ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ELY MERZBACH

Chemins croissants optionnels et théorème de section

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 3 (1983), p. 223-234
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_3_223_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIX, n° 3-1983, p. 223-234.

Section B :
Calculs des Probabilités et Statistique.

Chemins croissants optionnels et théorème de section

par

Ely MERZBACH
Department of Mathematics, Bar-Ilan University,
52100 Ramat-Gan, Israel

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, on définit et étudie la notion de chemin croissant optionnel et de chemin croissant annonçant dans le plan. On la compare à celle de ligne d'arrêt ce qui permet d'obtenir une caractérisation des points d'arrêt par les chemins croissants optionnels et les lignes d'arrêt. Des conditions sont données permettant de démontrer un théorème de section par un point d'arrêt. Enfin, quelques applications aux processus à deux paramètres sont proposées.

ABSTRACT. — The notion of optional increasing path and predictable increasing path are defined and studied. We compare it to the notion of stopping line and obtain a characterization of stopping point in terms of optional increasing path and stopping line. Some conditions are given to reach a theorem of section with stopping point. Finally, applications to two-paramenter stochastic processes are proposed.

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Dans l'étude de la théorie générale des processus stochastiques à deux indices, la notion fondamentale de temps d'arrêt a été généralisée par celle de ligne d'arrêt qui permet le partage de l'ensemble des paramètres en deux régions disjointes ; et par un cas particulier : le point d'arrêt qui a l'avantage de pouvoir être rattaché à tout processus. Il est, d'autre part, toujours intéressant d'étudier le comportement d'un processus le long de certaines courbes en tant que processus à indice réel.

Dans ce travail, on se propose tout d'abord d'étudier la notion de chemin croissant optionnel introduite semble-t-il pour la première fois dans le cours de J. Walsh [*11*], et de faire apparaître une certaine dualité avec les lignes d'arrêt. On donne ensuite quelques conditions suffisantes afin d'obtenir un théorème de section avec des points d'arrêt. Enfin, des applications aux processus à deux indices sont proposées.

Les notations sont maintenant classiques (voir par exemple [*4*] ou [*10*]). Les processus sont indexés par le quadrant positif $\mathbb{R}_+^2$ sur lequel est introduit l'ordre partiel et les relations suivantes :

Soient $z=(s,t)$ et $z'=(s',t')$. $s < s'$ signifie $s \leq s'$ et $t \leq t'$. $z \ll z'$ signifie $s < s'$ et $t < t'$. Enfin $z \wedge z'$ signifie $s \leq s'$ et $t \geq t'$ et $z \curlywedge z'$ signifie $s < s'$ et $t > t'$.

Soit $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $\{ \mathrm{F}_z \}_{z \in \mathbb{R}_+^2}$ continue à droite, complète et qui satisfait à la condition (F4) de [*4*] : les tribus $\mathrm{F}_s^1 = \bigvee_t \mathrm{F}_{s,t}$ et $\mathrm{F}_t^2 = \bigvee_s \mathrm{F}_{s,t}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à la tribu $\mathrm{F}_{s,t}$. On utilisera aussi un travail récent de Fouque [*5*].

II. CHEMINS CROISSANTS OPTIONNELS

DÉFINITION. — Un chemin croissant optionnel est une famille de points aléatoires $\Gamma = \{ \gamma(t),\ t \geq 0 \}$ telle que :

$t \to \gamma(t)$ est p. s. continu.

Si $s \leq t$ alors $\gamma(s) < \gamma(t)$.

Pour tout $t \geq 0$ et tout point z, on a $\{ \gamma(t) \leq z \} \in \mathrm{F}_z$.

Remarque. — On va voir que cette définition est équivalente à celle donnée par Walsh appelée « optional increasing path » dans [*12*].

Comme le remarque Walsh, on peut sans changement, reparametriser le chemin sur n'importe quel interval fini. On supposera souvent que $\gamma(0)$ appartient aux axes.

La définition de la ligne d'arrêt [*9*] [*10*] est très proche de celle du chemin croissant optionnel :

DÉFINITION. — λ est une ligne d'arrêt si c'est une courbe aléatoire connexe, incomparable pour l'ordre $\ll$, rencontrant les axes ou asymptotique à des parallèles aux axes, et telle que pour tout point z, on a $\{ z < \lambda \} \in F_z$. La relation $z < \lambda$ veut dire qu'il existe un point aléatoire z' tel que $z < z'$ et $z' \in \lambda$.

Soit Z un point aléatoire et notons par $\overline{Z}$ l'ensemble de tous les points supérieurs ou égal à Z dont l'une des coordonnées est commune avec Z. Z est alors appelé un point d'arrêt si $\overline{Z}$ est une ligne d'arrêt.

Remarquons que c'est aussi un point aléatoire tel que pour tout z, on a $\{ Z \ll z \} \in F_z$ (ou bien $\{ Z < z \} \in F_z$ par la continuité à droite de la filtration).

Le minimum $Z \wedge Z'$ de deux points d'arrêt n'est pas en général un point d'arrêt à moins que l'on sache que ces deux points sont p. s. comparables. Cependant, la ligne « en escalier » $\overline{Z} \wedge \overline{Z}'$ est toujours une ligne d'arrêt. Rappelons également que $Z = (S, T)$ est un point d'arrêt si et seulement si, S est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\{ F_T^2 \cap F_s^1 \}_{s \geq 0}$ et T par rapport à la filtration $\{ F_S^1 \cap F_t^2 \}_{t \geq 0}$.

PROPOSITION 1. — *a*) Les propositions suivantes sont équivalentes :

(*a*1) Γ est un chemin croissant optionnel non borné.

(*a*2) Γ est le bord supérieur gauche d'une région aléatoire fermée A telle que :

L'indicatrice I_A est un processus adapté.

Pour tout $z \in A$, on a $\{ \xi : z \wedge \xi \} \subset A$ (cette région sera notée $\vec{\Gamma}$).

(*a*3) Γ est égal à une famille non bornée $\{ U_t, t \geq 0 \}$ de points d'arrêt telle que :

. $s \leq t \Rightarrow U_s < U_t$ p. s.

. $t \to U_t$ est p. s. continu.

b) Les propositions suivantes sont équivalentes :

(*b*1) λ est une ligne d'arrêt.

(*b*2) λ est le bord supérieur d'une région aléatoire fermée A telle que :

. L'indicatrice I_A est un processus adapté.

. Pour tout $z \in A$, on a $\{ \xi : \xi < z \} \subset A$.

(*b*3) λ est égal à une famille non bornée $\{ U_t, t \geq 0 \}$ de points d'arrêt telle que :

. $s \leq t \Rightarrow U_s \wedge U_t$.

. $t \to U_t$ est p. s. continu.

Remarque. — Cette proposition montre bien l'analogie entre chemin croissant optionnel et ligne d'arrêt. Géométriquement parlant le passage de l'un à l'autre se fait au moyen du produit d'une rotation et d'une translation.

Preuve. — L'équivalence entre (*a*1) et (*a*3) est évidente, celle entre (*a*2) et (*a*3) est une reformulation du théorème 2.7 de [*12*]. (*b*2) étant les « temps d'arrêt de Wong-Zakai », l'équivalence avec (*b*1) a été démontrée dans [*9*]. Enfin, on obtient (*b*3) en appliquant le théorème 4 et en prenant comme chemins croissants, les droites déterministes L_t formant un angle t avec un axe donné.

Pour la suite, les résultats suivants seront nécessaires.

LEMME 2. — Soient Z un point d'arrêt et λ une ligne d'arrêt. On a alors pour tout z :

$$\{ Z \ll z \} \cap \{ Z \ll \lambda \} \in F_z .$$

Preuve. — Pour un point z, on note $\underline{z}$ l'ensemble des points inférieurs ou égal à z, dont l'une des coordonnées est commune avec z. De même, si L et L′ sont deux lignes, la notation $L < L'$ signifie que pour tout $z < L$ on a $z < L'$.

Il suffit de démontrer : $\{ Z \ll z \} \cap \{ Z \ll \lambda \}^c \in F_z$.

Cependant cette expression est égale à :

$$\{ Z \ll z \} \cap \{ z < \lambda \}^c \cap \{ \lambda \wedge \underline{z} < \overline{Z} \wedge \underline{z} \} .$$

$\lambda \wedge \underline{z}$ et $\overline{Z} \wedge \underline{z}$ sont des lignes d'arrêt, par conséquent, selon [*9*], l'ensemble $\{ \lambda \wedge \underline{z} < \overline{Z} \wedge \underline{z} \}$ appartient aux tribus engendrées par ces lignes d'arrêt, donc à F_z. Les autres termes appartiennent à F_z par définition.

La proposition suivante a été démontrée par Walsh [*12*].

PROPOSITION 3. — Soient $Z < Z'$ deux points d'arrêt finis. Il existe alors un chemin croissant optionnel de points d'arrêt $\{ U_t , t \geq 0 \}$ tel que $U_0 = Z$ et $P \{ U_t = Z \} \to 1$ lorsque $t \to \infty$.

On peut maintenant caractériser les points d'arrêt à l'aide des chemins croissants optionnels et des lignes d'arrêt.

THÉORÈME 4. — Un point aléatoire Z est un point d'arrêt si et seulement si il existe un chemin croissant optionnel Γ et une ligne d'arrêt λ tels que :

$$Z = \inf \{ z : z \in \Gamma \cap \lambda \}, \qquad Z = \infty \quad \text{si cet ensemble est vide} .$$

Preuve. — Si Z est un point d'arrêt, alors $\overline{Z}$ est une ligne d'arrêt. D'après la proposition 3, il existe un chemin croissant optionnel Γ partant de l'origine et qui arrive à Z. On obtient $Z = \inf \{ z : z \in \Gamma \cap \overline{Z} \}$.

Inversement, soient $\Gamma = \{ \gamma(t),\ t \geq 0 \}$ un chemin croissant optionnel, λ une ligne d'arrêt et Z défini comme dans le théorème. On a l'égalité suivante pour tout z :

$$\{ Z \ll z \} = \bigcup_{t \in Q} [\{ \gamma(t) \ll z \} \cap \{ \gamma(t) \ll \lambda \}^c] .$$

Z est alors un point d'arrêt puisque $\gamma(t)$ en est un et en utilisant le lemme 2.

On peut facilement définir une relation d'ordre partiel entre les chemins croissants optionnels (en abrégé C. C. O.). Soient Γ_1 et Γ_2 deux C. C. O., on dira que $\Gamma_1 < \Gamma_2$ si $\vec{\Gamma}_1 \subseteq \vec{\Gamma}_2$.

PROPOSITION 5. — 1) Soient Γ_1 et Γ_2 deux C. C. O., alors $\Gamma_1 \wedge \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \vee \Gamma_2$ sont aussi des C. C. O.

2) si $\{ \Gamma_n \}_n$ est une suite de C. C. O., alors $\inf_n \Gamma_n$ et $\sup_n \Gamma_n$ sont aussi des C. C. O.

Preuve. — On applique la proposition 1 ($a2$) en remarquant que l'union et l'intersection d'ensembles mesurables sont encore un ensemble mesurable.

Soit Z un point d'arrêt. Parmi tous les C. C. O. joignant l'origine à Z, il en existe un qui est maximal, par rapport à l'ordre partiel défini et un qui est minimal. L'existence de ces deux C. C. O., que l'on notera respectivement Z_1 et Z_2, découle immédiatement du lemme de Zorn ou bien directement par construction (comme le fait J.-P. Fouque par exemple). Fouque définit alors le passé de Z comme étant l'ensemble optionnel :

$$P_Z = \vec{Z}_1 \cap ((\vec{Z}_2)^c \cup [Z_2]) \cap ([Z, \infty)^c \cup [Z]) .$$

Ceci permet de définir l'infimum de deux points d'arrêt comme étant le point aléatoire le plus grand appartenant aux deux passés. C'est aussi le point d'arrêt le plus grand, inférieur aux deux points d'arrêts donnés.

Passons à la notion de prévisibilité. On suit les notations de [9] par exemple. Dans l'espace produit $R_+^2 \times \Omega$, on définit la tribu des ensembles prévisibles $\underline{P}$ comme étant celle engendrée par les processus adaptés et continus par exemple. Une ligne d'arrêt λ est appelée prévisible si et seulement si son graphe $[\![\lambda]\!] = \{ (z, \omega) : z \in \lambda(\omega) \}$ appartient à $\underline{P}$. Ceci est équivalent à dire que λ est annonçable : il existe une suite croissante de lignes d'arrêt strictement inférieures à λ et qui tendent vers λ. Un point d'arrêt Z est prévisible si son graphe $[\![Z]\!]$ appartient à $\underline{P}$. Z est appelé annonçable s'il existe une suite de points d'arrêt strictement inférieurs à Z et qui tendent vers Z. Il est clair que Z est un point d'arrêt annonçable si et seulement si la ligne d'arrêt $\bar{Z}$ est prévisible. De plus tout point d'arrêt annonçable est prévisible ; la réciproque n'est pas vraie, Bakry en a montré un contre-exemple.

DÉFINITION. — Un chemin croissant optionnel Γ est appelé chemin croissant annonçant (C. C. A.) s'il existe une décomposition de Γ en points d'arrêt annonçables.

Remarque. — Le graphe d'un C. C. A. est un ensemble prévisible.

Notons également que tout chemin optionnel strictement croissant est annonçant. En effet, il suffit de considérer la paramétrisation du théorème 2.7 de [*12*] : soit Z_u le point d'arrêt du C. C. O. obtenu par intersection avec la droite $s + t = u$. Ce point est annonçable par la suite $\{ Z_{u-\frac{1}{n}} \}_n$ puisque le chemin est strictement croissant. C'est donc un C. C. A.

LEMME 6. — La limite d'une suite décroissante stationnaire de points d'arrêt annonçables est un point d'arrêt annonçable.

Preuve. — On s'inspire de la démonstration classique de Dellacherie. Soient $\{ Z_n \}_n$ la suite décroissante stationnaire, $\{ Z_n^p \}_p$ une suite annonçant Z_n et d une distance bornée définie dans $R_+^2 \cup \{ \infty \}$.

Quitte à extraire pour chaque n, une sous-suite, on peut supposer que l'on a pour chaque entier p :

$$P \{ d(Z_n^p, Z_n) > 2^{-p} \} \leq 2^{-(n+p)} .$$

De plus, quitte à remplacer Z_n^p par $Z_n^p \vee Z_{n+1}^p \vee \ldots$, on peut supposer que la suite $\{ Z_n^p \}$ est décroissante en n pour tout p et par conséquent le point $Z^p = \inf_n Z_n^p$ est un point d'arrêt. La fin de la démonstration est alors la même qu'à un indice.

THÉORÈME 7. — Un point aléatoire Z est un point d'arrêt annonçable si et seulement si il existe un C. C. A. Γ et une ligne d'arrêt prévisible λ tels que :

$$Z = \inf \{ z : z \in \Gamma \cap \lambda \} \quad \text{et} \quad Z = \infty \quad \text{si cet ensemble est vide} .$$

Preuve. — Notons F_Z, la tribu engendrée par les ensembles antérieurs au point Z, c'est-à-dire les ensembles F tels que, pour tout z, $F \cap \{ Z < z \} \in F_z$.

Si Z est annonçable, alors $\overline{Z}$ est une ligne d'arrêt prévisible. Il reste à montrer qu'il existe un C. C. A. qui joint l'origine au point annonçable Z. Pour cela, il suffit de prouver que Z peut être annoncé par des points d'arrêt annonçables $\{ U_n \}$ tels que U_{n+1} soit F_{U_n}-mesurable. On reprend la démonstration du livre de Dellacherie-Meyer en faisant attention aux restrictions dues à l'ordre partiel. On négligera les ensembles de probabilité nulle.

Soient $\{ Z_n \}$ une suite de points d'arrêt annonçant Z, et Z_n^p l'approximation dyadique de Z_n par valeurs supérieures :

$$Z_n^p = ((k+1)2^{-p}, (l+1)2^{-p}) \Leftrightarrow Z_n \in [(k2^{-p}, l2^{-p}), ((k+1)2^{-p}, (l+1)2^{-p})[$$
$$Z_n^p = \infty \Leftrightarrow Z_n = \infty .$$

Il est clair que Z_n^p est un point d'arrêt annonçable. Puisque $Z_n \ll Z$, $\lim_p Z_n^p = Z_n$, il existe pour tout n un entier $n' \geqslant n$ tel que :

$$P \{ Z_n^{n'} \ll Z \}^c \leq 2^{-n} .$$

Définissons alors U_n comme étant l'infimum au sens des points d'arrêt, de $\{ Z_m^{m'} \}_{m \geq n}$. La suite $\{ U_n \}_n$ est croissante, $Z_n < U_n$, par conséquent d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\{ U_n \}$ est une suite de points d'arrêt qui annoncent Z (cependant, ces points ne prennent pas leurs valeurs dans l'ensemble des points dyadiques). Reprenant la preuve de la proposition 1.2 de [*12*], on peut supposer que pour tout n, U_{n+1} est F_{U_n}-mesurable. Définissons maintenant U_n^k comme étant l'infimum au sens des points d'arrêt de $\{ Z_m^{m'} \}_{n \leq m \leq n+k}$. C'est une suite décroissante de points d'arrêt dont la limite est U_n. De plus cette suite est stationnaire. En effet, le sous-ensemble de $R_+^2 \cup \{ \infty \}$ formé des points $Z_m^{m'}(\omega)$ $(m \geq n)$ et $Z(\omega)$ est compact, il en est donc de même pour les abscisses et les ordonnées correspondantes. Ces ensembles contiennent donc leur borne inférieure qui est différente de la limite. L'infimum géométrique des points $\{ Z_m^{m'}(\omega) \}_{m \geq n}$ est donc un point dont l'abscisse et l'ordonnée sont celles de deux des $Z_m^{m'}(\omega)$. L'infimum au sens des points d'arrêt est toujours inférieur ou égal à l'infimum géométrique, mais si ce dernier reste constant, l'infimum au sens des points d'arrêt reste aussi constant car tout point rajouté étant supérieur à l'infimum géométrique est alors supérieur à l'infimum au sens des points d'arrêt et il existe donc un C. C. O. joignant ces deux points. Par conséquent $\{ U_n^k \}_k$ est une suite décroissante stationnaire. Enfin, les points U_n^k sont annonçables. En effet, soit U_n^k se trouve sur un C. C. O. strictement croissant ce qui implique son annonçabilité ; soit, par construction des C. C. O. maximal et minimal, il se trouve égal à l'infimum géométrique, il est alors annoncé par la suite qui est l'infimum au sens des points d'arrêt des suites annonçant $\{ Z_m^{m'} \}_{n \leq m \leq n+k}$. On termine alors en utilisant le lemme 6.

Réciproquement, soient λ une ligne d'arrêt prévisible annoncée par une suite $\{ \lambda_n \}$ de lignes d'arrêt, et $\Gamma = \{ Z_t, t \geq 0 \}$ un C. C. A. tel que tous les Z_t soient annonçables. D'après le corollaire 2.5 de [*12*], il existe un F_{Z_t}-temps d'arrêt τ tel que $Z_\tau = Z$ et des temps d'arrêt τ_n tels que Z_{τ_n} soit l'intersection de λ_n avec Γ. τ est alors un temps d'arrêt annonçable et Z_τ un point d'arrêt annonçable.

III. LE THÉORÈME DE SECTION

Il n'existe pas de théorème de section pour des ensembles de $R_+^2 \times \Omega$ par des points d'arrêt ou par des lignes d'arrêt. En général on n'obtient une section qu'avec une ligne d'arrêt faible [*1*] [*9*]; c'est-à-dire une partie progressive d'une ligne d'arrêt. Dans [*2*], Cairoli remarque que l'on n'a pas en général, de théorème concluant à l'existence d'un point d'arrêt, resp. point d'arrêt annonçable Z, tel que $P\{\omega : (Z(\omega), \omega) \in A\} > 0$ pour A un ensemble optionnel (la tribu optionnelle est engendrée par les processus adaptés et continus à droite), resp. prévisible, alors que dans de nombreuses applications, c'est sous cette forme que le théorème de section intervient.

Dans ce paragraphe, on va donner quelques conditions pour obtenir un tel théorème ainsi que le théorème de section avec un point d'arrêt.

Énonçons tout d'abord le théorème de section [*9*] généralisé par Bakry pour différentes tribus.

THÉORÈME 8. — Soient A un ensemble optionnel (resp. prévisible) et $\pi(A)$ sa projection sur Ω. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une ligne d'arrêt faible λ, fermée à droite, optionnelle (resp. prévisible), telle que $[\![\lambda]\!] \subset A$ et :

$$P\{\pi(A)\} \leq P\{\lambda \ll \infty\} + \varepsilon .$$

Combinant ce résultat avec les théorèmes 4 et 7, et choisissant une droite déterministe strictement croissante, on obtient immédiatement :

COROLLAIRE 9. — Soit A un ensemble satisfaisant au théorème de section avec une ligne d'arrêt (prévisible). Il existe alors un point d'arrêt Z (annonçable) tel que :

$$[\![Z]\!] \subset A \qquad \text{et} \qquad P\{\pi(A)\} \leq P\{Z \neq \infty\} + \varepsilon .$$

DÉFINITIONS. — Un ensemble optionnel A est appelé mince, s'il ne rencontre aucun graphe de point d'arrêt, autrement dit, si

$$P\{\omega : (Z(\omega), \omega) \in A\} = 0$$

pour tout point d'arrêt Z ([*2*]).

Un ensemble optionnel A est appelé (prévisiblement) approchable s'il existe un chemin croissant optionnel (annonçant) Γ tel que

$$P\{A \cap \Gamma \neq \phi\} > 0 .$$

Remarque. — Tout point d'arrêt et toute ligne d'arrêt est approchable. Notons encore, que la classe des ensembles minces contient strictement la classe des ensembles évanescents.

PROPOSITION 10. — Soit A un ensemble optionnel. Si son début est mince, alors il n'est pas approchable. Si A n'est pas mince, alors A est approchable.

La démonstration de cette proposition découle de façon immédiate des résultats énoncés au paragraphe précédent.

Remarque. — Tout ensemble optionnel A qui contient un ensemble parfait et incomparable est approchable. En effet, parmi toutes les droites L_t passant par l'origine et d'angle rationnel t avec l'un des axes, il en est une qui coupe A avec une probabilité positive. A n'est pas mince et la proposition 10 s'applique.

LEMME 11. — Soit H un ensemble progressif de $R_+^2 \times \Omega$, satisfaisant à la condition suivante pour tout point $z = (s, t)$:

$$(*) \quad \{ \omega : P\{ \exists s' > s : (s', t) \in H/F_z \} . P\{ \exists t' > t : (s, t') \in H/F_z \} > 0 \} \subseteq \{ \omega : \exists z' \gg z : z' \in H \} .$$

Alors il existe un C. C. O. joignant l'origine à H. De plus, si H est prévisible, le chemin peut être choisi annonçant.

Preuve. — Nous allons démontrer ce lemme dans le cas discret, généralisant la preuve de la proposition 3, selon [*12*].

Soit Z un point d'arrêt inférieur au début faible de H et posons :

$$D = \{ Z = (i,j) \}, \qquad C = D \cap \{ \omega : (i,j) \in H \} .$$

$$A = \left\{ \omega : P\left\{ D \cap \left(\bigcup_{k>j} \{ \omega : (i,k) \in H \} \right) \mid F_{ij} \right\} > 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \omega : P\left\{ D \cap \left(\bigcup_{k>i} \{ \omega : (k,j) \in H \} \right) \mid F_{ij} \right\} > 0 \right\} .$$

Les ensembles A, B, C et D appartiennent tous à la tribu F_{ij}. Définissons alors le point aléatoire Z' sur D de la façon suivante :

$$Z'(\omega) = \begin{cases} (i,j) & \text{si} \quad \omega \in C \\ (i, j+1) & \text{si} \quad \omega \in (A \backslash B) \backslash C \\ (i+1, j) & \text{si} \quad \omega \in (B \backslash A) \backslash C \\ (i+1, j+1) & \text{si} \quad \omega \in [((D \backslash C) \backslash A) \backslash B] \cup [A \cap B \backslash C] . \end{cases}$$

Soit F_Z la tribu engendrée par les ensembles antérieurs au point Z.

On remarque alors que les ensembles A, B, C et D appartiennent à F_Z et par conséquent Z′ est F_Z-mesurable. On a de plus : $Z < Z'$ et Z′ est un point d'arrêt [1] :

$$\{ Z'=(i,j) \} = \{ Z'=(i,j),\ Z=(i-1,j-1) \} \cup \{ Z'=(i,j),\ Z=(i-1,j) \} \cup \{ Z' = (i,j),\ Z = (i,j-1) \} \cup \{ Z' = Z = (i,j) \}.$$

Ceci montre que $\{ Z' = (i,j) \} \in F_{ij}$.

Montrons maintenant que le point d'arrêt Z′ est inférieur à H, autrement dit, qu'il existe un point $z \in H$ tel que $Z' < z$. Si $\omega \in C$ alors $Z' = Z$ qui est inférieur à H par définition. Supposons $Z(\omega) = (i,j)$ et $Z'(\omega) = (i+1,j)$ ceci signifie que $\omega \in B \backslash A \backslash C$. Puisque $\omega \notin A$, et que l'on a la relation

$$P\left\{ A^c \cap D \cap \left(\bigcup_{k>j} \{ \omega : (i,k) \in H \} \right) \right\} = 0,$$

on peut en conclure que presque sûrement $\omega \notin \bigcup_{k>j} \{ \omega : (i,k) \in H \}$. D'autre part $\omega \notin C$. Donc $\forall k \geq j$, aucun point (i,k) n'appartient à H et le point $Z'(\omega) = (i+1,j)$ est inférieur à H. On a une démonstration similaire pour le cas où $Z'(\omega) = (i,j+1)$. Enfin, soient $Z(\omega) = (i,j)$ et $Z'(\omega) = (i+1,j+1)$. On a alors $\omega \notin C$. Si $\omega \notin A \cap B$ alors $\omega \notin A \cup B$ et pour tout $k \geq 0$, les points $(i+k,j)$ et $(i,j+k)$ n'appartiennent pas à H. $Z'(\omega)$ est donc inférieur à H. Pour terminer, si $\omega \notin A \cap B$, on a :

$$P\left\{ \bigcup_{k>j} \{ \omega : (i,k) \in H \}/F_{ij} \right\} . P\left\{ \bigcup_{k>i} \{ \omega : (k,j) \in H \}/F_{ij} \right\} > 0 .$$

D'après la condition (*) du lemme, on en conclut que $Z'(\omega) = (i+1,j+1)$ est inférieur à H.

Les étapes suivantes de la démonstration sont les mêmes que celles de la proposition 1.2 et de la proposition 2.1 de [*12*]. Nous les omettons.

Remarque. — C'est la condition (*) du lemme 11 qui permet l'obtention du théorème de section avec point d'arrêt. Cette condition est en général vérifiée lorsque, pour presque tout ω, la coupe $H(\omega)$ est un ensemble géométriquement assez régulier, combiné avec la condition (F4). Si cette propriété géométrique est vérifiée pour un ensemble de probabilité positive, alors l'ensemble H est approchable ce qui permet d'appliquer la proposition 10.

([1]) Notons, qu'en général le théorème 2.1 (*b*) de [*9*] est faux comme le montre le contre-exemple de la page 57 de [*9*] : un ensemble de séparation aléatoire supérieur à une ligne d'arrêt et mesurable par rapport à celle-ci n'est pas nécessairement une ligne d'arrêt.

PROPOSITION 12. — Soit H un ensemble optionnel. Si la ligne d'arrêt faible qui intervient dans la section de H peut être choisie connexe, alors on a un théorème de section avec un point d'arrêt.

Preuve. — Soit λ la ligne d'arrêt faible connexe intervenant dans la section de H.

On définit Z_λ, le premier point futur de λ, de la façon suivante :

$$Z_\lambda = \sup \{ z, z=(s,t) : \exists (s',t') < z : (s',t) \in \lambda, (s,t') \in \lambda \} .$$

Puisque la filtration est continue à droite, c'est un point d'arrêt. En effet, D_λ étant le début de λ, on a :

$$\{ Z_\lambda \ll z \} = \bigcap_{s' \leq s} \{ (s',t) \in \lambda \}^c \bigcap_{t' \leq t} \{ (s,t') \in \lambda \}^c \cap \{ z < D_\lambda \}^c ,$$

et cet ensemble appartient à F_z.

Il existe alors un C. C. O. Γ joignant l'origine à Z_λ. λ étant connexe, $\Gamma \cap \lambda$ n'est pas vide. C'est un ensemble totalement ordonné et progressif, son point début est donc un point d'arrêt qui appartient à H.

IV. APPLICATIONS AUX PROCESSUS

Bien que la notion de chemin croissant optionnel soit relativement nouvelle, plusieurs auteurs l'ont utilisé pour résoudre différents problèmes. Il faut citer tout d'abord le travail [*3*], puis d'autres travaux : [*6*] [*7*] [*12*] et [*8*]. Nous proposons ici quelques applications supplémentaires, utilisant les résultats des paragraphes précédents.

PROPOSITION 13. — Soit A_z, un processus croissant, nul sur les axes, continu, adapté et p. s. borné. Il existe alors une suite de points d'arrêt $\{ Z_n \}_{n=1}^{\infty}$ tendant vers l'infini telle que pour tout n on a $A_{Z_n} \leq n$.

Preuve. — On définit $\lambda_n = \inf \{ z : A_z \geq n \}$. C'est une ligne d'arrêt. En effet A_z est un processus croissant et pour tout point z,

$$\{ \omega : z < \lambda_n(\omega) \} = \{ \omega : A_z(\omega) \leq n \} .$$

Puisque A est un processus adapté, cet ensemble appartient à F_z. On peut choisir un point d'arrêt Z_n sur la ligne λ_n. La suite $\{ Z_n \}$ satisfait à la proposition.

PROPOSITION 14. — Soient $X = \{ X_z \}$ et $Y = \{ Y_z \}$ deux processus optionnels tels que pour tout point d'arrêt Z, on a $X_Z = Y_Z$ p. s. Si l'ensemble $\{ z : X_z(\omega) \neq Y_z(\omega) \}$ est presque sûrement fermé et convexe, alors $X = Y$.