2.2.7) une inéquation aux dérivées partielles portant sur $\mathrm{L}\left(t, x\,;\, -\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}, \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right)$ permettant éventuellement de construire des schémas numériques d'approximation de la solution α. Nous envisagerons aussi le cas où le processus de reproduction dépend de l'effectif de la population autour du père. L'équation (2.2.7) est de type Hamilton-Jacobi, de hamiltonien L. Le lagrangien h est associé à un problème variationnel qui trouve ici une illustration stochastique, les chemins φ étant constitués par les trajectoires le long des lignes généalogiques.

REMERCIEMENTS

Nous remercions le Professeur Ruget pour les conversations stimulantes que nous avons pu avoir avec lui.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] K. B. Athreya, P. Ney, Branching processes (Springer-Verlag), Berlin, 1972.

[*2*] R. Azencott, Cours de l'École d'Été de Saint-Flour. *Lecture Notes in Math.*, n° 774, Springer, 1978.

[*3*] R. Azencott, G. Ruget, Mélanges d'équations différentielles et grands écarts à la loi des grands nombres. *Zeits. für Wahr.* t. **38**, 1977, p. 1-54.

[*4*] J. D. Biggins, Chernoff's theorem in the branching random walk. *Journ. of Appl. Prob.*, t. **14**, 1977, p. 630-636.

[*5*] J. D. Biggins, The asymptotic shape of the branching random walk. *Adv. in Appl. Prob.*, t. **10**, 1978, p. 62-84.

[6] J. D. BIGGINS, Growth rates in the branching random walk. *Zeits. für Wahr.* t. **48**, 1979, p. 17-34.

[7] J. D. BIGGINS, Spatial spread in branching processes, in « Biological growth and spread ». *Lecture Notes in Biomath.*, n° 38, Springer, 1979.

[8] J. D. BIGGINS, *Private communication*, 1980.

[9] D. L. BURKHOLDER, B. J. DAVIS, R. F. GUNDY, *Integral inequalities for convex functions of operators on martingales*, 6th Berkeley symposium, t. **II**, 1970.

[10] P. JAGERS, *Branching processes with biological applications*. Wiley, London, 1979.

[11] N. KAPLAN, S. ASMUSSEN, Branching random walks II. *Stochastic Proc. and their Appl.*, t. **4**, 1976, p. 15-31.

[12] K. MATTHES, J. KERSTAN, J. MECKE, *Infinitely divisible point processes*. Wiley Chichester, 1978.

[13] A. ROUAULT, Lois empiriques pour les processus de branchement spatiaux homogènes supercritiques. *Note aux C. R. A. S.*, t. **292**, 1981, p. 933.

[14] A. ROUAULT, *Les processus de branchement multitypes spatiaux dans l'asymptotique des grandes déviations*, 1981, *(à paraître)*.

[15] A. D. VENTSEL, Rough limit theorems on large deviations for Markov stochastic processes. *Theory of Prob. and its Appl.*, t. **21**, n° 2, 1976, p. 227-242 et t. **21**, n° 3, 1976, p. 499-512.

(Manuscrit reçu le 1er octobre 1982)