ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

BACHAR HACHEM

# Quelques théorèmes ergodiques sur-additifs dans $L^p$ $(1 \leq p < \infty)$

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 18, nº 3 (1982), p. 201-222
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_3_201_0>

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section B :
Vol. XVIII, n° 3, 1982, p. 201-222. *Calcul des Probalités et Statistique.*

# Quelques théorèmes ergodiques sur-additifs dans $L^p(1 \leqslant p < \infty)$

par

**Bachar HACHEM**
Laboratoire de Probabilités, tour 56, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Nous montrons d'abord que la version de Burkholder du théorème de Kingman peut être étendue au cas où l'opérateur T est markovien de $L^1$. Ensuite on donne une nouvelle démonstration de l'existence d'un dominant exact lorsque T est sous-markovien de $L^1$. Nous considérons aussi le cas où T est une contraction positive de $L^p(1 < p < \infty)$ en généralisant le théorème ergodique additif d'Akcoglu [*1*] au cas sur-additif. Enfin nous donnons une version à paramètre continu de tous les résultats obtenus dans ce travail. Diverses autres questions sont aussi envisagées.

SUMMARY. — We show firstly that Burkholder's version of Kingman's theorem can be extended to the case where T is a markovian operator of $L^1$. Next we give a new demonstration of the existence of an exact dominant when T is a sub-markovian operator of $L^1$. We also study the case when T is a positive contraction in $L^p(1 < p < \infty)$ generalizing Akcoglu's additive ergodic theorem [*1*] to the super-additive case. Finally, we give a continuous parameter version of all the results obtained in this paper. Also others questions are studied.


© Gauthier-Villars

## 1. INTRODUCTION

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma$-fini et T un opérateur linéaire sur $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ $(1 \leq p < \infty)$. On dit que T est positif si :

$$f \geq 0 \ \mu \cdot p \cdot p \Rightarrow Tf \geq 0 \ \mu \cdot p \cdot p$$

et on dit que T est une contraction si : $\| Tf \|_p \leq \| f \|_p$ pour tout $f \in L^p$ ; ce qui est équivalent à dire que T est de norme $\leq 1$. L'opérateur adjoint (transposé) de T qui applique $L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ dans lui-même, sera noté par $T^*(q = p/p - 1$ si $p > 1$ et $q = +\infty$ si $p = 1)$. Cet opérateur adjoint est positif si T l'est. D'autre part la norme de $T^*$ est égale à celle de l'opérateur T, par conséquent $T^*$ est une contraction sur $L^q$ dès que T l'est sur $L^p$. Une contraction positive de $L^1$ s'appelle un opérateur sous-markovien. L'opérateur sous-markovien T est dit markovien si :

$$\int_\Omega Tf d\mu = \int_\Omega f d\mu, \qquad \text{pour tout } f \in L^1 . \tag{1.1}$$

Soit $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ une suite d'éléments de $L^p(1 \leq p < \infty)$, on dit que S est un processus sur-additif (additif) relatif à l'opérateur T de $L^p$ si :

$$S_n + T^n(S_m) \leq (=) S_{n+m}, \qquad \forall n, m \geq 1 . \tag{1.2}$$

Le processus S est dit positif si $S_n \in L^p_+ (n \geq 1)$. Remarquons que les théorèmes ergodiques de M. Akcoglu [*1*] (pour $1 < p < \infty$) et de Chacon-Ornstein [*12*] (pour $p = 1$) nous permettent de ramener l'étude d'un processus sur-additif quelconque à celle d'un processus sur-additif et positif. Pour cela il suffit de remarquer que $\forall n \geq 1$, $S_n - \sum_{i=0}^{n-1} T^i S_1 \geq 0$. Donc dans toute la suite nous allons considérer uniquement des processus sur-additifs et positifs.

Une fonction $\delta \in L^1_+$ est appelée un dominant pour un processus sur-additif $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ relatif à un opérateur positif T de $L^1$ si :

$$\forall n \geq 1, \qquad S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i \delta . \tag{1.3}$$

Soit $\mathscr{D}(S)$ la classe des dominants pour S ; $\delta_0 \in \mathscr{D}(S)$ est un dominant exact si : $\int \delta_0 d\mu = \inf \left\{ \int \delta d\mu \ ; \ \delta \in \mathscr{D}(S) \right\}$

J. F. C. Kingman dans une série d'articles ([*21*] [*22*] et [*23*]) développe la théorie des processus sur-additifs de $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ dans le cas où l'opérateur T est induite par une transformation $\Theta$, inversible et conservant la mesure $\mu$, i. e. $Tf = f \circ \Theta$. Il démontre que si :

$$\gamma = \sup_{n \geq 1} (1/n) \int S_n d\mu < +\infty, \tag{1.4}$$

alors il existe au moins un dominant exact $\delta$ pour S tel que :

$$\gamma = \int \delta d\mu, \tag{1.5}$$

(voir aussi [*9*] [*13*] et [*20*]). Puis il montre que S et le processus additif $\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} T^i\delta, n \geq 1 \right\}$ ont le même comportement asymptotique. Ainsi il généralise le théorème ergodique de Birkhoff. Dans [*5*] M. Akcoglu et L. Sucheston ont étendu ce théorème au cas où T est markovien. Pour étendre ce théorème au cas où T est sous-markovien A. Brunel et L. Sucheston dans [*8*] (voir aussi [*18*]) ont introduit la condition de bornitude suivante :

$$\bar{\gamma} = \liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1}) \right\|_1 < +\infty, \qquad S_0 = 0 \tag{1.6}$$

et ceci pour établir l'existence d'un dominant exact $\delta \in L^1_+$ tel que :

$$\bar{\gamma} = \int \delta d\mu. \tag{1.7}$$

obtenant ainsi une complète généralisation du célèbre théorème de Chacon-Ornstein [*12*]. Remarquons que les conditions (1.4) et (1.6) sont équivalentes lorsque T est markovien et de plus dans le cas additif la condition (1.6) exprime que $S_1 \in L^1$.

Dans le paragraphe (2) de ce travail nous montrerons d'abord que la version de Burkholder [*9*] du théorème de Kingman, qui est basé sur le théorème de Komlos [*24*], peut être étendu au cas markovien. Ensuite nous donnerons une nouvelle démonstration de l'existence d'un dominant exact dans le cas où T est sous-markovien.

Dans le paragraphe (3) nous considérons le cas où T est une contraction positive de $L^p(1 < p < \infty)$ et nous donnerons une condition suffisante (analogue à celle de (1.6)) pour assurer la convergence $\mu$-p. p. et en moyenne

dans $L^p$ de $S_n/n$ (voir [*19*]), ce qui généralise le théorème ergodique de M. Akcoglu [*1*].

Dans le paragraphe (4) nous considérons les processus sur-additifs à temps continus dans $L^p(1 \leq p < \infty)$ et nous démontrerons une version à paramètre continu de tous les résultats obtenus dans les paragraphes (2) et (3). Nous généralisons ainsi, en particulier, les résultats de [*2*] [*15*] et [*16*].

Enfin nous envisageons aussi l'étude de la convergence stochastique de $S_n/n$ (et sa version à paramètre continu) lorsque T est sous-markovien de $L^1$ ; en complétant ainsi le travail de H. Fong [*15*].

## 2. PROCESSUS SUR-ADDITIFS DANS $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$

Dans [*9*], D. L. Burkholder donne une nouvelle démonstration du théorème de Kingman concernant l'existence d'un dominant exact d'un processus sur-additif S relatif à l'isométrie positive $Tf = f \circ \Theta$ de $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, où $\Theta$ est une transformation mesurable conservant la mesure $\mu$. Sa démonstration est basée sur le théorème suivant de Komlŏs [*24*] :

THÉORÈME (2.1). — Si $\{ \xi_n, n \geq 1 \}$ est une suite de fonctions de $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ telle que :

$$\liminf_{n \to \infty} \| \xi_n \|_1 < +\infty$$

alors il existe une sous-suite $\{ \eta_n, n \geq 1 \}$ et une fonction $\eta \in L^1$ telles que, pour toute sous-suite $\{ \tilde{\eta}_n, n \geq 1 \}$ de la suite $\{ \eta_n, n \geq 1 \}$ on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\eta}_i \to \eta \qquad \mu\text{-p. p.}$$

Remarquons que l'argument de Burkholder ne peut pas être appliqué sans faire quelques modifications lorsque T est un opérateur markovien quelconque. La difficulté est la suivante : si $f_n \to f$ $\mu$-p. p. et $Tf = f \circ \Theta$ alors $Tf_n \to Tf$ $\mu$-p. p. ; mais lorsque T est markovien, $Tf_n$ ne converge pas nécessairement $\mu$-p. p. même si la suite $\{ f_n \}$ est bornée dans $L^1$. De plus même si $Tf_n$ converge $\mu$-p. p., la limite n'est pas nécessairement égale à $Tf$. En général on a la proposition suivante :

PROPOSITION (2.2). — (Voir II.1.2 de [*17*]).

Soit T un opérateur sous-markovien sur $L^1$ ; si

$$|f_n| \leq F, \qquad F \in L^1 \qquad \text{et} \qquad f_n \to f \qquad \mu\text{-p. p.}$$

alors $Tf_n \to Tf$ $\mu$-p. p.

Nous proposons ici d'étendre la méthode de Burkholder au cas où T est markovien :

THÉORÈME (2.3). — Un processus sur-additif $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$, relatif à un opérateur markovien de $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, et qui satisfait à la condition (1.4) admet au moins un dominant exact.

Pour démontrer ce théorème il nous faut le lemme suivant :

LEMME (2.4). — (Voir le lemme 1 de [5]).

Soit $\{ \phi_m, m \geq 1 \}$ la suite d'éléments de $L^1_+$ définie par :

$$(2.1) \qquad \forall m \geq 1, \qquad \phi_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (S_i - T(S_{i-1})), \qquad S_0 = 0 .$$

alors on a :

$$(2.2) \qquad \gamma = \lim_{m \to \infty} \| \phi_m \|_1 < + \infty ;$$

où $\gamma$ est la constante définie par (1.4). De plus on a :

$$(2.3) \qquad \forall m \geq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq n < m$$

$$\left(1 - \frac{n-1}{m}\right) S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i(\phi_m) .$$

*Démonstration du théorème* (2.3). — Le théorème de Komlŏs appliqué à la suite $\{ \phi_m, m \geq 1 \}$ du lemme (2.4) entraîne l'existence d'une sous-suite $\{ \phi_{m,0}, m \geq 1 \}$ et d'un $f_0 \in L^1_+$ tels que pour toute sous-suite $\{ \tilde{\phi}_{m,0}, m \geq 1 \}$ de la suite $\{ \phi_{m,0}, m \geq 1 \}$ on ait : $\frac{1}{j} \sum_{m=1}^{j} \tilde{\phi}_{m,0} \to f_0$ $\mu$-p. p. Pour $k \geq 1$, la même méthode appliquée à la suite $\{ T^k(\phi_{m,k-1}), m \geq 1 \}$ entraîne l'existence d'une sous-suite $\{ \phi_{m,k}, m \geq 1 \}$ et d'un $f_k \in L^1_+$ tels que $\frac{1}{j} \sum_{m=1}^{j} T^k(\tilde{\phi}_{m,k}) \to f_k$ $\mu$-p. p. lorsque $j \uparrow \infty$ et ceci pour toute sous-suite $\{ \tilde{\phi}_{m,k}, m \geq 1 \}$ de la suite $\{ \phi_{m,k}, m \geq 1 \}$. Soit $\{ \phi_{m_i}, i \geq 1 \}$ une énumération de la suite diagonale $\{ \phi_{i,i}, i \geq 1 \}$ où $\{ m_i, i \geq 1 \}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs ; alors $\{ \phi_{m_i}, i \geq 1 \}$ est une

sous-suite de la suite initiale $\{ \phi_m, m \geq 1 \}$ ; de plus d'après la construction de $\phi_{m_i}$, $X_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \phi_{m_i}$ est telle que :

$$(2.4) \qquad \forall k \geq 0, \ T^k(X_j) \to f_k \quad \mu\text{-p. p.} \quad \text{lorsque } j \uparrow \infty .$$

Soit maintenant $n \geq 1$ fixé et choisissons $i_0 \geq 1$ tel que $n < m_{i_0}$ ; donc $n < m_{i_0} \leq m_i$ pour tout $i \geq i_0$. Par suite (2.3) donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} T^k(X_j) \geq \frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{i_0-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(\phi_{m_i})\right) + \frac{1}{j} \sum_{i=i_0}^{j} \left(1 - \frac{n-1}{m_i}\right) S_n .$$

On en déduit que :

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(X_j) \geq S_n .$$

D'après (2.4) cela entraîne :

$$(2.5) \qquad \forall n \geq 1, \qquad f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1} \geq S_n .$$

Posons $g_n = \inf_{j \geq n} X_j$ ; en vertu de (2.4) on a :

$$0 \leq g_n \uparrow f_0 \in L^1 \ \mu \cdot p \cdot p. ;$$

la proposition (2.2) montre alors que $T(f_0) = \lim_{n \to \infty} T(g_n)$ $\mu$-p. p. En utilisant encore une fois (2.4) et la positivité de l'opérateur, on obtient :

$$T(f_0) = \lim_{n \to \infty} T(g_n) \leq \liminf_{j \to \infty} \ T(X_j) = \lim_{j \to \infty} T(X_j) = f_1 .$$

Posons $\psi_0 = f_0$ et $\psi_1 = f_1 - T\psi_0$, ce qui donne :

$$f_1 = \psi_1 + T\psi_0, \qquad \text{où} \qquad \psi_0, \psi_1 \in L^1_+ .$$

En répétant cette méthode, on montre d'une façon générale :

$$(2.6) \qquad \forall n \geq 1, \qquad f_n = \psi_n + T\psi_{n-1} + \ldots + T^n\psi_0 .$$

Donc en combinant (2.6) et (2.5) on obtient :

$$(2.7) \quad \forall n \geq 1, \qquad (\psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_{n-1}) + T(\psi_0 + \ldots + \psi_{n-2}) + \ldots + T^{n-2}(\psi_0 + \psi_1) + T^{n-1}\psi_0 \geq S_n .$$

Posons maintenant : $\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m$ alors $\forall n \geq 1$, $\sum_{i=0}^{n-1} T^i\psi \geq S_n$ ; en particulier $\int_\Omega \psi d\mu \geq \gamma$.

D'autre part (2.6) et (1.1) donnent :

$$\int_\Omega (\psi_0+\psi_1+\ldots+\psi_n)d\mu = \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} T^n(X_j)d\mu \leq \lim_j \inf \int_\Omega X_j d\mu .$$

Or, $\int_\Omega \phi_{m_i} d\mu \to \gamma$ et par conséquent $\int_\Omega X_j d\mu = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} \int_\Omega \phi_{m_i} d\mu \to \gamma$

d'où : $\forall n \geq 0 : \int_\Omega (\psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_n)d\mu \leq \gamma$ ; et par suite $\int_\Omega \psi d\mu \leq \gamma$.

Donc $\int_\Omega \psi d\mu = \gamma$. On en déduit que $\psi$ est un dominant exact. ■

Dans la suite de ce paragraphe nous allons supposer que T est sous-markovien et nous allons montrer que la condition de bornitude (1.6) entraîne l'existence d'un dominant exact $\delta \in L^1_+$ pour $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$, qui satisfait à l'égalité (1.7). La méthode que nous utiliserons consiste à ajouter un point à l'espace $\Omega$ pour rendre l'opérateur T markovien ; cette idée est en fait un cas très particulier de la théorie de la dilatation [7]. Pour cela nous allons commencer par établir quelques résultats intermédiaires.

PROPOSITION (2.5). — La suite des nombres positifs

$$\left\{ \alpha_n = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1}))d\mu,\ n \geq 1 \right\},$$

où $S_0 = 0$, est sur-additive, c'est-à-dire :

$$\forall n, m \geq 1, \qquad \alpha_{n+m} \geq \alpha_n + \alpha_m . \tag{2.8}$$

*Démonstration.* —

$$\alpha_{n+m} = \sum_{i=1}^{n+m} (S_i - T(S_{i-1}))d\mu = \alpha_n + \int \sum_{i=1}^{m} (S_{n+i} - T(S_{n+i-1}))d\mu .$$

Or la sur-additivité entraîne que $\sum_{i=1}^{m} (S_{n+i} - S_i - T^i(S_n)) \geq 0$ et puisque T est sous-markovien, on trouve :

$$0 \leq \int_\Omega (I - T)\left(\sum_{i=1}^{m} (S_{n+i} - S_i - T^i(S_n)\right)d\mu .$$

d'où l'on tire, pour tout $m \geq 1$,

$$\alpha_m = \int \sum_{i=1}^{m} (S_i - T(S_{i-1}))d\mu$$

$$\leq \int \sum_{i=1}^{m} (S_{n+i} - T(S_{n+i-1}))d\mu - \int T(S_{n+m} - S_m - T^m S_n + S_n)d\mu$$

$$\leq \int \sum_{i=1}^{m} (S_{n+i} - T(S_{n+i-1}))d\mu,$$

puisque par sur-additivité on a $S_{n+m} - S_m - T^m S_n \geq 0$. En tenant compte de ce qui précède on trouve (2.8). ■

Soit maintenant $\phi_n$ la suite définie par (2.1), alors il est évident que $\int \phi_n d\mu = \frac{\alpha_n}{n}$ ; or la suite $\alpha_n$ est sur-additive et par suite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \sup_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \leq +\infty, \qquad \text{d'où :} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int_\Omega \phi_n d\mu \leq +\infty.$$

Nous allons supposer dans la suite que :

$$(2.9) \qquad \bar{\gamma} = \sup_{n\geq 1} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1}))d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n d\mu < +\infty.$$

PROPOSITION (2.6). — Si $\delta \in L^1_+(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ est un dominant quelconque de $S_n$ (i. e. satisfait uniquement à la condition (1.3)) alors on a :

$$(2.10) \qquad \int_\Omega \delta d\mu \geq \bar{\gamma}.$$

*Démonstration.* — Puisque T est sous-markovien on peut écrire :

$$0 \leq \int (I - T)\left(\sum_{i=0}^{k-1} T^i(\delta) - S_k\right)d\mu,$$

ce qui donne :

$$\forall k \geq 1, \qquad \int (T^k(\delta) + (S_k - TS_k))d\mu \leq \int \delta d\mu.$$

Or, d'après (1.3) on a :

$$\phi_n = \frac{1}{n}\left(TS_n + \sum_{k=1}^{n}(S_k - TS_k)\right) \leq \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} T^k(\delta) + \sum_{k=1}^{n}(S_k - TS_k)\right],$$

et par conséquent,

$$\int \phi_n d\mu \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int (T^k(\delta) + (S_k - T(S_k)))d\mu \leq \int \delta d\mu$$

en tenant compte de (2.9) on obtient la proposition. ■

Maintenant, on se donne un point $\overline{\omega}$ qui n'est pas dans $\Omega$ et on note : $\overline{\Omega}$ l'espace $\Omega \cup \{\overline{\omega}\}$, $\overline{\mathscr{F}}$ la tribu engendrée par $\mathscr{F}$ dans $\overline{\Omega}$ (remarquons que $\{\overline{\omega}\} \in \overline{\mathscr{F}}$) et $\overline{\mu}$ la mesure sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}})$ définie par :

$$\overline{\mu}(A) = \mu(A) \quad \text{si} \quad A \in \mathscr{F} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mu}(\{\overline{\omega}\}) = 1 .$$

Par convention toutes les fonctions $f$ sur $\Omega$ seront prolongées à $\overline{\Omega}$ en posant $f(\overline{\omega}) = 0$.

On définit un opérateur linéaire $\overline{T}$ sur $L^1(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mu})$ en posant pour toute fonction intégrable $f$ à support dans $\Omega$ : $\overline{T}f = Tf$ sur $\Omega$ et

$$\overline{T}f = \int_\Omega f d\mu - \int_\Omega Tf d\mu$$

sur $\overline{\omega}$ ; et $\overline{T}$ laisse la fonction $1_{\{\overline{\omega}\}}$ invariante, i. e. $\overline{T}(1_{\{\overline{\omega}\}}) = 1_{\{\overline{\omega}\}}$.

L'opérateur $\overline{T}$ ainsi défini est markovien sur $L^1(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mu})$.

PROPOSITION (2.7). — La suite $\overline{S}_n = S_n + \left[\int \sum_{i=0}^{n-1}(S_i - TS_i)d\mu\right]1_{\{\overline{\omega}\}}$, où $S_0 = 0$, est un processus sur-additif relatif à l'opérateur markovien $\overline{T}$ de $L^1(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mu})$. De plus on a :

$$\overline{\gamma} = \sup_{n \geq 1} \int_\Omega \overline{S}_n d\overline{\mu}, \tag{2.11}$$

où $\overline{\gamma}$ est définie par (2.9).

*Démonstration.* —

$$\overline{S}_m + \overline{T}^m(\overline{S}_n) = S_m + T^m(S_n)$$
$$+ \left[\int S_n d\mu - \int T^m S_n d\mu + \int \sum_{i=0}^{m-1}(S_i - TS_i)d\mu + \int \sum_{i=0}^{n-1}(S_i - TS_i)d\mu\right]1_{\{\overline{\omega}\}} .$$

Or, comme dans la démonstration de la proposition (2.5), on a :

$$\int S_n d\mu - \int T^m S_n d\mu + \int \sum_{i=0}^{m-1} (S_i - TS_i) d\mu \leq \int \sum_{i=0}^{m-1} (S_{n+i} - T(S_{n+i}) d\mu .$$

Par suite

$$\overline{S}_m + \overline{T}^m(\overline{S}_n) \leq S_{n+m} + \left[ \int \sum_{i=0}^{m-1} (S_{n+i} - T(S_{n+i})) d\mu + \int \sum_{i=0}^{n-1} (S_i - TS_i) d\mu \right] 1_{\{\overline{\omega}\}} = \overline{S}_{n+m} .$$

D'autre part :

$$\frac{1}{n} \int \overline{S}_n d\overline{\mu} = \frac{1}{n} \int_\Omega S_n d\mu + \frac{1}{n} \int_\Omega \sum_{i=0}^{n-1} (S_i - TS_i) d\mu$$

$$= \frac{1}{n} \int \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1})) d\mu = \int \phi_n d\mu .$$

d'où (2.11). ■

THÉORÈME (2.8). — Tout processus sur-additif $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ relatif à un opérateur sous-markovien T de $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, et qui satisfait à la condition (2.9) admet au moins un dominant exact.

*Démonstration.* — La proposition (2.7) montre que la suite $\{ \overline{S}_n, n \geq 1 \}$ est sur-additif relatif à l'opérateur markovien $\overline{T}$ de $L^1(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mu})$. Donc le théorème (2.3) montre qu'il existe une fonction $\overline{\delta} \in L^1_+(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mu})$ telle que :

$$\forall n \geq 1, \qquad \overline{S}_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} \overline{T}^i(\overline{\delta}) , \tag{2.12}$$

et

$$\overline{\gamma} = \int_{\overline{\Omega}} \overline{\delta} d\overline{\mu} .$$

Soit $\delta$ la restriction de $\overline{\delta}$ à $\Omega$, donc $\overline{\delta} = \delta + a 1_{\{\overline{\omega}\}}$, où $a = \overline{\delta}(\overline{\omega}) \geq 0$, et par suite :

$$\int_\Omega \delta d\mu \leq \int_{\overline{\Omega}} \overline{\delta} d\overline{\mu} = \overline{\gamma} . \tag{2.13}$$

D'autre part :

$$\overline{T}^i(\overline{\delta}) = \overline{T}^i(\delta) + a 1_{\{\overline{\omega}\}} = T^i(\delta) + \left[ \int \delta d\mu - \int T^i \delta d\mu + a \right] 1_{\{\overline{\omega}\}}$$

par conséquent, l'inégalité (2.12) sur $\Omega$ implique (1.3).

Enfin, la proposition (2.6) et l'inégalité (2.13) entraînent que $\int \delta d\mu = \overline{\gamma}$. ■

COROLLAIRE (2.9). — (Voir [*8*]).

Soient, T un opérateur sous-markovien, $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ et $S' = \{ S'_n, n \geq 1 \}$ deux processus sur-additifs. Alors si

$$\lim_{n \to \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1}))d\mu < +\infty ,$$

la suite des quotients $s_n/S'_n$ converge $\mu$-p. p. sur l'ensemble $A = \{ \sup_n s'_n > 0 \}$.

Nous terminons ce paragraphe par les deux remarques suivantes :

REMARQUE (2.10). — Il a été démontré par Chacon [*10*] que, pour un opérateur sous-markovien T de $L^1$ et $f \in L^1_+$, les moyennes $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} T^i f$ ne convergent pas presque partout. Par contre U. Krengel [*25*] a démontré que ces moyennes convergent stochastiquement sur $\Omega$ (la convergence stochastique est équivalente à la convergence en mesure si $\Omega$ est de mesure finie). Dans [*15*], H. Fong démontre que si T est sous-markovien et $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif, qui satisfait à la condition

$$\gamma = \sup_n \int \frac{S_n}{n} d\mu < +\infty ,$$

et si sur la partie dissipative D de $\Omega$ on a, $S_n = \sum_0^{n-1} T^i \delta$ pour une fonction $\delta \in L^1_+$, alors $S_n/n$ converge stochastiquement sur $\Omega$.

En tenant compte du théorème (2.8), nous pouvons annoncer le théorème suivant :

THÉORÈME (2.11). — Si T est sous-markovien et $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif tel que :

$$\bar{\gamma} = \lim_{n \to \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1}))d\mu < +\infty ,$$

alors $S_n/n$ converge stochastiquement sur $\Omega$.

En effet, le théorème (2.8) montre qu'il existe un dominant exact $\delta \in L^1_+$, c'est-à-dire, d'une part $S_n \leq \sum_0^{n-1} T^i\delta (\forall n \geq 1)$ et d'autre part

$$\sup_n \int \frac{S_n}{n} \leq \int \delta d\mu = \bar{\gamma} < +\infty.$$

Par conséquent le théorème de H. Fong implique le théorème. ■

REMARQUE (2.12). — Soient, T une contraction de $L^1$ (non nécessairement positive) $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ un processus positif et sous-additif (i. e. $\forall n, m \geq 1$ $S_n + T^n S_m \geq S_{n+m}$) et $P = \{P_i, i \geq 0 \}$ une suite admissible de fonctions de $L^1_+$ (i. e. $|g| \leq P_i \Rightarrow |Tg| \leq P_{i+1}$ pour tout $g \in L^1$). Il est facile de voir que P est aussi admissible par rapport à l'opérateur sous-markovien $|T|$ (le module linéaire de T (voir [*11*])). Par conséquent le processus $\left\{ \sum_0^{n-1} P_i, n \geq 1 \right\}$ est sur-additif relatif à $|T|$. D'autre part S est aussi sous-additif et positif relatif à $|T|$ et de plus :

$$\forall n \geq 1, \qquad 0 \leq S_n \leq \sum_0^{n-1} |T|^i (S_1)$$

ce qui implique que $S'_n = \sum_0^{n-1} |T|^i (S_1) - S_n$ est positif et sur-additif relatif à $|T|$. Donc on peut annoncer le théorème suivant :

THÉORÈME (2.13). — *a*) $S_n/n$ converge stochastiquement sur $\Omega$.

*b*) $S_n \Big/ \sum_0^{n-1} P_i$ converge presque partout sur l'ensemble $A = \left\{ \sum_0^{\infty} P_i > 0 \right\}$.

*Démonstration.* — Soient C et D les parties conservatrice et dissipative de $\Omega$ relativement à $|T|$. Puisque

$$\sup_{n \geq 1} \int \frac{S'_n}{n} d\mu \leq \int S_1 d\mu < +\infty,$$

$S'_n \Big/ \sum_0^{n-1} P_i$ converge sur $C \cap A$ par le théorème d'Akcoglu-Sucheston [*5*].

Sur l'ensemble $D \cap A$ on a $\lim \uparrow S'_n \leq \sum_0^\infty |T|^i(S_1) < +\infty$, ce qui entraîne l'existence de la limite : $\lim_n \left( S'_n \Big/ \sum_0^{n-1} P_i \right) = \dfrac{\lim \uparrow S'_n}{\lim \uparrow \sum_0^{n-1} P_i}$. La convergence de $S'_n \Big/ \sum_0^{n-1} P_i$ implique celle de $S_n \Big/ \sum_0^{n-1} P_i$.

Enfin, l'inégalité $0 \leq S'_n \leq \sum_0^{n-1} |T|^i(S_1)$ et le théorème de H. Fong impliquent la convergence stochastique de $S'_n/n$ et par suite celle de $S_n/n$. ■

## 3. PROCESSUS SUR-ADDITIFS DANS $L^p(1 < p < \infty)$

Dans ce paragraphe nous allons considérer un processus sur-additif $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ d'éléments de $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ relatif à une contraction positive T de $L^p(1 < p < \infty)$. Il a été démontré par Y. Derriennic et U. Krengel [*14*] que la condition de bornitude suivante :

$$\sup_{n \geq 1} \left\| \frac{S_n}{n} \right\|_p < +\infty \tag{3.1}$$

ne suffit pas pour établir la convergence en moyenne dans $L^p(1 < p < \infty)$ de $S_n/n$, tandis que le problème de convergence p. p. est resté ouvert.

Dans ce paragraphe nous allons poser, comme dans le cas où $P = 1$ et T sous-markovien, la condition de bornitude :

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p < +\infty, \qquad \text{où } S_0 = 0, \tag{3.2}$$

et nous allons établir la convergence p. p. et en moyenne dans $L^p(1 < p < \infty)$ de $S_n/n$ ; plus précisément nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME (3.1). — Soient T une contraction positive de $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ $(1 < p < \infty)$ et $(S_n, n \geq 1)$ un processus sur-additif qui satisfait à la condition (3.2), alors $\lim_{n \to \infty} S_n/n$ existe au sens $\mu$-p. p. et en moyenne dans $L^p$.

Remarquons que le théorème d'Akcoglu [1] et le théorème ergodique en moyenne dans $L^p(1 < p < \infty)$ nous permettent de ramener l'étude d'un

processus sur-additif quelconque à celle d'un processus sur-additif et positif. Pour cela il suffit de remarquer que $\forall n \geq 1$, $S_n \geq \sum_{i=0}^{n-1} T^i S_1$.

On va commencer par établir quelques résultats intermédiaires.

PROPOSITION (3.2). — Sous les hypothèses du théorème, on peut trouver une fonction $\psi \in L_p^+(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ telle que :

$$\forall n \geq 1, \qquad S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i \psi, \tag{3.3}$$

et

$$\| \psi \|_p \leq \liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p . \tag{3.4}$$

Nous appellerons une telle fonction un dominant du processus.

*Démonstration de la proposition.* — Posons pour tout $m$ entier $> 0$,

$$\psi_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (S_i - T(S_{i-1}))$$

alors, d'après le lemme (2.4) on a : pour tout $m \geq 1$ et $1 \leq n < m$,

$$\left(1 - \frac{n-1}{m}\right) S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i(\psi_m), \qquad \text{avec } \psi_m \geq 0 . \tag{3.5}$$

En passant éventuellement à une sous-suite, on peut supposer $\{ \psi_m, m \geq 1 \}$ bornée dans $L_p^+ (1 < p < \infty)$ et on peut extraire une sous-suite $\{ \psi_{m_k}, k \geq 1 \}$ qui converge faiblement dans $L^p$ vers une fonction $\psi \in L_p^+$ qui satisfait donc à la condition (3.4)).

D'autre part, T est un opérateur fortement continu et par suite faiblement continu, d'où :

$$\lim_{n \to \infty} \text{faible} \sum_{i=0}^{n-1} T^i(\psi_{m_k}) = \sum_{i=0}^{n-1} T^i \psi .$$

Par conséquent, l'inégalité (3.5) implique (3.3). ■

COROLLAIRE (3.3). — (Inégalité maximale).

Sous les hypothèses du théorème, on a :

$$(3.6) \qquad \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{S_n}{n} \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p .$$

En effet ce corollaire découle immédiatement de la proposition (3.2) et du théorème ergodique dominé d'Akcoglu [*1*].

LEMME (3.4). — [Proposition 3.1 et Corollaire 3.5 de [*6*]].

Soit T une contraction positive de $L^p(1 < p < \infty)$, alors il existe une décomposition unique de $\Omega$ en deux parties E et $E^c$ telles que :

*i*) E est le support d'une fonction T-invariante $h \in L_p^+$, et le support de toute fonction T-invariante est contenu dans E.

*ii*) E et $E^c$ sont invariants, i. e. les sous-espaces $L_p(E)$, et $L_p(E^c)$ sont tous les deux invariants sous T.

*Démonstration du théorème.* — D'après la proposition (3.2) et le théorème d'Akcoglu [*1*] on a : $0 \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i \psi = S$. Avec $S \geq 0$ et T-invariante ; ce qui implique, d'après (*i*) du lemme, que $S = 0$ sur $E^c$, on en déduit que $\lim_{n \to \infty} S_n/n = 0$ $\mu$-p. p. sur $E^c$.

Pour établir le théorème sur E, on remarque que E est T-invariant et par suite le processus $(1_E S_n)$ est sur-additif et positif. On peut donc supposer que $\Omega = E$, ce qui implique l'existence d'une fonction strictement positive $h \in L_p^+(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ telle que $Th = h$ $\mu$-p. p. On voit facilement que :

$$\begin{aligned} \| h \|_p^p &= \int Th \cdot h^{p-1} d\mu \\ &= \int h \cdot T^*(h^{p-1}) d\mu \leq \| h \|_p \| T^*(h^{p-1}) \|_q \leq \| h \|_p \| h^{p-1} \|_q = \| h \|_p^p . \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\| h \|_p^p = \| h \|_p \| T^*(h^{p-1}) \|_q = \int h \cdot T^*(h^{p-1}) d\mu .$$

Or $h^{p-1}$ est l'unique fonction $g$ de $L_q (q = p/p-1)$ telle que

$$\int hg d\mu = \| h \|_p \| g \|_q = \| h \|_p^p ,$$

donc on en déduit que $T^*(h^{p-1}) = h^{p-1}$.

Désignons par $m$ la mesure finie $h^p \cdot \mu$ ; puis posons pour toute fonction $f \in L^p(m)$, $Pf = T(fh)/h$ ; cet opérateur est une contraction positive de $L^p(m)$ telle que $P1 = 1$ ; de plus on a :

$$\int Pf\,dm = \int h^{p-1}T(fh)d\mu = \int T^*(h^{p-1})f \cdot h d\mu = \int h^{p-1} f h d\mu = \int f dm,$$

donc $p$ se prolonger, comme un opérateur markovien à $L^1(m)$.

D'autre part, le processus $\{ h^{-1}S_n \}$ est sur-additif, positif par rapport à P et dans $L^1(m)$, de plus :

$$\begin{aligned} \|h^{-1}S_n/n\|_{L^1(m)} &= \int \frac{S_n}{n} \cdot h^{p-1} d\mu \leq \left\| \frac{S_n}{n} \right\|_{L^p(\mu)} \cdot \| h^{p-1} \|_{L^q(\mu)} \\ &\leq \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{S_n}{n} \right\|_{L^p(\mu)} \cdot \| h \|^{p-1}_{L^p(\mu)} < +\infty \end{aligned}$$

ce qui entraîne que le processus $\{ h^{-1}S_n \}$ satisfait à la condition de bornitude (3.1), pour $p = 1$, et pour la norme de $L^1(m)$. Donc on peut appliquer le théorème ergodique d'Akcoglu-Sucheston [5] pour assurer la convergence p. p. sur E. Le corollaire (3.3) et la convergence p. p., impliquent la convergence en moyenne dans $L^p$. ■

REMARQUE (3.5). — 1) Pour une isométrie positive de $L^p(1 < p < \infty)$ on a les inégalités suivantes :

si $2 \leq p < \infty$

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p \leq 2^{p-1/p} \liminf_{n \to \infty} ( \| S_n \|_p / n^{1/p} ) ;$$

et pour $1 < p < 2$

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p \leq 2^{1/p} \liminf_{n \to \infty} ( \| S_n \|_p / n^{p-1/p} ),$$

on peut voir cela en utilisant les inégalités de Clarkson et le fait que $S_i + TS_{i-1} \geq 2TS_{i-1} \geq 0$, d'où, pour $2 \leq p < \infty$ :

$$\begin{aligned} \| S_i - TS_{i-1} \|_p^p &\leq 2^{p-1}( \| S_i \|_p^p + \| TS_{i-1} \|_p^p ) - \| S_i + TS_{i-1} \|_p^p \\ &\leq 2^{p-1}( \| S_i \|_p^p - \| TS_{i-1} \|_p^p ) = 2^{p-1}( \| S_i \|_p^p - \| S_{i-1} \|_p^p ) . \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'inégalité souhaitée pour $2 \leq p < \infty$ ; on traite de la même façon pour $1 < p < 2$.

2) La proposition (3.2) reste valable même pour des opérateurs positifs quelconque dans $L^p(1 < p < \infty)$.

3) Si l'on suppose que $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ est un processus sous-additif et positif alors on a : $\forall n \geq 1$, $0 \leq S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i(S_1)$, par conséquent, dans ce cas particulier le théorème (3.1) reste valable sans aucune condition de bornitude.

## 4. PROCESSUS SUR-ADDITIFS DANS $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ A PARAMÈTRE CONTINU

Un processus $S = \{ S_t, t > 0 \}$ est une famille d'éléments de $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$; le processus est dit positif si $S_t \in L^p_+(t > 0)$, croissant si $S_t \leq S_u(0 < t < u)$, fortement continu si $\| S_t - S_u \|_p \to 0$ lorsque $t \to u$ et linéairement borné si :

$$\sup_{0 < t \leq u} \| S_t/t \|_p = M < +\infty \tag{4.1}$$

pour au moins un $u > 0$.

Soit $T = \{ T_t, t > 0 \}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs positifs sur $L^p$, c'est-à-dire $T_t(L^+_p) \subset L^+_p$, $T_u T_t = T_{t+u}(u, t > 0)$ et tel que $Tf = \{ T_t f, t > 0 \}$ est un processus fortement continu pour tout $f \in L^p$. Le semi-groupe est dit borné si :

$$\sup_{0 < t < \infty} \| T_t \| = K < +\infty . \tag{4.2}$$

Un processus $S = \{ S_t, t > 0 \}$ est dit additif (sur-additif) par rapport à T si : $S_t + T_t(S_u) = (\leq) S_{t+u}$ pour tout $t$, $u > 0$. Comme exemples de processus additifs on a $S_t = \int_0^t T_u f du$ et $S_t = (I - T_t) f (f \in L_p)$, où I est l'opérateur d'identité.

Dans [*2*] M. Akcoglu et J. Conzolo ont démontré une version à paramètre continu du théorème de Chacon-Ornstein [*12*]. Dans [*16*] H. Fong et L. Sucheston ont étendu ce théorème au cas où le semi-groupe est borné.

Dans ce paragraphe nous démontrerons une version à paramètre continu des résultats des paragraphes (2) et (3); généralisant ainsi (pour $p = 1$) les théorèmes additifs, démontrés dans ([*2*] [*15*] et [*16*]), au cas sur-additif.

Nous commençons par citer deux lemmes d'Akcoglu-Krengel [*3*] et [*4*] qui seront utilisés ultérieurement ; le premier lemme a été démontré dans le cas où T est un semi-groupe markovien de $L^1$, mais nous avons observé

que la démonstration reste valable même dans la situation plus générale suivante :

LEMME (4.1). — Soit $T = \{ T_t, t > 0 \}$ un semi-groupe borné et fortement continu d'opérateurs positifs de $L^p(1 \leq p < \infty)$ et soit $S = \{ S_t, t > 0 \}$ un processus sur-additif linéairement borné. Alors il existe un processus additif $G = \{ G_t, t > 0 \}$ dans $L^p$ tel que $G \leq S$.

LEMME (4.2). — Soit $T = \{ T_t, t > 0 \}$ un semi-groupe borné et fortement continu d'opérateurs positifs de $L^p(1 \leq p < \infty)$ et soit $G = \{ G_t, t > 0 \}$ un processus additif linéairement borné. Alors il existe deux processus additifs et positifs $G^i = \{ G_t^i, t > 0 \}$ $(i = 1, 2)$ dans $L^p$ tels que $G_t = G_t^{(1)} - G_t^{(2)}$.

Le théorème suivant est une version à paramètre continu du théorème (3.1) :

THÉORÈME (4.3). — Soit $T = \{ T_t, t > 0 \}$ un semi-groupe fortement continu de contraction positives de $L^p(1 < p < \infty)$ et soit $S = \{ S_t, t > 0 \}$ un processus sur-additif, linéairement borné et tel que :

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T_1(S_{i-1})) \right\|_p < +\infty . \tag{4.3}$$

Alors $S_t/t$ converge p. p. et au sens de $L^p(1 < p < \infty)$.

*Démonstration.* — Le lemme (4.1) montre que le processus sur-additif $H_t = S_t - G_t$ est positif. Or la positivité du semi-groupe et de H implique que H est croissant ; i. e. $H_u \leq H_t$ $(0 < u < t)$. Soit donc $t > 0$ et $n$ la partie entière de $t$ alors :

$$H_n/n + 1 \leq H_t/t \leq H_{n+1}/n . \tag{4.4}$$

Mais $\{ H_n, n \geq 1 \}$ est un processus sur-additif relatif à la contraction positive $T_1$ de $L^p(1 < p < \infty)$ ; donc par le théorème (3.1) $H_n/n$ converge p. p. et dans $L^p$, ce qui implique par (4.4), la convergence p. p. et dans $L^p$ de $H_t/t$. Donc pour démontrer le théorème il suffit de démontrer la convergence p. p. et dans $L^p$ de $G_t/t$. Pour cela, par le lemme (4.2) on a

$$G_t = G_t^{(1)} - G_t^{(2)} \qquad \text{et} \qquad G_t^{(1)},\ G_t^{(2)}$$

sont positifs et additifs, par suite croissants. Le même argument utilisé pour H entraine la convergence p. p. et dans $L^p$ de $G_t^{(1)}/t$ et $G_t^{(2)}/t$, c'est-à-dire de $G_t/t$. ■

Il a été démontré par H. Fong (lemme 4.3 de [*15*]) que si T est sous-markovien, $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif positif qui satisfait

à la condition (1.4) et $S' = \{ S'_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif et positif quelconque; alors pour tout entier fixé $k$, on a $\lim_{n\to\infty} S_{n+k}/S'_n = \lim_{n\to\infty} S_n/S'_n$ sur $C \cap E'$, où $E' = \{ \sup_n S'_n > 0 \}$. Le même résultat a lieu sur $D \cap E'$ si, ou bien T est markovien, ou bien $S_n = \sum_0^{n-1} T^i\delta$ sur $D \cap E'$, pour une fonction $\delta \in L^1_+$. En tenant compte du théorème (2.8) on peut annoncer le lemme suivant :

LEMME (4.4). — Soient, T un opérateur sous-markovien, $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif et positif tel que :

$$\bar{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T(S_{i-1}))d\mu < +\infty,$$

(la limite existe par la proposition (2.5)).

Si $S' = \{ S'_n, n \geq 1 \}$ est sur-additif et positif quelconque alors, pour tout entier fixé $k$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+k}/S'_n = \lim_{n\to\infty} S_n/S'_n,$$

sur $E' = \{ \sup_n S'_n > 0 \}$.

Le théorème suivant est une version à paramètre continu du corollaire (2.9) et en même temps généralise le théorème d'Ackoglu-Conzolo [*2*].

THÉORÈME (4.5). — Soit $T = \{ T_t, t > 0 \}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens (i. e. contraction positives) de $L^1$ et soit $S = \{ S_t, t > 0 \}$ un processus sur-additif, linéairement borné tel que:

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T_1(S_{i-1})) \right\|_1 < +\infty$$

alors, pour tout processus sur-additif et positif $S' = \{ S'_t, t > 0 \}$ on a $\lim_{t\to\infty} S_t/S'_t$ existe p. p. sur l'ensemble $E' = \{ \sup_{t>0} S'_t > 0 \}$.

*Démonstration.* — Le lemme (4.1) montre que le processus sur-additif $H_t = S_t - G_t$ est positif. Or la positivité du semi-groupe et de H implique que H est croissant, i. e. $H_u \leq H_t$ $(0 < u < t)$. Soit donc $t > 0$ et $n$ la partie entière de $t$, alors sur l'ensemble $E'$ on a :

$$H_n/S'_{n+1} \leq H_t/S'_t \leq H_{n+1}/S'_n. \tag{4.5}$$

Par le lemme (4.4) les rapports $H_n/S'_{n+1}$, $H_{n+1}/S'_n$ et $H_n/S'_n$ ont tous la

même limite sur E' ; ce qui implique, par (4.5), la convergence p. p. sur E' de $H_t/S'_t$. Donc pour démontrer le théorème il suffit de démontrer la convergence p. p. sur E' de $G_t/S'_t$. Pour cela, par le lemme (4.2) on a $G_t = G_t^{(1)} - G_t^{(2)}$ et $G_t^{(1)}$, $G_t^{(2)}$ sont positifs et additifs, par suite croissants. Le même argument utilisé pour H entraîne la convergence p. p. sur E' de $G_t^{(1)}/S'_t$ et $G_t^{(2)}/S'_t$, c'est-à-dire de $G_t/S'_t$. ■

En tenant compte des deux lemmes (4.1) et (4.2) nous pouvons démontrer, par une méthode analogue à celle utilisée dans les deux théorèmes (4.3) et (4.5), une version à paramètre continu du théorème (2.11), plus précisément nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME (4.6). — Soit $T = \{ T_t, t > 0 \}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens de $L^1$ et soit $S = \{ S_t, t > 0 \}$ un processus sur-additif, linéairement borné tel que :

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T_1(S_{i-1})) \right\|_1 < +\infty$$

alors $S_t/t$ converge stochastiquement sur $\Omega$.

Nous terminons ce paragraphe par l'étude du cas où le semi-groupe T est borné et $p = 1$.

Remarquons d'abord que les deux lemmes (4.1) et (4.2) (qui ont été démontrés pour un semi-groupe borné) nous permettent de ramener l'étude d'un processus sur-additif quelconque à celle d'un processus sur-additif et positif ; ce que nous allons supposer dans la suite.

Il est connu, par le travail de L. Sucheston [*26*] dans le cas discret et par H. Fong et L. Sucheston [*16*] dans le cas continu, que si $T = \{ T_t, t > 0 \}$ est un semi-groupe borné fortement continu d'opérateurs positifs de $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ alors l'espace $\Omega$ se décompose en deux parties Y et Z telle que Z est $T_t$-invariant pour tout $t > 0$ et Y est le support d'une fonction $e \in L^+_\infty$ telle que $T_t^* e = e$ pour tout $t > 0$. De plus, on peut définir un semi-groupe $V = \{ V_t, > 0 \}$ d'opérateurs sous-markoviens de $L^1$ par la formule:

$$V_t f = e \cdot T_t(f/(e + 1_Z)), \qquad f \in L^1. \tag{4.6}$$

Soit maintenant $S = \{ S_t, t > 0 \}$ un processus sur-additif relatif à T. Alors le processus H défini par $H_t = e \cdot S_t$ est sur-additif relatif au semi-groupe sous-markovien $V = \{ V_t, t > 0 \}$. En effet :

$$\begin{aligned} H_t + V_t(H_u) &= e \cdot S_t + e \cdot T_t(e \cdot S_u/(e + 1_Z)) \\ &= e[S_t + T_t(S_u)] \\ &\leq e \cdot S_{t+u} = H_{t+u}, \end{aligned}$$

par conséquent, les théorèmes (4.5) et (4.6) nous permettent d'annoncer le théorème suivant, qui généralise le théorème de H. Fong et L. Sucheston [*16*].

THÉORÈME (4.7). — Soit $T = \{ T_t, t > 0 \}$ un semi-groupe borné, fortement continu d'opérateurs positifs de $L^1$ et soit $S = \{ S_t, t > 0 \}$ un processus sur-additif, linéairement borné tel que :

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S_i - T_1(S_{i-1})) \right\|_1 < +\infty$$

alors $S_t/t$ converge stochastiquement sur Y. D'autre part, si $S' = \{ S'_t, t > 0 \}$ est un processus sur-additif et positif alors $\lim_{t \to \infty} S_t/S'_t$ existe p. p. sur l'ensemble $Y \cap \{ \sup_{t>0} S'_t > 0 \}$.

## BIBLIOGRAPHIE


[*1*] M. A. AKCOGLU, A pointwise ergodic theorem *in* $L_p$-spaces, *Can. J. Math.*, t. **27**, 1975, p. 1075-1082.

[*2*] M. A. AKCOGLU and J. CONZOLO, An ergodic theorem for semi-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **24**, 1970, p. 161-171.

[*3*] M. A. AKCOGLU and U. KRENGEL, A Differentiation Theorem for additive Processes, *Math., Z.*, t. **163**, 1978, p. 199-210.

[*4*] M. A. AKCOGLU and U. KRENGEL, A Differentiation Theorem *in* $L_p$, *Math. Z.*, t. **169**, 1979, p. 31-40.

[*5*] M. A. AKCOGLU and L. SUCHESTON, A ratio ergodic theorem for super-additive processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **44**, 1978, p. 269-278.

[*6*] M. A. AKCOGLU and L. SUCHESTON, On convergence of iterates of positive contraction in $L_p$-spaces, *J. Approx. Theory*, t. **13**, 1975, p. 348-362.

[*7*] M. A. AKCOGLU and L. SUCHESTON, Dilations of positive contractions on $L_p$-spaces, *Canad. Math. Bull.*, t. **20** (3), 1977.

[*8*] A. BRUNEL et L. SUCHESTON, Sur l'existence de dominants exacts pour un processus sur-additif, *C. R. A. S.*, t. **288**, 1979.

[*9*] D. L. BIRKHOLDER, Contribution à la discussion de [*22*].

[*10*] R. V. CHACON, A class of linear transformation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **15**, 1964, p. 560-564.

[*11*] R. V. CHACON and U. KRENGEL, Linear modulus of a linear operator, *Proc. Am. Math. Soc.*, t. **15**, 1964, p. 553-559.

[*12*] R. V. CHACON and D. S. ORNSTEIN, A general ergodic theorem. *Illinois J., Math.*, t. **4**, 1960, p. 153-160.

[*13*] Y. DERRIENNIC, Sur le théorème ergodique sous-additif, *C. R. A. S., Paris*, t. **281**, Série A, 1975, p. 985-988.

[*14*] Y. DERRIENNIC and U. KRENGEL, *Subadditive mean ergodic thorems* (à paraître).

[*15*] H. FONG, Ratio and stochastic ergodic theorems for superadditive processes. *Can. J. Math*, t. **XXXI**, n° 2, 1979, p. 441-447.

[*16*] H. FONG and L. SUCHESTON, On the ratio ergodic theorem for semi-groups. *Pacific Journal of Mathematics*, t. **39**, n° 3, 1971.

[*17*] A. GARSIA, *Topics in Almost Everywhere convergence*, Markham, Chicago, 1970.

[*18*] B. HACHEM, *Thèse de 3e Cycle*, Université de Paris VI, 1978.

[*19*] B. HACHEM, Un théorème ergodique sur-additif dans $L^p(1 < p < \infty)$, *C. R. A. S., Paris*, t. **292**, 9 mars 1981.

[*20*] A. DEL JUNCO, On the decomposition of a subadditive stochastic process, *Ann. Probability*, t. **5**, 1977, p. 298-302.

[*21*] J. F. C. KINGMAN, The ergodic theory of subadditive stochastic processes, *J. Royal Statist. Soc. Ser. B*, t. **30**, 1968, p. 499-510.

[*22*] J. F. C. KINGMAN, Subadditive ergodic theory, *Ann. Probability*, t. **1**, 1973, p. 883-905.

[*23*] J. F. C. KINGMAN, Subadditive processes. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, Springer-Verlag, *Lectures notes in Math.*, n° 539, 1976, p. 168-223.

[*24*] J. KOMLOS, A generalisation of a problem of steinhaus. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, t. **18**, 1967, p. 217-229.

[*25*] On the global limit behaviour of Markov chains and of general non singular Markov processes, *Z. Wahrscheilichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **6**, 1966, p. 302-316.

[*26*] L. SUCHESTON, On the ergodic Theorem for positive operators, I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **8**, 1967, p. 1-11.

*(Manuscrit reçu le 14 octobre 1981)*