ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HUBERT HENNION

Transience de certaines chaînes semi-markoviennes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 18, nº 3 (1982), p. 277-291
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_3_277_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVIII, n° 3, 1982, p. 277-291. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Transience de certaines chaînes semi-markoviennes

par

Hubert HENNION
Université de Rennes

RÉSUMÉ. — On prouve que, sous certaines hypothèses de régularité, une chaîne de Markov sur l'espace $E \times \mathbb{R}^d$ qui commute aux translations de $\mathbb{R}^d$ est transitoire si $d \geq 3$.

ABSTRACT. — We prove that, under some regularity conditions, a Markov chain on the space $E \times \mathbb{R}^d$ commuting with the action of $\mathbb{R}^d$ is transient if $d \geq 3$.

$(E, \mathscr{E})$ est un espace mesurable séparable, $\mathscr{B}$ et λ désignent la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Une chaîne de Markov de transition $\mathbb{P}$ sur $(E \times \mathbb{R}^d, \mathscr{E} \otimes \mathscr{B})$ est dite semi-markovienne si elle commute aux translations de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire si, pour tout $(u, x) \in E \times \mathbb{R}^d$, $A \times B \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{B}$ et $z \in \mathbb{R}^d$, l'on a

$$\mathbb{P}((u, x), A \times B) = \mathbb{P}((u, x + z), A \times (B + z))$$

Lorsque E est réduit à un point on retrouve la notion de marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d$, dans ce cas, si $d \geq 3$ et si $\mathbb{P}$ est adaptée elle est transitoire, il s'agit ici de généraliser ce résultat au cas de certaines chaînes semi-markoviennes.

Dans la suite, désignant par Q la probabilité de transition de la chaîne de Markov obtenue par projection de $\mathbb{P}$ sur E et notant

$$P_n(u, A, B) = \mathbb{P}_n((u, 0), A \times B),$$

on considère les hypothèses suivantes :

H_0 – Q est une chaîne de Harris quasi-compacte,

H_1 – Q est une chaîne de Harris,

H_2 – $\mathbb{P}$ est étalée, c'est-à-dire : pour tout $u \in E$, les mesures sur $E \times \mathbb{R}^d$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} P_n(u, .)$$

et $m \otimes \lambda$ ne sont pas étrangères, m étant une mesure Q-invariante sur E.

Soit $\mathbb{G}$ le noyau potentiel de la chaîne $\mathbb{P}$.

THÉORÈME. — *Supposons $d \geq 3$, alors*

I) *sous les hypothèses* H_0 *et* H_2, *pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{G}1_{E\times K}$ *est borné,*

II) *sous les hypothèses* H_1 *et* H_2, *il existe une suite* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}$ *croissant vers* E *telle que, pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{G}1_{A_n\times K}$ *soit borné.*

Remarque. — Dans les deux cas ci-dessus, si la mesure m possède une propriété de régularité par rapport à une classe compacte de $\mathcal{E}$, $\mathbb{P}$ est dissipatif, il en résulte en particulier que, si Q est récurrente positive l'on a, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{G}1_{E\times K} < +\infty m \otimes \lambda$ p. p. Si, par contre, $m(E) = +\infty$, un exemple pris à [*1*] montre qu'il existe des compacts $K \subset \mathbb{R}^d$ tels que $\mathbb{G}1_{E\times K} = +\infty$ sur une partie non négligeable.

J. Jacod dans [*5*] a obtenu pour le cas $d = 1$ un critère de récurrence basé sur l'existence d'un moment, on trouvera dans [*4*] un résultat plus proche du nôtre. D'autre part, certains problèmes relatifs aux marches aléatoires (m. a.) sur les groupes se formulent commodément en termes de chaînes semi-markoviennes et peuvent conduire à des énoncés du type précédent. Par exemple, si μ est une probabilité adaptée sur le groupe $G_d = SO(d) \times \mathbb{R}^d$ des déplacements de $\mathbb{R}^d$, la marche aléatoire droite de loi μ sur G_d est la chaîne de Markov définie par la probabilité de transition

$$\mathbb{P}f(u, x) = \delta_{(u,x)} * \mu(f) = \int f(uv, x + uy)\mu(dv, dy)$$

de sorte que $\mathbb{P}$ commute aux translations de $\mathbb{R}^d$, si $d \geq 3$ cette marche est transitoire (B. Roynette [*7*]). Dans ses grandes lignes la première partie de la démonstration du théorème suit l'argumentation de cet auteur et notre résultat permet une généralisation de l'énoncé précédent sur une idée de Y. Guivarc'h.

COROLLAIRE. — *Soient* F *et* H, $F \supset H$, *deux sous-groupes fermés du groupe localement compact* G *tels que* H *soit distingué dans* F, F/H *isomorphe à* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$ *et* G/F *porte une mesure* G*-invariante, alors, si p est une probabilité étalée sur* G, *la m. a. de loi p sur l'espace homogène* $M = G/H$ *est transitoire.*

Achevons cette introduction en fixant quelques notations.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un noyau de transition μ^n de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que, pour $u \in E$, $A \in \mathscr{E}$ et $B \in \mathscr{B}$

$$P_n(u, A, B) = \int_A Q_n(u, dv)\mu^n_{u,v}(B)$$

on a donc, en désignant par δ_x la masse de Dirac au point $x \in \mathbb{R}^d$ et en posant $\mu^1 = \mu$

$$\mathbb{P}((u, x), A \times B) = \int_A Q(u, dv)\delta_x * \mu_{u,v}(B)$$

et par suite

$$P_n(u, A, B) = \int Q(u, du_1) \ldots Q(u_{n-1}, du_n)1_A(u_n)\mu_{u,u_1} * \ldots * \mu_{u_{n-1}}, u_n(B).$$

*
* *

Dans ce paragraphe, nous établissons I sous des hypothèses techniques restrictives auxquelles nous nous ramèneront ultérieurement.

On dira que la chaîne semi-markovienne $\mathbb{P}$ de noyau potentiel $\mathbb{G}$ a la propriété $\mathscr{T}$ si, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{G}1_{E \times K}$ est borné. On notera $|\cdot|$ la norme euclidienne et B_t la boule fermée de centre O de rayon t de $\mathbb{R}^d$.

PROPOSITION 1. — *Soit* ν *une probabilité sur* E *et* $\mathbb{P}$ *une chaîne semi-markovienne satisfaisant à :*

H'_0 : *il existe* $c > 0$, $D \in \mathscr{E}$, $\nu(D) > 0$, *tels que, pour tout* $u, v \in E$, $q(u, v) \geq c1_D(v)$;

H'_2 : *il existe* $t > 0$ *tel que, si*

$$S = \left\{ (u, v) : u \in D, v \in D, \int_{B_t} p(u, v, x)\lambda(dx) > 0 \right\},$$

où $p(u, v, x)$ (resp. $q(u, v)$) *sont des versions mesurables des densités de* $P(u, .)$ (resp. $Q(u, .)$) *par rapport à* $\nu \otimes \lambda$ (resp. ν), *alors, si* $d \geq 3$, $\mathbb{P}$ *a la propriété* $\mathscr{T}$.

Rappelons [*6*], page 181, que l'hypothèse H'_0 implique l'existence d'une probabilité m sur $(E, \mathscr{E})$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \| Q_k - 1_E \otimes m \| = 0$$

$\|\cdot\|$ désignant la norme d'un opérateur dans l'espace des fonctions mesurables bornées sur E muni de la norme uniforme.

Écrivons

$$\mu_{u,v} = s(u, v)\alpha_{u,v} + (1 - s(u, v))\beta_{u,v}$$

où $0 \leq s(u, v) \leq 1$ et α, β sont des noyaux markoviens de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^d$ ainsi définis, si $(u, v) \in S$, $\alpha_{u,v}$ est la normalisation de la partie absolument continue de la restriction de $\mu_{u,v}$ à B_t, si $(u, v) \notin S$, $s(u, v) = 0$.

LEMME 1. — *Soit $\mathbb{P}$ une chaîne semi-markovienne satisfaisant H'_0, H'_2, et k un entier fixé, désignons par $\overline{\mathbb{P}}$ la chaîne semi-markovienne définie par le noyau*

$$\overline{P}(u, dw, dx) = \int_v Q_{k-1}(u, dv)Q(v, dw)\overline{\mu}_{v,w}(dx)$$

où

$$\overline{\mu}_{v,w} = \frac{1}{2} s(v, w)\alpha_{v,w} * \check{\alpha}_{v,w} + \left(1 - \frac{1}{2} s(v, w)\right)\delta_0$$

alors

i) $\overline{\mu}_{v,w}$ *est centrée à support contenu dans* B_{2t},
ii) si $\overline{\mathbb{P}}$ a la propriété $\mathscr{C}$, il en est de même de $\mathbb{P}$,
iii) $\overline{\mathbb{P}}$ est irréductible.

Dans cet énoncé, comme ci-dessous, $\check{\tau}$ désigne l'image de la mesure ou de la fonction τ par l'application $x \to -x$ de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration du lemme 1. — *i)* est clair, pour établir *ii)*, nous utiliserons le lemme de symétrisation et troncation suivant pour lequel nous renvoyons à [*2*].

LEMME 2. — *$\hat{}$ désigne la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^d$.*

a) soit, sur $\mathbb{R}^d$, μ une probabilité et ϕ une fonction borélienne bornée à support compact, alors

$$\mu(\phi * \check{\phi}) = \int |\hat{\phi}(\gamma)|^2 \hat{\mu}(\gamma)d\gamma,$$

b) si μ s'écrit $\mu = s\alpha + (1 - s)\beta$, où $0 \leq s \leq 1$ et α, β sont des probabilités et, si nous posons

$$\overline{\mu} = \frac{s}{2}\alpha * \check{\alpha} + \left(1 - \frac{s}{2}\right)\delta_0,$$

on a

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \leq \hat{\overline{\mu}}(\gamma)$$

Soit ϕ telle que dans le lemme, d'après *a)*

$$\begin{aligned} P_{kn}1_E \otimes \phi * \check{\phi}(u_0) &= \int Q(u_0, du_1) \ldots Q(u_{kn-1}, du_{kn})\mu_{u_0u_1} * \ldots * \mu_{u_{kn-1}u_{kn}}(\phi * \check{\phi}) \\ &= \int Q(u_0, du_1) \ldots Q(u_{kn-1}, du_{kn}) \int |\hat{\phi}(\gamma)|^2 |\hat{\mu}_{u_0u_1}(\gamma)| \ldots |\hat{\mu}_{u_{kn-1}u_{kn}}(\gamma)| d\gamma. \end{aligned}$$

Notons les inégalités

$$(1) \quad |\,\hat{\mu}_{u,v}(\gamma)\,| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad (2) \quad |\,\hat{\mu}_{u,v}(\gamma)\,| \leq \hat{\hat{\mu}}_{u,v}(\gamma)$$

et dans la formule ci-dessus majorons $|\,\hat{\mu}_{u_i u_{i+1}}(\gamma)\,|$ en utilisant (1) si $i \neq lk - 1$ et (2) si $i = lk - 1$; il vient

$$\begin{aligned}
& \mathrm{P}_{kn} 1_{\mathrm{E}} \otimes \phi * \check{\phi}(u_0) \\
& \qquad \leq \int \mathrm{Q}_{k-1}(u_0, du_{k-1}) \mathrm{Q}(u_{k-1}, du_k) \mathrm{Q}_{k-1}(u_k, du_{2k-1}) \mathrm{Q}(u_{2k-1}, du_{2k}) \\
& \qquad \ldots \mathrm{Q}_{k-1}(u_{k(n-1)}, du_{kn-1}) \mathrm{Q}(u_{kn-1}, du_{kn}) \int |\,\hat{\phi}(\gamma)\,|^2\, \hat{\hat{\mu}}_{u_{k-1}u_k}(\gamma) \hat{\hat{\mu}}_{u_{2k-1}u_{2k}}(\gamma) \\
& \qquad \ldots \hat{\hat{\mu}}_{u_{kn-1}u_{kn}}(\gamma) d\gamma
\end{aligned}$$

soit, puisque la dernière intégrale s'écrit aussi

$$\overline{\mu}_{u_{k-1}u_k} * \overline{\mu}_{u_{2k-1}u_{2k}} * \ldots * \overline{\mu}_{u_{kn-1}u_{kn}}(\phi * \check{\phi}) ,$$

$$\mathrm{P}_{kn} 1_{\mathrm{E}} \otimes \phi * \check{\phi}(u_0) \leq \overline{\mathrm{P}}_n 1_{\mathrm{E}} \otimes \phi * \check{\phi}(u_0) . \tag{3}$$

Désignons par $\mathbb{G}_k$ le potentiel de la chaîne semi-markovienne $\mathbb{P}^k$, si $t > 0$, il existe k_1 et k_2 strictement positifs tels que

$$k_1 1_{\mathrm{B}_t} \leq 1_{\mathrm{B}_t} * \check{1}_{\mathrm{B}_t} \leq k_2 1_{\mathrm{B}_{2t}}$$

en supposant que $\overline{\mathbb{P}}$ satisfait $\mathscr{T}$ et en utilisant (3) on en déduit l'existence de M tel que, pour tout $u \in \mathrm{E}$

$$\mathbb{G}_k 1_{\mathrm{E} \times \mathrm{B}_t}(u, 0) \leq \mathrm{M} \qquad \text{d'où, pour } x \in \mathrm{B}_{t/2}, \quad \mathbb{G}_k 1_{\mathrm{E} \times \mathrm{B}_{t/2}}(u, x) \leq \mathrm{M}$$

d'après le principe du maximum cette inégalité reste vraie partout et on conclut en utilisant la relation

$$\mathbb{G} = (\mathrm{I} + \mathbb{P} + \ldots + \mathbb{P}^{k-1}) \mathbb{G}_k . \tag{4}$$

Montrons que $\overline{\mathbb{P}}$ est irréductible.

Soit $(u, v) \in \mathrm{S}$ et $\rho > 0$ posons $\dfrac{d\alpha_{u,v}}{d\lambda} = f_{u,v}$ et $f^{\rho}_{u,v} = \inf \{ \rho, f_{u,v} \}$ on a

$$\frac{d\alpha_{u,v} * \check{\alpha}_{u,v}}{d\lambda} \geq f_{u,v} * \check{f}_{u,v} \geq f^{\rho}_{u,v} * \check{f}_{u,v} ,$$

cette dernière fonction, convolée d'une fonction bornée et d'une fonction intégrable, est continue et en choisissant ρ tel que $f^{\rho}_{uv} * \check{f}_{uv}(0) > 0$, on en déduit l'existence de r et $s \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{d\alpha_{u,v} * \check{\alpha}_{u,v}}{d\lambda} \geq \frac{1}{r} 1_{\mathrm{V}_s} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{V}_s = \mathrm{B}_{1/s} ;$$

posant

$$g_{u,v} = \frac{1}{2} s(u, v) \frac{d\alpha_{u,v} * \check{\alpha}_{u,v}}{d\lambda}$$

il vient

$$S = \bigcup_{r,s \in \mathbb{N}} \left\{ (u, v) : g_{u,v} \geq \frac{1}{r} 1_{V_s} \right\} \tag{5}$$

Utilisant maintenant la propriété H'_0 de $\mathbb{P}$, on a

$$\overline{P}(u, dv, dx) \geq \int_W Q_{k-1}(u, dw) Q(w, dv) g_{w,v}(x) \lambda(dx) \geq h_1(v, x) \nu(dv) \lambda(dx) \tag{6}$$

où l'on a posé

$$h_1(v, x) = C^k(\nu(D))^{k-1} \int g_{w,v}(x) \nu(dw)$$

si l'on définit h_n, pour $n \geq 2$, par la formule

$$h_n(v, x) = \int h_{n-1}(u, y) h_1(v, x - y) \nu(du) \lambda(dy)$$

on a plus généralement,

$$\overline{P}_n(u, dv, dx) \geq h_n(v, x) \nu(dv) \lambda(dx) \tag{7}$$

D'après (5), il existe r et $s \in \mathbb{N}$ tel que, si

$$R = \left\{ (w, v) : g_{w,v} \geq \frac{1}{r} 1_{V_s} \right\}, \qquad \nu \otimes \nu(R) > 0$$

notons

$$R_2(v) = \{ w : (w, v) \in R \} \qquad \text{et} \qquad D' = \{ v : \nu(R_2(v)) > 0 \}$$

on a $\nu(D') > 0$ et

$$h_1(v, x) \geq C^k \nu(D)^{k-1} \int_{R_2(v)} g_{w,v}(x) \nu(dw) \geq C^k \frac{\nu(D)^{k-1}}{r} \nu(R_2(v)) 1_{V_s}(x),$$

donc $h_1 > 0$ sur $D' \times V_s$, il en résulte que $h_n > 0$ sur $D' \times nV_s$ et on conclut que $\mathbb{P}$ est $\nu' \otimes \lambda$-irréductible, ν' désignant la restriction de ν à D'. □

LEMME 3. — *Il existe k_0 tel que $\overline{\mathbb{P}}$ ait la propriété $\mathscr{T}$.*

Démonstration du lemme 3. — $\overline{\mathbb{P}}$ est irréductible, nous allons prouver qu'elle n'est pas récurrente au sens de Harris, ceci sera fait par la méthode des fonctions barrières en suivant la démarche de [7] dont nous rappelons les deux résultats suivants.

LEMME 4. — [7] ou [8] : *Soit* R *une chaîne de Markov sur* $(\mathrm{M}, \mathscr{M})$, $\mathrm{D} \in \mathscr{M}$ *et* f *une fonction mesurable sur* M *tels que*

$$0 \leq f \leq 1, \qquad \sup_{z \in \mathrm{D}} f(z) = d < 1$$

$$\mathrm{R}f(z) \geq f(z) \qquad z \notin \mathrm{D}$$

alors, si $z \notin \mathrm{D}$,

$$\mathrm{R}_z[\mathrm{T} < +\infty] \leq \frac{1 - f(z)}{1 - d}$$

où T *désigne le temps d'entrée de* R *dans* D.

La construction d'une telle fonction reposera sur le

LEMME 5. — [7] : *Soit* $d \geq 3$, *il existe* α, $0 < \alpha < \dfrac{d-2}{2}$, $\varepsilon > 0$, $t > 1$ *tels que, si* τ *est une probabilité sur* $\mathbb{R}^d$ *à support compact, centrée, de matrice de covariance* C *satisfaisant à* $\| \mathrm{C} - \mathrm{I} \| < \varepsilon$ *l'on ait, pour tout* $x \notin \mathrm{B}_t$,

$$\int b(x + y)\tau(dy) \geq b(x)$$

où b *est la fonction*

$$b(y) = \sup \left\{ 0, 1 - \frac{1}{|x|^{2\alpha}} \right\}$$

Soit Σ la matrice de covariance de la probabilité sur $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\rho = \int_{u,v} m(du)\mathrm{Q}(u, dv)\overline{\mu}_{u,v}$$

puisque $\rho \geq c \int_{S} m(du)m(dv)\overline{\mu}_{u,v}$ et que $\overline{\mu}_{u,v}$ est adaptée pour $(u, v) \in \mathrm{S}$, Σ est définie positive, on supposera dans la suite que $\Sigma = \mathrm{I}$, en effet, on peut se ramener à ce cas en remplaçant $\overline{\mu}_{u,v}$ par $\mathrm{A}(\overline{\mu}_{u,v})$ où A est un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^d$. Posons encore

$$\rho_k(u, dx) = \int \mathrm{Q}_{k-1}(u, dv) \int \mathrm{Q}(v, dw)\overline{\mu}_{v,w}(dx)$$

et désignons par π_i la projection de $\mathbb{R}^d$ sur son i-ème facteur, puisque $\mathrm{Supp}\,(\overline{\mu}_{u,v}) \subset \mathrm{B}_{2t}$ la fonction $v \to \int \mathrm{Q}(v, dw)\overline{\mu}_{v,w}(\pi_i\pi_j)$ est bornée dans E et l'on a donc, d'après H'_0, uniformément en u

$$\lim_{k \to +\infty} \rho_k(u, \pi_i\pi_j) = \rho(\pi_i\pi_j) = \delta_{ij}.$$

Désignons par $C_k(u)$ la matrice de covariance de $\rho_k(u, .)$; ε, t, α étant fixés par le lemme 5, il existe k_0 tel que

$$\sup_{u \in E} \| C_{k_0}(u) - I \| < \varepsilon$$

et par suite, pour tout $u \in E$ et $x \notin B_t$

$$\overline{\mathbb{P}} 1_E \otimes b(u, x) = \int b(x + y) \rho_k(u, dy) \geq b(x) = 1_E \otimes b(u, x)$$

La fonction $1_E \otimes b$ possède évidemment toutes les propriétés de la fonction f du lemme 4, de sorte que, si T désigne le temps d'entrée de $\overline{\mathbb{P}}$ dans $E \times B_t$, on a

$$\overline{\mathbb{P}}_{(u,x)}([T < +\infty]) \leq t^{2\alpha}[1 - b(x)]$$

il existe alors x_0 tel que

$$\overline{\mathbb{P}}_{(u,x_0)}([T < +\infty]) < 1,$$

la chaîne irréductible $\overline{\mathbb{P}}$ n'est donc pas récurrente au sens de Harris.

Soit alors f telle que $0 < f \leq \overline{\mathbb{G}} f \leq 1$, d'après (6)

$$\overline{\mathbb{P}} f(u, x) \geq \int h_1(v, y) f(v, x + y) \nu(dv) \lambda(dy) = 1_E \otimes g(u, x) > 0,$$

la fonction $k_v(x) = \int h_1(v, y) f(v, x + y) \lambda(dy)$ est continue pour tout v et bornée par la fonction ν-intégrable $l(v) = \int h_1(v, y) \lambda(dy)$, g est donc continue, il résulte alors de l'inégalité

$$\overline{\mathbb{G}} 1_E \otimes g \leq \overline{\mathbb{G}}\overline{\mathbb{P}} f \leq \overline{\mathbb{G}} f \leq 1$$

que $\overline{\mathbb{P}}$ satisfait à $\mathscr{C}$.

*
* *

Nous allons maintenant ramener l'étude du cas général à l'application de la proposition 1, pour cela il sera nécessaire d'utiliser des chaînes semi-markoviennes obtenues à partir de $\mathbb{P}$ par itération et induction, la proposition suivante précise les liens entre ces diverses chaînes. On notera $p_n(u, v, x)$ (resp $q_n(u, v)$) une version mesurable de la densité de $P_n(u, dv, dx)$ (resp $Q_n(u, dv)$) par rapport à $m \otimes \lambda$ (resp m).

On désigne par $\mathbb{P}_J$ la chaîne obtenue par induction de $\mathbb{P}$ sur la partie

$J = D \times \mathbb{R}^d$, $D \in \mathscr{E}$, $m(D) > 0$; sous H_1 cette chaîne est markovienne, d'autre part

$$\mathbb{P}_J = I_J \sum_{n \geq 0} (\mathbb{P} I_{J^c})^n \mathbb{P} I_J$$

où I_J et I_{J^c} désignent les opérateurs de multiplication par 1_J et 1_{J^c}, ces opérateurs comme $\mathbb{P}$ commutent aux translations de $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}_J$ est donc semi-markovienne.

PROPOSITION 2. — *Soit $\mathbb{P}$ une chaîne semi-markovienne possédant les propriétés H_1 et H_2 alors il en est de même de $\mathbb{P}_J$ et, si Q est apériodique, de $\mathbb{P}^k$.*

Démonstration. — Soit t la période de Q, il résulte aisément de l'irréductibilité de Q et de la définition de la période que :

(8) si $A, B \in \mathscr{E}$, $m(A) . m(B) > 0$, il existe $A' \subset A$, $B' \subset B$, $m(A') . m(B') > 0$, n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$, tels que, pour tout $n \geq n_2$

$$\inf_{u \in A', v \in B'} q_{n_1 + tn}(u, v) = \varepsilon > 0$$

LEMME 6. — *Soit $u \in E$ et $B \in \mathscr{E}$, $m(B) > 0$, il existe n_0 et n'_0 tels que pour $n \geq n'_0$*

$$\int_{B \times \mathbb{R}^d} p_{n_0 + nt}(u, w, x) m(dw) \lambda(dx) > 0$$

Preuve du lemme. — D'après l'étalement de $\mathbb{P}$, il existe n_3 tel que : si $A = \left\{ v : \int p_{n_3}(u, v, x) \lambda(dx) > 0 \right\}$, on ait $m(A) > 0$, soit alors A', B', n_1, n_2, n tels qu'en (8)

$$P_{n_3 + n_1 + tn}(u, dw, dx) \geq \int_{(v,y) \in A' \times \mathbb{R}^d} p_{n_3}(u, v, y) q_{n_1 + tn}(v, w) \delta_y * \mu_{v,w}^{n_1 + tn}(dx) m(dv) \lambda(dy) m(dw)$$

d'après les propriétés classiques de la convolution ce dernier terme définit une mesure absolument continue sur $E \times \mathbb{R}^d$ et l'on a donc, en posant $n_0 = n_3 + n_1$, $n'_0 = n_2$ et pour $n \geq n'_0$ en utilisant (8)

$$p_{n_0 + tn}(u, w, x) m(dw) \lambda(dx) \geq \varepsilon \int_{(v,y) \in A' \times \mathbb{R}^d} p_{n_3}(u, v, y) \delta_y * \mu_{v,w}^{n_1 + tn}(dx) 1_{B'}(w) m(dv) \lambda(dy) m(dw),$$

intégrant en $x \in \mathbb{R}^d$, puis en $w \in \mathrm{B}'$, il vient :

$$\int_{\mathrm{B}' \times \mathbb{R}^d} p_{n_0+tn}(u, w, x) m(dw) \lambda(dx) \geq \varepsilon m(\mathrm{B}') \int_{\mathrm{A}'} m(dv) \int_{\mathbb{R}^d} p_{n_3}(u, v, y) \lambda(dy) > 0$$

par définition de A′.

Revenons aux assertions de la proposition.

Supposons Q apériodique, d'après (8) Q^k est irréductible et l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Q}^n = (\mathrm{I} + \mathrm{Q} + \ldots + \mathrm{Q}^{k-1}) \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{Q}^{kl}$$

montre qu'elle est nécessairement m-récurrente tandis que le lemme prouve que $\mathbb{P}^k$ est étalée.

La projection Q_J de $\mathbb{P}_\mathrm{J}$ sur E coïncide avec la chaîne induite par Q sur D, elle est donc récurrente au sens de Harris de mesure invariante $1_\mathrm{D} . m$ ([*6*] page 77); pour établir l'étalement de $\mathbb{P}_\mathrm{J}$ choisissons dans le lemme précédent $u \in \mathrm{D}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{D}$, on en conclut que la partie absolument continue de la mesure $\mathrm{P}_{n_0+tn}(u, \mathrm{J} \cap .)$ n'est pas nulle, et il suffit alors de remarquer que pour tout $\mathrm{L} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{B}$

$$\mathbb{P}_{n_0+tn}((u, 0), \mathrm{J} \cap \mathrm{L}) \leq \sum_{l=0}^{n_0+tn} \mathbb{P}_\mathrm{J}^l((u, 0), \mathrm{L}) . \qquad \square$$

Achevons la preuve du théorème.

Soient $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{t-1}$, F la décomposition en classes cycliques de E relativement à Q, $\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_i}$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{J}_i}$ les chaînes induites sur C_i et $\mathrm{J}_i = \mathrm{C}_i \times \mathbb{R}^d$ par Q et $\mathbb{P}$, si $\mathrm{L} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{B}$,

$$\mathbb{G}1_\mathrm{L} = \sum_{i=0}^{t-1} \mathbb{G}1_{\mathrm{J}_i \cap \mathrm{L}} + \mathbb{G}1_{(\mathrm{F} \times \mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}} ,$$

le principe du maximum ramène l'étude des premiers termes de la somme à celle des noyaux potentiels $\mathbb{G}_{\mathrm{J}_i}$ des $\mathbb{P}_{\mathrm{J}_i}$; selon les hypothèses faites sur $\mathbb{P}$, ces chaînes possèdent les propriétés H_0 et H_2 ou H_1 et H_2 (proposition 2), de plus les projections $\mathrm{Q}_{\mathrm{C}_i}$ des $\mathbb{P}_{\mathrm{J}_i}$ sont apériodiques. Cette remarque va nous permettre dans ce qui suit de nous ramener au cas où Q est apériodique.

Preuve de I. — Sous l'hypothèse H_0, il existe k et ρ, $0 < \rho < 1$, tels que, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathrm{E}} \mathrm{Q}_{kn}(x, \mathrm{F}) \leq \rho^n$$

et

$$\mathbb{G}1_{(F\times\mathbb{R}^d)\cap L} \le \sum_n Q_n 1_F \le \frac{k}{1-\rho},$$

de sorte que l'on est ramené à établir I pour les chaînes $\mathbb{P}_{J_i}$, c'est-à-dire en supposant en plus de H_0 et H_2 l'apériodicité de Q.

Soit alors $D \in \mathscr{E}$, $m(D) > 0$, n_0 et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout u, $v \in D$,

$$q_{n_0}(u, v) \ge \varepsilon,$$

si $w \in E$ et $n \in \mathbb{N}$

$$q_{n+n_0}(w, v) \ge \int_D Q_n(w, du) q_{n_0}(u, v) \ge \varepsilon Q_n(w, D) 1_D(v)$$

Q étant quasi-compact et apériodique les probabilités $Q_n(w, \cdot)$ convergent uniformément vers m, de sorte qu'il existe un entier n_1 tel que, pour tout $w \in E$,

$$q_{n_1+n_0}(w, v) \ge \varepsilon \frac{m(D)}{2} 1_D(v).$$

Considérons la chaîne $Q' = Q_{n_1+n_0}$, elle satisfait à H'_0 avec $v = m$; d'après la proposition 2, $\mathbb{P}' = \mathbb{P}^{n_1+n_0}$ est étalée, plus précisément le lemme 6 montre que, pour tout $u \in E$, la fonction

$$v \to \lim_{t\to+\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} l \int_{B_t} p'_l(u, v, x)\lambda(dx)$$

n'est pas m-négligeable sur D, il existe donc l et t tels que

$$m \otimes m\left(\left\{ (u, v) : u, v \in D \int_{B_t} p'_l(u, v, x)\lambda(dx) > 0 \right\}\right) > 0 ;$$

la chaîne $\mathbb{P}'^l$ satisfait aux hypothèses de la proposition 1, ceci établit I, compte tenu de (4).

Preuve de II. — Nous montrerons d'abord que $\mathbb{G}$ est propre.

Pour cela, commençons par remarquer que, puisque F est transitoire, il existe une fonction f mesurable positive sur E telle que

$$1_F \le Uf = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n f \le 1,$$

alors, si $g = \sum_{k \geq 0}^{\infty} \frac{1}{2^k} Q_k f$, g est strictement positive sur F et

$$Ug = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} UQ_k f \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} Uf = 2Uf < +\infty$$

la restriction de U à F est donc propre et il en est de même de la restriction de $\mathbb{G}$ à $F \times \mathbb{R}^d$. Il suffit dès lors de prouver que les noyaux $\mathbb{G}_{J_i}$ sont propres, soit d'établir cette propriété sous H_1, H_2 et en supposant Q apériodique.

Soit $D \in \mathscr{E}$, $m(D) > 0$, n_0 et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $u, v \in D$, $q_{n_0}(u, v) \geq \varepsilon$.

La proposition 2 montre que la chaîne $\mathbb{P}'_J$ induite par $\mathbb{P}' = \mathbb{P}^{n_0}$ sur $J = D \times \mathbb{R}^d$ satisfait aux hypothèses de I, il existe donc f, $f > 0$ sur J, $f = 0$ sur J^c telle que $\mathbb{G}'_J f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}'^n_J f \leq 1$ sur J, d'après le principe du maximum $\mathbb{G}' f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}'^n f \leq 1$ partout, posons alors $g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{P}'^n f$, on a $G'g \leq 1$ et puisque J est récurrent $g > 0$ partout.

On achève la preuve de II en faisant usage du

LEMME 7. — *Soit $\mathbb{P}$ une chaîne semi-markovienne étalée, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) le noyau potentiel $\mathbb{G}$ de $\mathbb{P}$ est propre,

ii) $\mathbb{G}$ satisfait à la conclusion de II.

Démonstration. — Il est clair que *ii)* implique *i)*.

Prouvons que *i)* entraîne *ii)*. Soit f telle que $0 < f \leq \mathbb{G}f \leq 1$ posons

$$g(u, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int p_n(u, v, y) f(v, x + y) m(dv) \lambda(dy),$$

à cause de l'étalement et de $f > 0$, on a $g > 0$, d'autre part

$$\mathbb{G}g \leq \mathbb{G}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{P}^n f\right) \leq 1$$

Pour tout u, $v \in E$, la fonction $k^n_{u,v}(x) = \int p_n(u, v, y) f(v, x + y) \lambda(dy)$ est la convolution d'une fonction λ-intégrable par une fonction bornée, elle est donc continue et bornée par $\int p_n(u, v, y)\lambda(dy)$; cette dernière fonction étant $m(dv)$ intégrable, $g_u^n(x) = \int p_n(u, v, y)f(v, x + y)m(dv)\lambda(dy)$ est, elle aussi, continue et bornée par 1 ; la convergence uniforme de la série permet alors de conclure à la continuité de $g(u, \cdot)$.

Soit K_0 un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^d$, posons

$$A_r = \left\{ u : g(u, \cdot) \geq \frac{1}{r} 1_{K_0}(\cdot) \right\}$$

alors

$$E = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r \qquad \text{et} \qquad \mathbb{G}1_{A_r \times K_0} \leq r\mathbb{G}g \leq r ,$$

puisque l'on a aussi, pour $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{G}1_{A_r \times (K_0 + z)} \leq r$, *ii)* en découle par un argument de recouvrement fini.

*
* *

Établissons le corollaire.

On définit une action de F sur $M = G/H$ par la formule

$$f \in F, \qquad kH \in M, \qquad f \,.\, kH = kfH$$

ceci a un sens car, si $kH = k'H$, il existe $h \in H$ tel que $k' = kh$ et H étant distingué dans F, on a

$$f \,.\, (k'H) = k'fH = khfH = kf(f^{-1}hf)H = kfH = f \,.\, kH ,$$

notons qu'il s'agit en fait d'une action de F/H sur M qui commute avec l'action naturelle de G sur M, puisque

$$f \,.\, (gkH) = gkfH = g(f \,.\, kH)$$

Soient $\mathbb{P}$ et Q les m. a. de loi p sur $M = G/H$ et G/F, elles s'écrivent

$$\mathbb{P}\phi(z) = \int \phi(gz)p(dg) , \qquad Q\psi(u) = \int \psi(gu)p(dg)$$

Q est soumise au théorème de dichotomie de [*3*] de sorte que, soit le potentiel de tout compact de G/F est borné auquel cas il en est de même des compacts de M pour le potentiel de $\mathbb{P}$, soit Q est récurrente au sens de

Harris par rapport à une mesure G-invariante sur G/F. Dans la seconde éventualité soit E une section mesurable de G/F, M s'identifie mesurablement à $E \times \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{P}$ à une chaîne semi-markovienne étalée sur $E \times \mathbb{R}^d$, le résultat établi ici montre qu'il existe une fonction f mesurable sur M, $0 < f \leq 1$ telle que $\mathbb{G}f \leq 1$; soit n_0 un entier tel que la partie absolument continue $p_{n_0}^c$ de p^{*n_0} soit non nulle, la fonction continue $f_1(z) = \int f(gz)p_{n_0}^c(dg)$ satisfait à $0 < f_1 \leq 1$ et $\mathbb{G}f_1 \leq 1$, il en résulte que le potentiel de tout compact de M est borné.

* * *

Terminons en justifiant brièvement les affirmations de la remarque.

Si la mesure m possède une propriété de régularité par rapport à une classe compacte de $\mathscr{E}$, il existe une chaîne de Harris $\check{Q}$ en dualité avec Q relativement à m [6], il est alors facile de vérifier que la chaîne semi-markovienne $\check{\mathbb{P}}$ définie par

$$\check{P}(u, dv, dx) = \check{Q}(u, dv)\check{\mu}_{v,u}(dx)$$

est étalée et en dualité avec la chaîne $\mathbb{P}$ relativement à la mesure $m \otimes \lambda$ sur $E \times \mathbb{R}^d$. D'après le théorème, $\check{\mathbb{P}}$ est transitoire, $\mathbb{P}$ est donc dissipative. □

Désignons par G le groupe obtenu en munissant $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$ du produit

$$(a, b)(a', b') = (aa', b + ab'),$$

soit μ une probabilité sur G étalée, à support compact et telle que

$$\int \log a\mu(da, db) = 0$$

La m. a. droite de loi μ sur G, $Z_n = (U_n, X_n)$ est définie par le noyau semi-markovien sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P}f(a, b) = \int f(aa', b + ab')\mu(da', db')$$

Soit (τ_n) la suite des temps d'arrêt définis par $\tau_0 = 0 \ldots$

$$\tau_k = \inf \{ n : n > \tau_{k-1}, U_n < U_{\tau_{k-1}} \},$$

on montre [*1*] que $(X_{\tau_n})_n$ converge $\mathbb{P}_{(1,0)}$ p. s. vers une v. a. X ; on en déduit que, si $t > 0$ est tel que

$$\mathbb{P}_{(1,0)}[X \in B_t] > 0\,,$$

$$+\infty = E_{(1,0)}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{B_t}(X_{\tau_n})\right] \leq E_{(1,0)}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{B_t}(X_n)\right] = \mathbb{G}1_{\mathbb{R}_+^* \times B_t}(1,0)$$

en utilisant alors l'invariance à droite de $\mathbb{G}$ par l'action de G on prouve l'existence d'un voisinage V de (1, 0) et d'un $s > t$ tel que pour tout $(u, x) \in V$

$$\mathbb{G}1_{\mathbb{R}_+^* \times B_s}(u, x) = +\infty\,. \qquad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] L. ELIE, Étude du renouvellement sur le groupe affine de la droite réelle. *Thèse*.

[*2*] H. HENNION, Marches aléatoires sur les espaces homogènes des groupes nilpotents à génération finie. *Zeit f. Wahr*, t. **34**, 1976, p. 245-267.

[*3*] H. HENNION et B. ROYNETTE, Un théorème de dichotomie pour les marches aléatoires sur un espace homogène. *Astérisque*, t. **74**, 1980.

[*4*] Y. GUIVARC'H, Mouvement brownien sur les revêtements abéliens d'une variété compacte. *C. R. A. S.*

[*5*] J. JACOD, Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **VII**, n° 2, 1971, p. 83-129.

[*6*] D. REVUZ, *Markov Chains*, North-Holland.

[*7*] B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$. *Zeit. f. Wahr.*, t. **31**, 1974, p. 25-33.

[*8*] B. ROYNETTE et M. SUEUR, Marches aléatoires sur un groupe nilpotent. *Zeit. f. Wahr*, t. **30**, 1974, p. 129-138.

(Manuscrit reçu le 8 janvier 1982)