ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. CAIROLI

Enveloppe de Snell d'un processus à paramètre bidimensionnel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 18, nº 1 (1982), p. 47-53
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_1_47_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVIII, n° 1-1982, p. 47-53. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Enveloppe de Snell d'un processus à paramètre bidimensionnel

par

R. CAIROLI

Le problème de l'enveloppe de Snell en temps continu a été posé et résolu par J.-F. Mertens dans [*1*]. Il est traité dans le livre de Dellacherie et Meyer [*2*], chap. VIII, appendice 1 et le lecteur aura avantage à consulter ce livre avant de s'attaquer à l'article de Mertens. Dans la présente note, nous nous proposons d'étudier ce problème, mais dans le cas d'un processus à paramètre bidimensionnel.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+^2}$ complète, continue à droite et qui satisfait à (F4) de [*3*]. $\mathbb{R}_+^2$ est ici et dans toute la suite considéré comme muni de l'ordre partiel $s = (s', s'') \leqq t = (t', t'')$, défini par la relation $s' \leqq t'$ et $s'' \leqq t''$. Comme d'habitude, $s < t$ désignera la relation $s \leqq t$, $s \neq t$.

Les processus (réels, si le contraire n'est pas affirmé) sont indexés par $\mathbb{R}_+^2$ et désignés par les lettres X, Y, S, ... ; les temps d'arrêt (de la filtration $(\mathscr{F}_t)$) sont notés $\tau = (\tau', \tau'')$, $\sigma = (\sigma', \sigma'')$, ... La tribu des événements antérieurs à un temps d'arrêt τ est définie exactement comme dans le cas unidimensionnel et sera notée $\mathscr{F}_\tau$. Les propriétés élémentaires des temps d'arrêt et des processus arrêtés à des temps d'arrêt que nous utiliserons sont démontrées exactement comme dans le cas unidimensionnel. En vue de ce qui va suivre, il vaut cependant de noter que si τ est un temps d'arrêt, $t \wedge \tau$ n'est pas nécessairement un temps d'arrêt et que $\{ t < \tau \}$ n'est généralement pas élément de $\mathscr{F}_t$.

Les notions de tribu optionnelle ou prévisible et d'ensemble ou processus optionnel ou prévisible sont les mêmes que dans le cas unidimensionnel [*2*], chap. IV ; il faut seulement préciser que « à droite de $t \in \mathbb{R}_+^2$ » signifie sur l'ensemble $\{ s : s' > t', s'' > t'' \}$ et « à gauche de $t \in \mathbb{R}_+^2$ » signifie sur l'ensemble $\{ s : s' < t', s'' < t'' \}$. Le théorème de projection optionnelle ou prévisible vaut et se démontre exactement comme dans le cas unidimensionnel [*2*], chap. VI. La partie concernant l'unicité doit cependant être modifiée, car il n'y a pas de théorèmes de section optionnelle ou prévisible par des temps d'arrêt. En effet, dans son énoncé familier [*2*], chap. IV, le théorème de section n'est certainement pas vrai et il y a maintes façons de s'en rendre compte. Par exemple, en supposant qu'il soit vrai, la démonstration donnée dans [*2*], chap. VIII, p. 408, interprétée en clef bidimensionnelle, démontrerait que l'inégalité maximale de Doob pour martingales ou surmartingales a lieu et nous savons que ce n'est pas possible. Cela dit, on peut se demander si un théorème concluant à l'existence d'un temps d'arrêt, resp. temps d'arrêt prévisible τ, tel que $P\{ \omega : (\tau(\omega), \omega) \in A \} > 0$ pour A optionnel, resp. prévisible, et non évanescent est plausible. A noter, au passage, que dans de nombreuses applications, c'est sous cette forme que le théorème de section intervient. Dans le cas d'un ensemble de paramètres discret, la réponse à notre question est banalement affirmative (prendre $\tau \equiv t$ pour un $t \in \mathbb{R}_+^2$ approprié). Dans le cas général, elle est toutefois négative, comme le montre l'exemple suivant. Soient $(B^1_{t'})_{t' \in \mathbb{R}_+}$ et $(B^2_{t''})_{t'' \in \mathbb{R}_+}$ deux mouvements browniens définis sur $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$, resp. $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Désignons par $(\mathscr{F}^1_{t'})_{t' \in \mathbb{R}_+}$ et $(\mathscr{F}^2_{t''})_{t'' \in \mathbb{R}_+}$ les filtrations naturelles associées aux deux processus et posons $t = (t', t'')$, $\omega = (\omega', \omega'')$, ainsi que $B_t = (B^1_{t'}, B^2_{t''})$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $P = P_1 \times P_2$, $\mathscr{F} \overset{P}{=} \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_t \overset{P}{=} \mathscr{F}^1_{t'} \times \mathscr{F}^2_{t''}$ ($\overset{P}{=}$ signifiant qu'on prend également en compte les ensembles P-négligeables). Désignons en outre par A l'ensemble prévisible (donc optionnel) $\{ (t, \omega) : B^1_{t'}(\omega') - B^2_{t''}(\omega'') = a \}$, où a est un point non nul quelconque de $\mathbb{R}^3$. Pour P_2-presque tout ω'', l'image $I(\omega'')$ de $t'' \to B^2_{t''}(\omega'')$ est de capacité positive, donc l'image de $t' \to B^1_{t'}(\omega')$ rencontre $I(\omega'') + a$ avec P_1-probabilité positive. Nous en concluons que A n'est pas évanescent. Supposons qu'il existe un temps d'arrêt τ tel que $P\{ \omega : (\tau(\omega), \omega) \in A \} > 0$. Pour tout $x', x'' \in \mathbb{R}^3$, posons

$$f(x', x'') = \begin{cases} 1/\| x' - x'' - a \|, & \text{si} \quad x' - x'' \neq a, \\ \infty, & \text{si} \quad x' - x'' = a. \end{cases}$$

Alors $f_n = f \wedge n$ est une fonction séparément surharmonique positive et continue, donc $(f_n(B_t))_{t \in \mathbb{R}_+^2}$ est une surmartingale positive et continue et une application du théorème d'arrêt (qui se déduit facilement du théorème homologue ordinaire, du fait que la filtration est du type produit) nous donne

$$\infty > f(0) \geqq f_n(0) = E\{ f_n(B_0) \} \geqq E\{ f_n(B_\tau) \}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous en concluons que $E\{f(B_\tau)\} < \infty$, ce qui est impossible, car $f(B_\tau) = \infty$ sur $\{\omega : (\tau(\omega), \omega) \in A\}$.

A la lumière de l'exemple qui précède et en vue du but que nous poursuivons, nous sommes amenés à distinguer une classe d'ensembles « petits » qui contient la classe des ensembles évanescents et en joue le rôle dans le cas bidimensionnel qui nous intéresse.

DÉFINITION. — Un ensemble optionnel A est appelé *ensemble mince*, s'il ne rencontre aucun graphe de temps d'arrêt, autrement dit, si $P\{\omega : (\tau(\omega), \omega) \in A\} = 0$ pour tout temps d'arrêt τ.

A noter que si A est mince, $P\{\omega : (t, \omega) \in A\} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^2$, ce qui implique que si deux processus coïncident en dehors d'un ensemble mince, alors ils sont une modification l'un de l'autre. A noter aussi que l'ensemble des infinis d'une surmartingale forte optionnelle (voir définition ci-dessous), à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, est mince et non pas évanescent comme dans le cas unidimensionnel. Finalement, on remarquera que la projection optionnelle d'un processus est unique à un ensemble mince près.

La notion de surmartingale forte optionnelle est définie comme dans le cas unidimensionnel [*2*], chap. VIII, appendice 1. S'agissant d'une notion importante pour notre note, nous en reproduisons ici la définition.

DÉFINITION. — Un processus optionnel S est appelé *surmartingale forte optionnelle*, si S_τ est intégrable pour tout temps d'arrêt borné τ et si $E\{S_\tau \mid \mathscr{F}_\sigma\} \leqq S_\sigma$ pour tout couple de temps d'arrêt σ et τ tels que $\sigma \leqq \tau$.

Dans la suite, nous n'aurons à faire qu'à des surmartingales fortes optionnelles positives. Pour de tels processus, l'inégalité de la définition vaut aussi pour des temps d'arrêt non bornés, à condition de poser $S_\infty \equiv 0$. La preuve de cette affirmation découle du fait que tout temps d'arrêt τ est limite (stationnaire sur $\{\tau < \infty\}$) d'une suite croissante de temps d'arrêt bornés, cela étant établi dans [*4*], où se trouve également la démonstration du théorème d'arrêt de Doob dans le cas d'un ensemble de paramètres bidimensionnels discret. Par un passage à la limite, ce théorème nous permet d'ailleurs de conclure qu'une surmartingale positive càdlàg est une surmartingale forte optionnelle.

Exactement comme dans le cas unidimensionnel, un processus mesurable X est dit *appartenir à la classe* (D), si la famille des variables aléatoires X_τ, τ parcourant l'ensemble des temps d'arrêt bornés, est uniformément intégrable. Si X appartient à la classe (D) et X_∞ est posé $\equiv 0$, la famille obtenue en faisant parcourir à τ tous les temps d'arrêt est aussi uniformément intégrable, puisque tout temps d'arrêt peut être approché par des temps d'arrêt bornés, comme il est dit ci-dessus.

Voici maintenant le théorème de Mertens [*1*] [*2*], chap. VIII, appendice 1, étendu au cas bidimensionnel.

THÉORÈME. — Soit X un processus optionnel appartenant à la classe (D).

a) Il existe une surmartingale forte optionnelle positive S telle que

$$S_\tau = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma:\sigma \geqq \tau} E\{ X_\sigma \mid \mathscr{F}_\tau \},$$

pour tout temps d'arrêt τ.

b) Aux ensembles minces près, S est la plus petite surmartingale forte optionnelle positive qui majore X.

Démonstration. — La deuxième conclusion se démontre exactement comme dans le cas unidimensionnel [*2*], chap. VIII, p. 434. Nous nous limitons donc à la démonstration de la première. Bien évidemment, il suffit de démontrer l'égalité pour les τ finis, aussi réserverons-nous la lettre τ pour désigner de tels temps d'arrêt.

Comme dans le cas unidimensionnel, nous allons d'abord établir que

$$S(\tau) = X_\tau \vee Y(\tau), \tag{1}$$

où

$$S(\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma:\sigma \geqq \tau} E\{ X_\sigma \mid \mathscr{F}_\tau \} \qquad \text{et} \qquad Y(\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma:\sigma > \tau} E\{ X_\sigma \mid \mathscr{F}_\tau \}.$$

A cet effet, nous posons $\rho = \sigma$ sur $\{ \sigma > \tau \}$ et $\rho = \infty$ sur $\{ \sigma = \tau \}$. Alors ρ est un temps d'arrêt $> \tau$ et $E\{ X_\sigma \mid \mathscr{F}_\tau \} \leqq X_\tau \vee E\{ X_\rho \mid \mathscr{F}_\tau \}$. En prenant le supremum essentiel sur tous les temps d'arrêt $\sigma \geqq \tau$ au premier membre et sur tous les temps d'arrêt $\rho > \tau$ au second membre, il en résulte que $S(\tau) \leqq X_\tau \vee Y(\tau)$. L'inégalité opposée étant évidente, l'égalité s'ensuit.

Dans le cas unidimensionnel, la démonstration du théorème n'en demande pas plus : si (Y_t) est une version càdlàg du processus $(Y(t))$ (qui est une surmartingale continue à droite dans L^1), le processus S défini, pour tout (t, ω), par $S_t(\omega) = X_t(\omega) \vee Y_t(\omega)$ répond aux exigences du théorème. Dans le cas bidimensionnel, les choses se compliquent un peu, du fait de l'absence de versions càdlàg des surmartingales d'une part (même bornée, une surmartingale peut avoir des discontinuités oscillatoires en tout t) et de la non-appartenance à $\mathscr{F}_\tau$ d'ensembles tels que $\{ \sigma' > \tau', \sigma'' > \tau'' \}$ d'autre part.

Pour parer à ces inconvénients, nous allons décomposer $Y(\tau)$ en trois termes ; plus précisément, nous allons démontrer que

$$Y(\tau) = Y^+(\tau) \vee Y^1(\tau) \vee Y^2(\tau), \tag{2}$$

où
$$Y^+(\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma:\sigma'>\tau',\sigma''>\tau''} E\{X_\sigma \mid \mathscr{F}_\tau\},$$
$$Y^1(\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma:\sigma'>\tau',\sigma''\geqslant\tau''} E\{X_\sigma \mid \mathscr{F}_\tau\}, \qquad Y^2(\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma:\sigma'\geqslant\tau',\sigma''>\tau''} E\{X_\sigma \mid \mathscr{F}_\tau\}.$$

Entre les deux membres de (2), l'inégalité $\geqq$ est visiblement correcte, de sorte qu'il nous suffit de prouver l'inégalité opposée. A cet effet, nous considérons une suite décroissante de temps d'arrêt (finis) $\tau_n > \tau$ qui converge (p. s.) vers τ et nous posons

$$F^1 = \lim_n \inf \{ \tau_n'' = \tau'' \}, \qquad F^2 = \lim_n \inf \{ \tau_n' = \tau' \}, \qquad F^+ = \Omega - F^1 - F^2.$$

Il est clair que F^+, F^1 et F^2 sont des éléments de $\mathscr{F}_{\tau+(\varepsilon,\varepsilon)}$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc de $\mathscr{F}_\tau$. Si nous montrons que

$$(3) \qquad \lim_n I_{F^+} Y(\tau_n) = I_{F^+} Y^+(\tau) \quad \text{et} \quad \lim_n I_{F^i} Y(\tau_n) = I_{F^i} Y^i(\tau), \quad i = 1, 2,$$

il s'ensuivra que

$$(4) \quad \lim_n Y(\tau_n) = I_{F^+} Y^+(\tau) + I_{F^1} Y^1(\tau) + I_{F^2} Y^2(\tau) \leqq Y^+(\tau) \vee Y^1(\tau) \vee Y^2(\tau).$$

Comme F^+, F^1 et F^2 appartiennent à $\mathscr{F}_\tau$, nous voyons aussitôt qu'il n'y a pas de restriction de la généralité en admettant que ces trois ensembles soient l'espace Ω tout entier. En outre, la démonstration dans les trois cas étant analogue, nous nous limiterons à considérer le premier, c'est-à-dire celui où $\tau_n' > \tau'$ et $\tau_n'' > \tau''$. Directement de la définition de $Y^+(\tau)$ et $Y(\tau_n)$, et exactement comme dans le cas unidimensionnel [*2*], chap. VIII, p. 433, nous déduisons que $\{ Y^+(\tau), \ldots, Y(\tau_2), Y(\tau_1) \}$ est une surmartingale uniformément intégrable. La limite $\lim_n Y(\tau_n)$ existe donc p. s. et dans L^1 et pour l'identifier à $Y^+(\tau)$ il nous suffit de démontrer que

$$\lim_n E\{ Y(\tau_n) \} \geqq E\{ Y^+(\tau) \}.$$

En vertu de la définition de $Y^+(\tau)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un temps d'arrêt σ tel que $\sigma' > \tau'$, $\sigma'' > \tau''$ et $E\{X_\sigma\} \geqq E\{Y^+(\tau)\} - \varepsilon$. Pour tout n, soit σ_n le temps d'arrêt $= \sigma$ sur $\{\tau_n < \sigma\}$ et $= \infty$ sur $\{\tau_n < \sigma\}^c$. Alors σ_n converge en décroissant et stationnairement vers σ ($\sigma_n(\omega) = \sigma(\omega)$ pour tout n suffisamment grand), ce qui entraîne que $\lim_n E\{X_{\sigma_n}\} = E\{X_\sigma\}$. D'autre part, $E\{X_{\sigma_n}\} \leqq E\{Y(\tau_n)\}$, puisque $\sigma_n > \tau_n$, donc $E\{X_\sigma\} \leq \lim_n E\{Y(\tau_n)\}$. Par le choix de σ et du fait que ε est arbitraire, nous en concluons que $E\{Y^+(\tau)\} \leqq \lim_n E\{Y(\tau_n)\}$.

Nous allons maintenant démontrer que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathscr{T}} \left(\lim_n \mathrm{Y}(\tau_n)\right) \geqq \mathrm{Y}(\tau)\,, \tag{5}$$

où $\mathscr{T}$ désigne l'ensemble des suites décroissantes de temps d'arrêt (finis) $\tau_n > \tau$ qui convergent (p. s.) vers τ. En vertu de (4), cela implique (2). Nous constatons d'abord que la famille $(\lim_n \mathrm{Y}(\tau_n))_{(\tau_n)\in\mathscr{T}}$ est filtrante croissante, car si $(\tau_n^1), (\tau_n^2) \in \mathscr{T}$ et si (τ_n) est la suite définie par

$$\tau_n = \begin{cases} \tau_n^1 & \text{sur} \quad \mathrm{F} = \{ \lim_k \mathrm{Y}(\tau_k^1) \geqq \lim_k \mathrm{Y}(\tau_k^2) \}\,, \\ \tau_n^2 & \text{sur} \quad \mathrm{F}^c\,, \end{cases}$$

alors $(\tau_n) \in \mathscr{T}$ et

$$\mathrm{Y}(\tau_n) = \mathrm{I_F}\mathrm{Y}(\tau_n^1) + \mathrm{I_{F^c}}\mathrm{Y}(\tau_n^2)\,,$$

ce qui implique que

$$\lim_n \mathrm{Y}(\tau_n) = \mathrm{I_F} \lim_n \mathrm{Y}(\tau_n^1) + \mathrm{I_{F^c}} \lim_n \mathrm{Y}(\tau_n^2) \geqq (\lim_n \mathrm{Y}(\tau_n^1)) \vee (\lim_n \mathrm{Y}(\tau_n^2))\,.$$

L'inégalité (5) sera donc établie, si nous montrons que

$$\sup_{\mathscr{T}} \lim_n \mathrm{E}\{ \mathrm{Y}(\tau_n) \} \geqq \mathrm{E}\{ \mathrm{Y}(\tau) \}\,.$$

En raison de la définition de $\mathrm{Y}(\tau)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un temps d'arrêt $\sigma > \tau$ tel que $\mathrm{E}\{ \mathrm{X}_\sigma \} \geqq \mathrm{E}\{ \mathrm{Y}(\tau) \} - \varepsilon$. Considérons un chemin aléatoire croissant $u \to \Gamma_u$, $u \in \mathbb{R}_+$, tel que $\Gamma_0 = \tau$, $\Gamma_u > \tau$ si $u > 0$ et $\lim_{u\to\infty} \Gamma_u = \sigma$ p. s. ([*4*], proposition 2.1) et posons $\tau_n = \Gamma_{1/n}$. Alors $(\tau_n) \in \mathscr{T}$ et

$$\lim_n \mathrm{E}\{ \mathrm{Y}(\tau_n) \} \geqq \mathrm{E}\{ \mathrm{Y}(\tau) \} - \varepsilon\,.$$

Puisque ε est arbitraire, la conclusion s'ensuit.

Pour terminer la démonstration du théorème, il nous reste à démontrer l'existence de trois processus mesurables (Y_t^+), (Y_t^1) et (Y_t^2) tels que $\mathrm{Y}_\tau^+ = \mathrm{Y}^+(\tau)$, $\mathrm{Y}_\tau^1 = \mathrm{Y}^1(\tau)$ et $\mathrm{Y}_\tau^2 = \mathrm{Y}^2(\tau)$, pour tout temps d'arrêt fini τ, car, en désignant par $(\mathring{\mathrm{Y}}_t^+)$, $(\mathring{\mathrm{Y}}_t^1)$ et $(\mathring{\mathrm{Y}}_t^2)$ leurs projections optionnelles respectives et en posant

$$\mathrm{S}_t(\omega) = \mathrm{X}_t(\omega) \vee \mathring{\mathrm{Y}}_t^+(\omega) \vee \mathring{\mathrm{Y}}_t^1(\omega) \vee \mathring{\mathrm{Y}}_t^2(\omega)\,,$$

pour tout (t, ω), (S_t) sera alors un processus qui satisfait aux exigences de la conclusion *a*) du théorème, la propriété de surmartingale étant une conséquence directe ([*2*], chap. VIII, p. 433) de la définition de $\mathrm{S}(\tau)$ qui figure sous (1). Nous ne ferons la démonstration que pour le cas de (Y_t^1), car les deux autres cas se laissent traiter de manière similaire. Pour tout $t' \in \mathbb{R}_+$, considérons un processus $(\mathrm{Z}_{t''}(t'))_{t''\in\mathbb{R}_+}$, mesurable de (t'', ω) et tel que $Z_{\tau''}(t') = Y^1(t', \tau'')$ pour tout temps d'arrêt fini τ'' de la filtration $(\mathscr{F}_{t',t''})_{t''\in\mathbb{R}_+}$ ([2], chap. VIII, p. 434). Pour tout entier positif n posons

$$Z^n_{t''}(t') = Z_{t''}(t'_{(n)}),$$

où $\quad t'_{(n)} = \dfrac{k+1}{2^n} \quad$ si $\quad \dfrac{k}{2^n} \leqslant t' < \dfrac{k+1}{2^n}, \quad = \dfrac{1}{2^n} \quad$ si $\quad t' = 0$.

Pour tout $t = (t', t'') \in \mathbb{R}^2_+$, posons ensuite

$$Y^1_t = \liminf_n Z^n_{t''}(t').$$

Le processus (Y^1_t) ainsi défini est mesurable et si $\tau = (\tau', \tau'')$ est un temps d'arrêt fini,

$$Y^1_\tau = \liminf_n Z^n_{\tau''}(\tau') = \liminf_n Y^1(\tau'_{(n)}, \tau'').$$

Mais $(\tau'_{(n)}, \tau'')$ est un temps d'arrêt tel que $\tau'_{(n)} > \tau'$ et $\lim_n (\tau'_{(n)}, \tau'') = \tau$, donc, d'après (3),

$$\liminf_n Y^1(\tau'_{(n)}, \tau'') = \lim_n Y^1(\tau'_{(n)}, \tau'') = Y^1(\tau),$$

ce qui prouve que $Y^1_\tau = Y^1(\tau)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-F. MERTENS, Théorie des processus stochastiques généraux, applications aux surmartingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **22**, 1972, p. 45-68.

[2] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, Probabilités et potentiel, Chap. I-IV et V-VIII. Hermann, Paris, 1975 et 1980.

[3] R. CAIROLI et J. B. WALSH, Stochastic integrals in the plane. *Acta mathematica*, t. **134**, 1975, p. 111-183.

[4] J. B. WALSH, Optional increasing path. Colloque ENST-CNET, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 863, Springer Verlag, 1981.

(Manuscrit reçu le 14 mai 1981)