

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ANESTIS ANTONIADIS

## **Sur certains problèmes d'estimation et de test concernant la moyenne d'un processus gaussien**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 18, n° 3 (1982), p. 223-236

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1982\\_\\_18\\_3\\_223\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_3_223_0)

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur certains problèmes d'estimation et de test concernant la moyenne d'un processus gaussien

par

**Anestis ANTONIADIS**

Institut de Recherche en Mathématiques Avancées,  
Université Scientifique et Médicale de Grenoble,  
B. P. 53 X, 38041 Grenoble Cedex

---

**RÉSUMÉ.** — Le but de cet article est d'étudier certains problèmes d'estimation et de tests concernant la moyenne dans des modèles linéaires gaussiens de dimension infinie. Notre approche est basée sur les développements récents de la théorie des structures statistiques infinidimensionnelles et sur les résultats concernant les probabilités gaussiennes sur un espace de Banach.

Les deux principaux résultats que nous obtenons sont d'abord une extension en dimension infinie de la théorie des tests d'hypothèses linéaires de dimension finie ; ensuite une méthode d'estimation de la dimension de certains espaces gaussiens.

**ABSTRACT.** — In this paper we are concerned with some problems of estimation and tests on the mean in infinite dimensional gaussian linear models. Our approach is based on recent developments of the theory of infinite dimensional statistical spaces and on the use of techniques from the theory of gaussian measures on Banach spaces.

More precisely, if  $\mu$  is the mean function of a gaussian process whose sample paths fall in some Banach space  $B$ , we obtain tests of the linear hypothesis  $\mu \in H_n$  against  $\mu \in H_n$ , where the  $H_n$  are  $n$  dimensional subspaces of  $B$ .

Futhermore an estimation procedure of the dimension  $n$  is proposed and it's asymptotic properties are studied.

## 1. INTRODUCTION

Tandis que la théorie statistique de l'estimation des paramètres et des tests quadratiques dans les modèles linéaires gaussiens est très avancée en dimension finie, en dimension infinie plusieurs problèmes demeurent sans solution. Néanmoins certains résultats de J. L. Soler [8] nous ont permis d'envisager la construction de tests d'hypothèses linéaires concernant la moyenne d'un processus gaussien au vu d'une trajectoire de celui-ci.

Plus précisément on dispose d'une observation  $x = (x(t))_{t \in T}$  d'une fonction aléatoire réelle  $(X(t))_{t \in T}$  de la forme

$$X = \{ X(t) = X_0(t) + m(t) ; t \in T \}$$

où  $T$  est un ensemble, et  $(X_0(t))_{t \in T}$  une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée et de variance  $Q$  connue sur  $T \times T$ . La structure statistique associée à cette observation est

$$\left( \mathbb{R}^T, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{ N_{\mathbb{R}^T}(m, Q) ; m \in \Theta \subset \mathcal{H}(Q) \} \right).$$

L'ensemble  $\Theta$  traduit une hypothèse *a priori* sur la moyenne inconnue  $m$ , l'hypothèse  $\Theta \subset \mathcal{H}(Q)$  rendant la structure dominée. Sous ces conditions nous obtenons des tests d'hypothèses linéaires concernant  $m$ , c'est-à-dire des tests de l'hypothèse «  $m \in V$  » contre «  $m \notin V$  » pour certains sous-espaces  $V$  de  $\Theta$ .

Dans le cas où  $T$  est un ensemble fini (cf. par exemple [1]) le test fait intervenir une forme quadratique de l'estimateur  $x_V$  de la moyenne inconnue  $m_V$ , projection orthogonale de  $x$  (resp.  $m$ ) sur le sous-espace vectoriel  $V$  de  $\Theta$ .

Lorsque  $T$  est infini, l'espace autoreproduisant  $\mathcal{H}(Q)$  de la loi de  $X_0$  est de probabilité nulle dès qu'il est de dimension infinie et donc l'observation  $x$  ne saurait être projetée sur un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}(Q)$ . Néanmoins en conservant l'idée de « projection » nous proposons une solution satisfaisante du problème, solution qui nous permet en outre de faire le lien avec les résultats existants sur l'estimation de  $m$  obtenus par E. Parzen [6] et Ju. A. Rozanov [7].

Le test proposé est optimal lorsque la dimension du sous-espace  $V$  est connue. Nous définissons donc un estimateur de cette dimension.

Les hypothèses utilisées reposent sur la théorie des probabilités dans les espaces de Banach, c'est pourquoi le § 2 sera consacré à l'introduction

des notations et au rappel des résultats que nous utiliserons. Après les § 3 et § 4 sur l'étude de l'estimation et des tests sur la moyenne, nous consacrons le § 5 à l'estimation des dimensions.

## 2. NOTATIONS. PRÉLIMINAIRES

Le but de ce paragraphe est de fixer les notations et d'énoncer les résultats nécessaires pour la suite. A moins que le contraire ne soit explicitement mentionné nous supposons toujours qu'un espace probabilisé complet  $(\Omega, \mathcal{A}, P_*)$  est donné et tous les éléments aléatoires considérés seront implicitement définis sur cet espace probabilisé.

Si  $B$  est un espace de Banach réel séparable, nous noterons  $\| \cdot \|$  sa norme,  $B^*$  son dual topologique et  $(\cdot, \cdot)$  la forme bilinéaire canonique mettant ces deux espaces en dualité séparante. L'espace  $B$  sera muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}$  et la topologie de  $B^*$  sera celle de la convergence uniforme sur les compacts de  $B$ . Nous parlerons de  $\pi$  projecteur dans  $B$  pour dire que  $\pi$  est un opérateur linéaire continu sur  $B$  vérifiant  $\pi^2 = \pi$ .

Nous dirons que  $P_0$  est la mesure de probabilité gaussienne sur  $B$ , centrée et de variance la forme quadratique définie positive  $Q$  sur  $B^*$ , si pour tout  $y$  de  $B^*$  les variables aléatoires réelles

$$(\cdot, y) : x \mapsto (x, y)$$

définies sur  $(B, \mathcal{B}, P_0)$  sont gaussiennes centrées de variance  $Q(y)$  et telles que

$$\int_B (x, y)(x, y') dP_0(x) = K(y, y')$$

où  $K$  est le noyau symétrique de type positif relié à  $Q$ . Enfin un élément aléatoire  $X$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P_*)$  à valeur dans  $B$  sera dit gaussien si sa loi de probabilité est une mesure gaussienne sur  $(B, \mathcal{B})$ .

Le caractère gaussien de  $P_0$  permet de définir l'application linéaire  $I$  de  $B^*$  dans  $L^2(B, \mathcal{B}, P_0)$  telle que pour tout  $y$  de  $B^*$ ,  $I(y)$  soit la classe de  $P_0$ -équivalence associée à la variable aléatoire  $(\cdot, y)$  définie sur  $(B, \mathcal{B}, P_0)$ . L'adhérence de  $I(B^*)$  dans  $L^2(B, \mathcal{B}, P_0)$  sera notée  $H$  et n'est autre que l'espace gaussien associé à la f. a. r. linéaire  $(I(y))_{y \in B^*}$  ([2]).

La formule

$$(I^*(f), y) = \langle f, I(y) \rangle_{L^2}, \quad f \in L^2(B, \mathcal{B}, P_0), y \in B^*$$

définit l'opérateur adjoint  $I^*$  de  $I$  qui est une application linéaire continue de  $L^2(B, \mathcal{B}, P_0)$  dans  $B$ .

On notera  $\mathcal{H}(Q)$  l'espace  $I^*(H)$  et on désignera par  $\psi$  l'application de  $H$  dans  $\mathcal{H}(Q)$ , restriction de  $I^*$  à  $H$ .

$\mathcal{H}(Q)$  est un espace de Hilbert réel séparable mis en correspondance bijective avec  $H$  par  $\psi$  dont la fermeture dans  $B$  est le support de  $P_0$  ([2]). C'est l'espace autoreproduisant de  $P_0$ . Sans perdre de généralité nous supposons dans la suite que le support de  $P_0$  est l'espace  $B$  tout entier.

Nous désignerons enfin par  $J$  l'injection canonique continue de  $\mathcal{H}(Q)$  dans  $B$  et  $J^*$  sa transposée. En identifiant  $\mathcal{H}(Q)$  et son dual  $\mathcal{H}^*(Q)$  les applications introduites se résument sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 B^* & & & & \\
 \downarrow I & \searrow J^* & & & \\
 H & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{H}(Q) & \xrightarrow{J} & B \\
 \uparrow I^* & & & & \\
 L^2(B, \mathcal{B}, P_0) & & & & 
 \end{array}$$

$J^*(B^*)$  étant dense dans  $\mathcal{H}^*(Q) \equiv \mathcal{H}(Q)$  il existe un sous-ensemble  $\{e_j^* ; j \geq 1\}$  de  $B^*$  tel que  $\{J^*(e_j^*) ; j \geq 1\}$  soit une base orthonormée de  $\mathcal{H}(Q)$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$  nous définissons le projecteur  $\pi_n$  de rang fini de  $B$  par

$$\pi_n(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j^*) J^*(e_j^*)$$

( $\pi_n$  n'est rien d'autre que le prolongement à  $B$  du projecteur orthogonal  $Q_n$  de  $\mathcal{H}(Q)$  sur le sous-espace  $H_n$  engendré par  $\{J^*(e_j^*) ; 1 \leq j \leq n\}$ ). Il est bien connu par ailleurs (voir [2]) que pour  $P_0$  presque tout  $x$   $\pi_n(x)$  converge vers  $x$  quand  $n \rightarrow \infty$  (au sens de la norme de  $B$ ).

L'espace vectoriel engendré par  $\{J^*(e_j^*) = e_j ; 1 \leq j \leq n\}$  sera noté  $H_n$  dans la suite.

Enfin,  $\sigma$  désignera la norme du plongement canonique de  $\mathcal{H}(Q)$  dans  $B$ .

### 3. ESTIMATION. TESTS QUADRATIQUES

On supposera donnée dans tout ce paragraphe une structure statistique gaussienne décrite avec les notations du paragraphe précédent par :

$$(B, \mathcal{B}, \{P_m; m \in \mathcal{H}(Q)\})$$

où  $P_m$  désigne la mesure gaussienne sur  $B$ , image de  $P_0$  par l'application linéaire  $x \rightarrow x + m$  et où  $\mathcal{H}(Q)$  est l'espace autoreproduisant de  $P_0$ .

On étudiera successivement l'estimation sans biais du paramètre  $m$  et certains tests quadratiques d'hypothèses linéaires sur  $m$ .

On a, avec les notations précédentes,

**PROPOSITION 3.1.** — Soit  $\Sigma = (B, \mathcal{B}, \{P_m; m \in H_n \subset \mathcal{H}(Q)\})$  une structure statistique gaussienne. Soit  $\pi_n$  le projecteur orthogonal de  $B$  sur  $H_n$ . Alors la statistique

$$x \rightarrow \pi_n(x)$$

est exhaustive, de maximum de vraisemblance et définit un estimateur linéaire sans biais de  $m$  de variance minimum.

*Preuve.* — L'espace  $H_n$  est un élément de la famille des sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $\mathcal{H}(Q)$ , de dimension  $n$ . En prenant

$$\pi_n(\cdot) = \sum_{i=1}^n (\cdot, e_i^*) e_i$$

le projecteur de  $B$  sur  $H_n$ , où  $(e_i, i = 1, \dots, n)$  est une base de  $H_n$ , la statistique linéaire  $x \rightarrow \pi_n(x)$  est à valeurs dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  et la structure image est une structure gaussienne

$$\{ \mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, (\pi_n(P_m); m \in H_n) \}$$

où  $\pi_n(P_m)$  désigne la loi de probabilité image de  $P_m$  par  $\pi_n$ ; cette dernière est une loi gaussienne sur  $\mathbb{R}^n$  de moyenne  $m$  et de variance connue  $\pi_n \circ Q \circ {}^t \pi_n$ . On se ramène donc à l'étude d'un problème dans une structure gaussienne classique de dimension finie et le résultat de la proposition est immédiat. ■

**REMARQUE 3.2.** — Nous avons considéré dans cette proposition des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{H}(Q)$  contenus dans  $J^*(B^*)$ . Au cas où  $H_n$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n$  de  $\mathcal{H}(Q)$  quelconque, ayant pour

base  $(v_i; i = 1, \dots, n)$ , chacun des éléments de  $H$ ,  $\psi^{-1}(v_i)$  définit une variable aléatoire réelle linéaire sur  $B$ , c'est-à-dire une fonctionnelle  $B$  mesurable définie et linéaire sur un sous-espace vectoriel  $B_i$  de  $B$  de probabilité égale à 1 (cf. par exemple [8] ou [7]). Le choix d'une détermination de

$\sum_{i=1}^n v_i \psi^{-1}(v_i)$  conduit à un estimateur linéaire sans biais de  $m$  de variance minimum, estimateur défini sur  $\bigcap_{i=1}^n B_i$  à valeurs dans  $H_n$ .

C'est la méthode d'estimation proposée par Ju. A. Rozanov dans [7] ainsi que par E. Parzen dans [6]. Cette méthode suppose donc une caractérisation de  $\bigcap_{i=1}^n B_i$ .

térisation de  $\bigcap_{i=1}^n B_i$ .

Le choix de sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{H}(Q)$  contenus dans  $J^*(B^*)$  évite ce problème et permet le calcul immédiat de l'estimation au vu de l'observation. ■

La proposition précédente conduit finalement à une extension simple en dimension infinie des tests d'hypothèses linéaires classiques ; en particulier.

**THÉORÈME 3.3.** — Soient  $T$  un espace métrique compact et  $(X_t)_{t \in T}$  une fonction aléatoire réelle gaussienne presque sûrement à trajectoires continues sur  $T$  de moyenne  $m$ , de fonction de covariance  $K$  continue sur  $T \times T$  et telle que  $m \in \mathcal{H}(K)$ . Avec les notations précédentes, pour tout réel  $\alpha$  de  $[0, 1]$ , il existe au moins un test déterministe de l'hypothèse linéaire «  $m \in H_n$  » contre «  $m \notin H_n$  », sans biais, de seuil  $\alpha$ . Ce test est de la forme :

$$x \in C(T) \quad \varphi_{\mu, l_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } [q_\mu(I - \pi_n)(x)]^{1/2} > l_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $q_\mu(x) = \int_T x^2(t) d\mu(t)$  et  $\mu \in M^+(T)$  cône des mesures boréliennes positives sur  $T$ .

En effet ici  $B = C(T)$  et  $(X_t)_{t \in T}$  peut être considérée comme un élément aléatoire gaussien à valeurs dans  $B$ . La structure correspondante au problème de test est alors :

$$(B, \mathcal{B}, \{P_m; m \in \mathcal{H}(K) \subset B\})$$

et le test de l'hypothèse «  $m \in H_n$  » contre «  $m \notin H_n$  » équivaut au test «  $\pi_n(m) = 0$  » contre «  $\pi_n(m) \neq 0$  ». On peut alors utiliser un test quadratique de seuil  $\alpha$  proposé dans [8].

4. EXEMPLE

Soit  $B = C([0, 1])$  l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur  $[0, 1]$  (pour la norme sup). Le dual topologique  $B^*$  de  $B$  est l'espace  $M([0, 1])$  des mesures boréliennes bornées sur  $[0, 1]$ .

La mesure de probabilité gaussienne centrée  $P_0$  de covariance  $K$  définie par

$$K(\mu, \nu) = \int_0^1 \int_0^1 \min(s, t) d\mu(s) d\nu(t); \quad \mu, \nu \in M([0, 1])$$

est la mesure de Wiener sur  $C([0, 1])$ .

Un calcul élémentaire donne le résultat suivant pour l'opérateur  $J^*$  du paragraphe 2 :

$$(4.1) \quad \mu \in M([0, 1]) \quad J^*(\mu)(x) = \int_0^x \mu([t, 1]) dt$$

Rappelons également que l'espace de Hilbert autoreproduisant  $\mathcal{H}(K)$  associé à la mesure de Wiener sur  $C([0, 1])$  est l'espace des fonctions de la forme

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt \quad \text{où} \quad g \in L^2([0, 1], dt),$$

muni du produit scalaire

$$(4.2) \quad \langle f, h \rangle_{\mathcal{H}(K)} = \int_0^1 f'(t) h'(t) dt.$$

Soit  $H_n$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à  $n$  définis sur  $[0, 1]$ . Nous remarquerons que  $H_n \subset J^*(M([0, 1]))$ . En effet si  $f_p$  définit la fonction

$$f_p(u) = u^p$$

alors  $f_p(u) = \int_0^u g_p(t) dt$  avec  $g_p(t) = pt^{p-1}$ .

En prenant alors

$$\mu_{p+1} = (p + 1)\delta_1 - (p + 1)\mu_{g_p} \quad \text{avec} \quad g_0 \equiv 0$$

où  $\delta_1$  est la mesure de Dirac au point 1 et  $\mu_{g_p}$  la mesure sur  $\mathcal{B}([0, 1])$  admettant  $g_p$  pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue, nous avons pour tout  $p \geq 0$

$$(4.3) \quad \mu_{p+1}([t, 1]) = (p + 1)t^p \quad \text{et} \quad J_{\mu_{p+1}}^*(x) = f_{p+1}(x)$$

Vu ces diverses correspondances, construire une base de  $H_n$  revient à déterminer des polynômes orthonormés dans  $L^2([0, 1], dt)$  d'où

PROPOSITION 4.1. — Soit la structure statistique de Wiener

$$(C([0, 1]), B(C([0, 1])), \{N(m, Q_K); m \in \mathcal{H}(K)\})$$

et soit  $H_n$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}(K)$  constitué des polynômes de degré au plus égal à  $n$  et admettant zéro pour racine. Alors la statistique  $\pi_n$  de  $C([0, 1])$  dans  $H_n$  est définie par :

$$x \mapsto \pi_n(x) \quad \text{où} \quad \pi_n(x)(t) = \sum_{i=1}^n h_i^{[n]}(x)t^i, \quad t \in [0, 1]$$

avec pour tout  $x$  de  $C([0, 1])$

$$h_i^{[n]}(x) = x(1)p_i(1) - \int_0^1 x(t)p_i'(t)dt$$

où

$$p_i(t) = \frac{(-1)^{i-1}n(n+i-1)!}{(i)^2[(i-1)!]^2(n-i)!} {}_3F_2(-n+1, n+1, i; i+1, 1; t)$$

Les fonctions hypergéométriques  ${}_pF_q$  sont données par

$${}_pF_q(s_1, s_2, \dots, s_p; t_1, \dots, t_q; u) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s_1)_r \dots (s_p)_r}{(t_1)_r \dots (t_q)_r} \frac{u^r}{r!}$$

où

$$(s)_r = s(s+1) \dots (s+r-1) \quad \text{et} \quad (s)_0 \equiv 1.$$

La démonstration de cette proposition est donnée en annexe, ainsi que quelques valeurs particulières des coefficients  $h_i^{[n]}(x)$ .

## 5. ESTIMATION DE LA DIMENSION

La méthode d'estimation et de test de la moyenne dans les paragraphes précédents repose sur une seule observation et est optimale lorsque la dimension  $n$  de  $H_n$  est supposée connue. Nous nous proposons ici, au vu d'un échantillon dans la structure statistique

$$\Sigma = (B, \mathcal{B}, \{P_m; m \in J^*(B^*) \subset \mathcal{H}(Q)\})$$

d'estimer l'indice de la dernière composante non nulle de la moyenne  $m$  sur la base  $(e_i)_{i \geq 1}$  de  $\mathcal{H}(Q)$  avec l'éventualité d'une détermination infinie au cas où  $m$  n'appartiendrait à aucun des sous-espaces vectoriels  $H_n$ .

Nous noterons  $S$  la boule unité fermée de  $\mathcal{H}(Q)$  :

$$S = \{ x \in \mathcal{H}(Q) ; \|x\|_{\mathcal{H}(Q)} \leq 1 \}$$

et  $\sigma$  la norme du plongement canonique  $J$  de  $\mathcal{H}(Q)$  dans  $B$ . Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat de J. Kuelbs que nous utiliserons, non pas sous sa forme générale ([4]) mais sous une forme adaptée à l'utilisation que nous allons en faire :

LEMME 5.1. — Soit  $B$  un espace de Banach séparable. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments aléatoires indépendants définis sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P_r)$  à valeurs dans  $B$ , de loi gaussienne centrée  $P$  de covariance  $Q$ . Alors la suite  $(\xi_n)_{n \geq 3}$  d'éléments aléatoires définis par :

$$\xi_n = (2n \log \log n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i$$

est telle que

$$P_r(\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\xi_n, S) = 0) = 1.$$

Pour tout  $\delta$  réel strictement positif et pour tout  $x$  de  $B$  nous notons

$$(5.1) \quad i(x, \delta) = \min \{ j \mid \|x - \pi_j(x)\| < \delta \}$$

les opérateurs  $\pi_j$  étant les projecteurs sur  $H_j$ . Comme nous l'avons rappelé dans les préliminaires  $\pi_j(x)$  tend  $P$  presque sûrement vers  $x$  et donc  $i(x, \delta)$  est  $P$ -presque sûrement fini quel que soit  $\delta$ .

En utilisant les mêmes notations que dans le lemme 5.1 nous obtenons

THÉORÈME 5.2. — Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments aléatoires indépendants de même loi  $P_m$  dans la structure statistique  $\Sigma$ . Il existe une constante positive  $M$ , telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , si on pose pour  $n \geq 3$

$$\delta_n = \left( \frac{2 \log \log n}{n} \right)^{1/2} \sigma(1 + \varepsilon)M$$

on a

i) si  $m \in H_N \setminus H_{N-1}$ ,  $i(\bar{X}_n, \delta_n)$  est un estimateur de  $N$ ,  $P_r$ -presque sûrement convergent

ii) si  $m \in J^*(B^*) \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ ,  $P_r(\lim_{n \rightarrow +\infty} i(\bar{X}_n, \delta_n) = \infty) = 1$  où  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Démonstration. — Avant de commencer la démonstration nous remarquons (voir Remarque 5.3) qu'il est possible, quitte à modifier l'espace  $B$ . de supposer que la suite des projecteurs  $(\pi_n)_{n \geq 1}$  est uniformément bornée par une constante  $c$ . Nous étudierons séparément les cas (i) et (ii).

CAS (i) :  $m \in H_N \setminus H_{N-1}$ . Cette condition équivaut à

$$\pi_N(m) = m \quad \text{et} \quad \pi_{N-1}(m) \neq m.$$

Pour  $n \geq 3$  nous avons

$$\begin{aligned} \|\bar{X}_n - m\| &= \left( \frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)}{(2n \log \log n)^{1/2}} \right\| \\ &\leq \left( \frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ d \left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)}{(2n \log \log n)^{1/2}}, S \right) + \sup_{y \in S} (\|y\|) \right\} \end{aligned}$$

Or  $\sup_{y \in S} (\|y\|) = \sigma$  norme du plongement canonique de  $\mathcal{H}(Q)$  dans B.  
D'où :

$$(5.2) \quad \|\bar{X}_n - m\| \leq \left( \frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (d(\xi_n, S) + \sigma)$$

où

$$\xi_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m)}{(2n \log \log n)^{1/2}}.$$

Considérons maintenant

$$\|\bar{X}_n - \pi_N(\bar{X}_n)\| \leq \|\bar{X}_n - m\| + \|\pi_N(m) - \pi_N(\bar{X}_n)\|$$

Les projecteurs  $\pi_N$  étant uniformément bornés par  $c$  nous avons :

$$\|\bar{X}_n - \pi_N(\bar{X}_n)\| \leq (c + 1) \|\bar{X}_n - m\|$$

En réunissant (5.2) et (5.3) nous obtenons finalement, avec  $M = c + 1$  ;

$$(5.4) \quad \|\bar{X}_n - \pi_N(\bar{X}_n)\| \leq M \left( \frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \{ d(\xi_n, S) + \sigma \}$$

La suite  $(\xi_n)_{n \geq 3}$  satisfait aux conditions du lemme 5.1. Par conséquent il existe  $A \in \mathcal{A}$  avec  $P_r(A) = 1$  tel que, pour tout  $\omega \in A$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $n(\varepsilon, \omega) \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $n \geq n(\varepsilon, \omega)$  on ait  $d(\xi_n(\omega), S) < \varepsilon \sigma$ . L'expression (5.4) devient alors

$$\|\bar{X}_n(\omega) - \pi_N \bar{X}_n(\omega)\| < M \left( \frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon) \sigma$$

Posons  $\delta_n = M \left( \frac{2 \log \log n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon) \sigma$ .

Nous avons alors pour tout  $n \geq n(\varepsilon, \omega)$  d'après (5.1)

$$i(\bar{X}_n(\omega), \delta_n) \leq N$$

et par conséquent

$$(5.5) \quad P_r(\limsup i(\bar{X}_n, \delta_n) \leq N) = 1.$$

Notons  $F = \{ \omega \in \Omega ; \liminf i(\bar{X}_n(\omega), \delta_n) < N \}$  et soit  $\omega$  un élément de  $F$ . Nous avons alors :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $k(\omega) \geq n$  tel que  $i(\bar{X}_k(\omega), \delta_k) < N$ .

Mais alors  $d(\bar{X}_k(\omega), H_{N-1}) < \delta_k$  car les sous-espaces  $H_i$  sont emboîtés.

Or  $d(\bar{X}_k(\omega), H_{N-1}) = d(\bar{X}_k(\omega) - m, H_{N-1} - m)$  et donc

$$d(m, H_{N-1}) \leq d(\bar{X}_k(\omega), m) + \delta_k$$

et

$$(5.6) \quad \left( \frac{k}{2 \log \log k} \right)^{\frac{1}{2}} d(m, H_{N-1}) \leq \|\xi_k(\omega)\| + \sigma(1 + \varepsilon)M$$

Mais comme  $m \in H_N$  on a pour tout  $h$  de  $H_{N-1}$

$$(m, e'_N) e'_N = (\pi_N - \pi_{N-1})(m - h)$$

et donc  $d(m, H_{N-1}) \geq \frac{|(m, e'_N)| \|e'_N\|}{2c}$ .

Finalement nous obtenons en reportant dans (5.6)

$$\|\xi_k(\omega)\| \geq \frac{\|e'_N\|}{2c} \left( \frac{k}{2 \log \log k} \right)^{\frac{1}{2}} |(m, e'_N) - \sigma(1 + \varepsilon)M|$$

d'où pour tout  $\omega$  de  $F$

$$\limsup \|\xi_k(\omega)\| = + \infty$$

D'après le lemme 5.1 nous avons  $P_r(F) = 0$  et donc

$$P_r(\lim (i(\bar{X}_n, \delta_n) = N) = 1.$$

CAS (ii) :  $m \in J^*(B^*) \setminus \bigcup_{i=1}^J H_i$ . Nous montrerons dans ce cas que

$$P_r(\liminf i(\bar{X}_n, \delta_n) = + \infty) = 1.$$

Soit  $F = \{ \omega \in \Omega ; \liminf i(\bar{X}_n, \delta_n) < +\infty \}$  et soit  $\omega \in F$ . Il existe donc  $K(\omega) < +\infty$  tel que :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $k \geq n$  satisfaisant à

$$i(\bar{X}_k(\omega), \delta_k) < K(\omega)$$

En reprenant l'inégalité (5.6) avec  $K(\omega)$  à la place de  $N - 1$  nous obtenons

$$(5.7) \quad \left( \frac{k}{2 \log \log k} \right)^{\frac{1}{2}} d(m, H_{K(\omega)}) - \sigma(1 + \varepsilon)M \leq \| \xi_k(\omega) \|$$

Or  $m \in J^*(B^*) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$  et donc  $d(m, H_{K(\omega)}) > 0$  car  $K(\omega) < +\infty$ .

Nous déduisons donc de (5.7) que  $\liminf \| \xi_k(\omega) \| = +\infty$  pour tout  $\omega$  de  $F$  et d'après le lemme 5.1,  $P_r(F) = 0$ . ■

**REMARQUE 5.3.** — La remarque sur laquelle s'appuie la démonstration du théorème 5.2 est basée sur les résultats de L. Gross ([3]) repris par H. H. Kuo dans [5] (cor. 4.2, p. 43). Il est démontré qu'il existe un espace de Banach séparable  $B_0$  contenu dans  $B$  tel que  $P(B_0) = 1$ ,  $\overline{\mathcal{H}(Q)} = B_0$ , de norme plus forte que celle de  $B$  et pour lequel la famille  $(J(e_i))_{i \geq 1}$  constitue une base de Schauder.

Les projecteurs  $\pi_n$  sont dans ce cas uniformément bornés (cf. [10], p. 15).

## ANNEXE

## I. Démonstration de la proposition 4.1.

Notons  $(\pi_k)_{k \geq 0}$  les polynômes de Legendre sur  $[-1, +1]$ . Rappelons que

$$\int_{-1}^1 \pi_n(u)\pi_m(u)du = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En posant  $\varphi_n(t) = \sqrt{2n+1}\pi_n(2t-1)$ ,  $t \in [0, 1]$  la famille  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  de polynômes ainsi définis, forme une base orthonormée de  $L^2([0, 1], dt)$ .

La famille des polynômes  $\{\psi_n; n = 0, \dots, k\}$  où

$$\psi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)dt$$

est alors une base orthonormée de  $\mathcal{H}_{k+1}$ .

Posons

$$\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n+1)} x^i \quad (1)$$

Il est aisé de voir que la mesure  $\nu_n$  de  $M([0, 1])$  telle que  $J^* \nu_n = \psi_n$ , est définie par

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n+1)} \mu_i \quad \text{où} \quad \mu_i = i\delta_1 - i\mu_{g_{i-1}}$$

Nous avons alors

$$\pi_{k+1}(x)(t) = \sum_{j=0}^k (x, v_j) \psi_j(t) = \sum_{l=1}^{k+1} t^l \sum_{j=l-1}^k a_j^{(j+1)} \sum_{i=1}^{j+1} a_i^{(j+1)} (\mu_i, x)$$

et la mesure correspondant au  $l^{\text{ème}}$  coefficient est

$$\xi_l^{[k+1]} = \sum_{j=l-1}^k a_j^{(j+1)} \sum_{i=1}^{j+1} a_i^{(j+1)} \mu_i \quad (2)$$

D'après les propriétés des polynômes de Legendre (voir [9] par exemple), on a

$$\pi_n(2x-1) = (-1)^n {}_2F_1(-n, n+1; 1; x)$$

et

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} (\pi_{n+1}(2x-1) - \pi_{n-1}(2x-1)).$$

Après identification avec (1) nous retrouvons alors d'après (2) l'expression de  $\xi_l^{[k+1]}$  qui conduit à la proposition.

.Valeurs particulières des expressions  $h_i^{[3]}(x)$  :

$$\begin{aligned} n = 3 \quad h_1^{[3]}(x) &= 3x(1) - 60 \int_0^1 tx(t)dt + 36 \int_0^1 x(t)dt \\ h_2^{[3]}(x) &= -12x(1) + 180 \int_0^1 tx(t)dt - 96 \int_0^1 x(t)dt \\ h_3^{[3]}(x) &= 10x(1) - 120 \int_0^1 tx(t)dt + 60 \int_0^1 x(t)dt. \end{aligned}$$

## RÉFÉRENCES

- [1] J. R. BARRA, Notions fondamentales de statistique mathématique, Dunod, éditeur, Paris, 1971.
- [2] R. CARMONA, Contribution à l'étude des mesures gaussiennes dans les espaces de Banach, *Thèse*, Université d'Aix-Marseille II, U. E. R., Marseille-Luminy, 1977.
- [3] L. GROSS, Abstract Wiener spaces, Proc. Fifth Berkeley Symp., *Math. Stat. Prob.*, t. 2, 1965, p. 31-42.
- [4] J. KUELBS, Gaussian measures on Banach spaces, *J. Functional Analysis*, t. 5, 1970, p. 354-367.
- [5] H. H. KUO, Gaussian measures on Banach spaces, *Lecture Notes in Math.*, t. 463, Springer-Verlag, éditeur, Berlin, 1975.
- [6] E. PARZEN, Time series analysis papers, Holden-Day, San-Francisco, 1967.
- [7] Ju. A. ROZANOV, Infinite dimensional gaussian distribution, American mathematical society, Providence, 1971.
- [8] J. L. SOLER, Contribution à l'étude des structures statistiques infinidimensionnelles, *Thèse*, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble, 1978.
- [9] R. P. SONI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer-Verlag, éditeur, New York, 1966.
- [10] R. L. TAYLOR, Stochastic convergence of weighted sums of Random elements in linear spaces, *Lecture Notes in Math.*, t. 672, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1981)