ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CATHERINE DE ZELICOURT

# Une méthode de martingales pour la convergence d'une suite de processus de sauts markoviens vers une diffusion associée à une condition frontière. Application aux systèmes de files d'attente

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 17, nº 4 (1981), p. 351-376
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_4_351_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section B :
Vol. XVII, n° 4, 1981, p. 351-375. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Une méthode de martingales pour la convergence d'une suite de processus de sauts markoviens vers une diffusion associée à une condition frontière. Application aux systèmes de files d'attente

par

**Catherine DE ZELICOURT**
Centre de Mathématiques Appliquées (ERA, CNRS 747),
École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France. Tél. : 941-82-00

ABSTRACT. — We describe a convenient method for proving weak convergence of a sequence of markovian time-homogeneous pur jump processes $X^n_\bullet$ to a diffusion process in a closed subset $\overline{G}$ of $\mathbb{R}^p$ with a boundary $\partial G$ which is piecewise smooth.

Basically it is shown that the limit solves a continuous sub-martingale problem.

Because the state space has a boundary, we think it is not very adapted to apply the classical approach developped by Kurtz and based on semi-group theory: in particular, it is difficult to find a dense class of test functions. With our martingale and sub-martingale approach, we do not need to deal with this problem and the proofs are relatively simple.

We study also an important example in queueing theory, which is not of Jackson-type.

## INTRODUCTION

Déjà de nombreux auteurs se sont intéressés à la convergence d'une suite de processus de sauts vers un processus continu, convergence en probabilité uniforme ou convergence faible.

Du point de vue pratique, l'intérêt de tels résultats est évident : remplacer un modèle stochastique dont l'analyse est difficile par un modèle plus simple. Dans [*9*] Kurtz approche le nombre de particules d'une population, « lorsque ce nombre est suffisamment grand », par un modèle déterministe. Les théoriciens des files d'attente, Kobayashi [*7*], Reiman [*19*], Lemoine [*12*], Iglehart [*6*], Gelenbe [*5*], ... développent la méthode dite d'approximation-diffusion lorsque la file considérée est proche de la saturation.

L'objet de cet article est d'établir un théorème de convergence d'une suite de processus de sauts purs, markoviens, homogènes dans le temps, à valeurs dans un fermé $\overline{G}$ de $\mathbb{R}^p$ de frontière régulière par morceaux, vers une diffusion continue, convergence au sens faible dans l'espace de Skorokhod correspondant.

## MÉTHODES ET OUTILS

Le principe physique d'approximation est celui de Feller [*4*] : à partir d'un processus de saut donné on procède à une diminution de l'amplitude des sauts, à une augmentation du nombre de sauts par unité de temps et à une compensation jusqu'à saturation entre sauts positifs et négatifs.

Ce changement d'espace d'états et cette dilatation de l'échelle des temps sont à la base de l'approximation du mouvement brownien par des marches aléatoires, exprimée dans le théorème de Donsker [*1*]. Dans un tel cas de processus à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^p$ tout entier, la méthode utilisée par Kurtz [*11*] consiste à montrer :

1) La compacité faible ou étroite de la suite des lois correspondantes.

2) La convergence des générateurs infinitésimaux des processus de sauts vers le générateur infinitésimal d'une diffusion, identifié pour un ensemble de fonctions dense; le théorème de Trotter-Kato ([*22*], [*8*]) implique alors la convergence faible des distributions finies des processus de sauts vers celles de la diffusion. Cette diffusion est alors unique et la convergence faible de la suite des processus est obtenue.

La méthode que nous utilisons ici dans le cas de processus avec frontière suit ces deux étapes, mais

1) nous simplifions les problèmes de compacité en utilisant des résultats récents sur la compacité des semimartingales,

2) au lieu de manipuler les semigroupes des processus, nous caractérisons chacune des lois comme solution d'un problème de martingale ou de sous-martingale au sens de [*13*] et [*3*].

Cette méthode semble beaucoup plus appropriée et d'usage plus souple dans ce nouveau cadre. D'autre part on peut espérer l'étendre au cas non markovien.

## NOTATIONS ET RAPPELS

Soit G un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ dont la frontière est la réunion d'un nombre fini de variétés suffisamment régulières (au sens de [3]) de dimension $p - 1$.

L'espace $\Omega^0$ des trajectoires est l'ensemble $\mathscr{D}(\mathbb{R}^+, \overline{G})$ des applications continues à droite et limitées à gauche. Il est muni de la topologie de Skorokhod et de la tribu borélienne $\mathscr{F}^0$ associée. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ désigne le processus canonique sur $(\Omega^0, \mathscr{F}^0)$, $(\mathscr{F}^0_t)_{t\geqslant 0}$ la filtration associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ considérons l'opérateur intégro-différentiel

$$L_n f(x) = f'(x).b_n(x) + \int_{u\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}} (f(x+u) - f(x) - 1_{(|u|\leqslant 1)}f'(x).u)S_n(x, du)$$

où $\begin{cases} b_n : \overline{G} \to \mathbb{R}^p \text{ est borélienne, bornée sur tout compact} \\ S_n \text{ est un noyau positif borélien défini sur } \overline{G} \times (\mathbb{R}^p\setminus\{0\}) \text{ qui intègre} \\ |u|^2\Lambda 1 \text{ uniformément sur tout compact; de plus pour tout } x \text{ le sup-} \\ \text{port de la mesure } S_n(x, .) \text{ est contenu dans l'ensemble } \{u : x + u \in \overline{G}\}. \end{cases}$

Pour un état quelconque $x_0 \in \overline{G}$ une probabilité $P^n_{x_0}$ sur

$$(\Omega^0, \mathscr{F}^0, (X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathscr{F}^0_t)_{t\geqslant 0})$$

est dite solution au problème des martingales issu de $x_0$ lorsque ([*13*]) :

*a*) $P^n_{x_0}(X_0 = x_0) = 1$.

*b*) $(\forall f \in C^\infty_b(\overline{G}))$ ou $(\forall f \in C^2_c(\overline{G}))$ ou $(\forall f \in C^2_b(\overline{G}))$

$$f(X_t) - f(x_0) - \int_0^t L_n f((X_s)ds$$

est une $P^n_{x_0}$ martingale locale.

*b*) Peut être remplacé par *b'*) :

*b'*) $M^n_t = X_t - x_0 - \int_0^t b_n(X_s)ds - \sum_{0<s\leqslant t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|>1\}}$ est une $P^n_{x_0}$ martingale locale vectorielle telle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$ la martingale réelle $\theta.M^n$ est localement de carré intégrable de processus croissant

$$\langle \theta.M^n, \theta.M^n \rangle_t = \int_0^t ds \int_{|u|\leqslant 1} (\theta.u)^2 S_n(X_s, du).$$

Il est montré dans [*13*] que l'existence et l'unicité de $P^n_x$ pour tout $x \in \overline{G}$ implique pour le processus $(\Omega^0, \mathscr{F}^0_t, X_t, P^n_x)$ d'être fortement markovien.

Nous allons établir la compacité étroite relative de la suite $(P^n_{x_0})_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie, pour un $x_0$ quelconque dans $\overline{G}$, puis donner une propriété commune à toutes les valeurs d'adhérence de cette suite en termes de solution d'un même problème de sous-martingales continues, et enfin démontrer l'unicité d'une telle valeur d'adhérence $P_{x_0}$.

## 1. RELATIVE COMPACITÉ FAIBLE DE $(P^n_{x_0})_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $x_0 \in \overline{G}$.

THÉORÈME 1. — *H1* : $(\exists\delta_n \to 0)P^n_{x_0}\{\sup_{t\geqslant 0} |\Delta X_t| > \delta_n\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

*H2* : *la suite* $n \to \int_{|u|\leqslant 1} uu^*S_n(.,du)$ *est uniformément bornée sur* $\overline{G}$.

*H3* : *la suite* $n \to b_n(.)$ *est uniformément bornée sur* G.

*H4* : $(\forall t)(\exists K_t > 0)(K_t \xrightarrow{t\to 0} 0)(\forall(s,t), s \leqslant t)(\forall x \in \overline{G})$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E^n_x\left(\int_s^t |b_n(X_v)|\, 1_{\{X_v\in\partial G\}}dv\right) \leqslant K_{(t-s)}$$

CONCLUSION. — $(P^n_{x_0})_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement relativement compacte.

De plus toute valeur d'adhérence $P_{x_0}$ est telle que $P_{x_0}(X_0 = x_0) = 1$, et $P_{x_0}$ presque toutes les trajectoires du processus X sont continues.

*Démonstration.* — Le problème des martingales sous sa forme *b'*) (cf. Notations et rappels) fait apparaître la suite de semi-martingales $(X, P^n_{x_0})$ :

$$X_t - x_0 = M^n_t + \int_0^t b_n(X_s)1_{\{X_s\in G\}}ds + \sum_{0<s\leqslant t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|>1\}} + \int_0^t b_n(X_s)1_{\{X_s\in\partial G\}}ds$$

Nous allons utiliser des résultats de compacité de [*1*], [*15*] et [*18*] sous une forme adaptée à notre problème.

La suite $(X, P^n_{x_0})_n$ est C-tendue si

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\eta > 0\ \forall N \in \mathbb{N}^*$$

*i*) $\exists a > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ P^n_{x_0}[|X_0| > a] \leqslant \eta$.

*ii*) $\exists\delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ P^n_{x_0}[\sup_{\substack{s,t\in[0,N]\\|t-s|<\delta}} |X_t - X_s| \geqslant \varepsilon] \leqslant \eta$.

La condition suffisante suivante, due à Aldous, pour que $(X, P^n_{x_0})_n$ soit D-tendue, est étudiée dans [*15*] :

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\eta > 0\ \forall N \in \mathbb{N}^*$$

*i'*) $\exists a > 0 \sup_{n\in\mathbb{N}} P^n_{x_0}[\sup_{0\leq t\leq N} |X_t| > a] \leq \eta$.

*ii'*) $\exists\delta > 0 \varlimsup_{n\to\infty} \sup_{s\in[0,\delta]} P^n_{x_0}[|X_{T+s} - X_T| \geq \varepsilon] \leq \eta$ pour tout temps d'arrêt T sur $(\Omega^0, (\mathscr{F}^0_t)_{t\geq 0})$.

Enfin, citons le corollaire II-3.6 de [*18*] :

Si $(M^n, P^n_{x_0})_n$ est une suite de martingales locales sur $\Omega^0$ possédant les deux propriétés :

*i''*) il existe une suite $c_n \to 0$ tq $P^n_{x_0}[\sup_{t\geq 0} |\Delta M^n_t| > c_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

*ii''*) il existe $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante tq $g(u) \searrow 0$ *qd* $u \searrow 0$, et

$$P^n_{x_0}[\sup_{s,t} |\langle M^n, M^n\rangle_t - \langle M^n, M^n\rangle_s| > g(|t-s|)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors $(M^n, P^n_{x_0})_n$ est C-tendue.

On sait qu'une somme de suites de processus D-tendues n'est pas nécessairement D-tendue. Mais si chacune des suites est C-tendue sauf peut-être l'une d'entre elles, alors la somme est D-tendue.

C'est le cas qui se produit ici : $(X, P^n_{x_0})_n$ vérifie à l'évidence *i*) et

$$\left(\int_0^\cdot b_n(X_s)1_{\{X_s\in G\}}ds,\ P^n_{x_0}\right)_n \text{ vérifie } ii) \text{ grâce à } H3,$$

et

$$\left(\sum_{0<s\leq \cdot} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|>1\}},\ P^n_{x_0}\right) \text{ grâce à } H1.$$

Pour le processus $\int_0^\cdot b_n(X_u)1_{\{X_u\in\partial G\}}du$, si T un temps d'arrêt quelconque, l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff nous amène au calcul suivant :

$$\begin{aligned} E^n_{x_0}\left[\int_T^{T+s} |b_n(X_u)|\, 1_{(X_u\in\partial G)}du\right] &= E^n_{x_0}\left[E^n_{x_0}\left[\int_T^{T+s} |b_n(X_u)|\, 1_{(X_u\in\partial G)}du/\mathscr{F}^0_T\right]\right] \\ &= E^n_{x_0}\left[E^n_{X_T}\left(\int_0^s |b_n(X_u)|\, 1_{(X_u\in\partial G)}du\right)\right] \end{aligned}$$

puisque le processus X est markovien pour les tribus $\mathscr{F}^0_t$ et les lois $P^n_{x_0}$, et l'hypothèse *H4* permet de conclure.

Enfin l'expression de $\langle M^n, M^n\rangle_t = \int_0^t\int_{|u|\leq 1} uu^* S_n(X_s, du)$ et l'hypothèse *H2* montrent que $\langle M^n, M^n\rangle$ est C-tendue.

La suite des semi-martingales $M^n + \int_n^\cdot b_n(X_u)1_{(X_u\in\partial G)}du$ est alors D-tendue par un résultat de [*18*].

$(X, P^n_{x_0})$ est donc finalement D-tendue, et par conséquent C-tendue grâce à l'hypothèse *H1* sur les sauts. ■

## 2. IDENTIFICATION DES VALEURS D'ADHÉRENCE DE $(P^n_{x_0})_{n\in\mathbb{N}}$ AUX SOLUTIONS D'UN PROBLÈME DE SOUS-MARTINGALES CONTINUES

C'est la formulation *b*) du problème des martingales (cf. Notations et rappels) qui intervient maintenant pour caractériser les $P^n_{x_0}$. En fait nous allons plutôt utiliser un problème de sous-martingales équivalent. Cette méthode permet d'éviter l'utilisation de la notion de temps local.

Grâce à la formule de Ito, toute solution $P^n_{x_0}$ du problème des martingales *b*) (cf. Notations et rappels) est solution des problèmes suivants :

$$\forall f \in C_b^{2,1}(\overline{G} \times \mathbb{R}_+) f(X_t, t) - f(x_0, 0) - \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + L_n f(X_s, s)\right] ds$$

est une $P^n_{x_0}$ martingale locale, et donc :

$$(\forall f \in C_b^{2,1}(\overline{G} \times \mathbb{R}_+))\left(\forall t \geqslant 0, \forall x \in \partial G, \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + L_n f(x, t) \geqslant 0\right)$$

$$f(X_t, t) - f(x_0, 0) - \int_0^t 1_G(X_s)\left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + L_n f(X_s, s)\right] ds$$

est une $P^n_{x_0}$ sous-martingale ; $\left(\text{si } \frac{\partial f}{\partial t} + L_n f = 0 \text{ sur } \partial G \times \mathbb{R}_+\text{, c'est une}\right.$ martingale locale).

Alors, pour $x_0 \in \overline{G}$ on a le théorème :

THÉORÈME 2. — *Nous faisons les hypothèses H1 et H4 précédentes ainsi que les suivantes :*

$$\text{A1} \quad \left.\begin{cases} \displaystyle\int_{|u|>1} S_n(.\,, du) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \displaystyle\int_{|u|\leqslant 1} |u|^3 S_n(.\,, du) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{cases}\right\} \textit{uniformément sur } \overline{G}.$$

*A2 : Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *les restrictions à* G *des fonctions* $b_n$ *et* $\int_{|u|\leqslant 1} uu^* S_n(.\,, du)$ *admettent un unique prolongement par continuité à* $\overline{G}$ *tout entier, noté respectivement* $\overset{0}{b}_n$ *et* $\int_{|u|\leqslant 1} uu^* \overset{0}{S}_n(.\,, du)$.

$$\text{A3} \quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\overset{0}{b}_n(.) \xrightarrow{n\to\infty} b(.) \\ &\int_{|u|\leqslant 1} uu^* \overset{0}{S}_n(.\,, du) \xrightarrow{n\to\infty} a(.) \end{aligned}\right\} \textit{uniformément sur } \overline{G} \\ b : \overline{G} \to \mathbb{R}^p \textit{ et } a : \overline{G} \to \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R}) \textit{ bornées,} \\ a \quad \textit{strictement elliptique uniformément en } x \in G. \end{cases}$$

*A4* : *la suite* $n \to |b_n|$ *converge dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *uniformément sur* $\partial G$.

*On note la limite* $\frac{\gamma}{\delta}$, $(\gamma, \delta)$ *étant un couple de fonctions définies sur* $\partial G$ *et prenant ses valeurs dans* $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

*A5* : *la suite matricielle* $n \to \int_{|u| \leq 1} uu^* S_n(., du)$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $(\delta^{-1}(0))^c$ *et est uniformément bornée sur* $\delta^{-1}(0)$.

*A6* : *la suite vectorielle* $n \to \frac{b_n}{|b_n|}$ *converge uniformément vers* V *sur* $(\gamma^{-1}(0))^c$, V *définissant un champ de vecteurs intérieurs à* G.

*A7 (hypothèse de « régularité » sur la frontière)* :

*Il existe une fonction* $g \in C_b^{2,1}(\bar{G} \times \mathbb{R}_+)$ *telle que l'expression* $\delta \frac{\partial g}{\partial t} + \gamma \frac{\partial g}{\partial V}$ *soit minorée uniformément sur* $\partial G \times \mathbb{R}_+$ *par une constante strictement positive.*

*Alors : toute valeur d'adhérence* $P_{x_0}$ *de la suite* $(P^n_{x_0})_{n \in \mathbb{N}}$ *est solution du problème des sous-martingales continues issu de* $x_0$ *et associé au sens de* [3] *à l'opérateur de diffusion* L *dans l'ouvert* G *et à la condition frontière* $(\Gamma, \delta)$ *sur* $\partial G$,

*avec*
$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{p} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \Gamma = \gamma \dfrac{\partial}{\partial V} \end{cases}$$

REMARQUES 3. — 1) L'expression de l'opérateur limite sur la frontière fait apparaître trois sortes de condition limite sur $\partial G$ :

une réflexion pure sur $\delta^{-1}(0)$, une absorption sur $\gamma^{-1}(0)$,
une partie élastique sur $(\delta^{-1}(0))^c \cap (\gamma^{-1}(0))^c$.

2) Il est naturel que le vecteur $V(x)$ ne soit défini qu'en des points $x$ où il n'y a pas absorption.

3) *A7* est à vérifier dans chaque cas particulier (cf. 4).

LEMME 4. —
$$E^n_{x_0}\left[\int_0^t 1_{\delta^{-1}(0)}(X_s)ds\right] \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

*Démonstration.* — Cela résulte de *H4* et de la définition de $\delta$ dans *A4*. ■

LEMME 5. — *Pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *il existe une fonction* $C(\varepsilon)$ *qui tend vers* 0 *avec* $\varepsilon > 0$, *telle que :*

$$\varlimsup_{n\to\infty} E^n_{x_0}\left[\int_0^t 1_{G\cap\partial G\varepsilon}(X_s)ds\right] \leqslant C(\varepsilon)$$

*où*
$$\partial G_\varepsilon = \{ x \in \overline{G} : d(x, \partial G) < \varepsilon \}.$$

*Démonstration.* — Nous appliquons la formulation *b*) du $P^n_{x_0}$ problème des martingales avec une fonction $f_\varepsilon$ de $C^3_b(\overline{G})$ appropriée :

$$E^n_{x_0}\Big[f_\varepsilon(X_t) - f_\varepsilon(X_0) - \int_0^t 1_{G\cap(\partial G_\varepsilon)^c}(X_s)L_n f_\varepsilon(X_s)ds - \int_0^t 1_{\partial G}(X_s)f'_\varepsilon(X_s).b_n(X_s)ds$$
$$- \int_0^t 1_{G\cap\partial G_\varepsilon}(X_s)f'_\varepsilon(X_s).b_n(X_s)ds - \int_0^t 1_{\partial G_\varepsilon}(X_s)ds\int_{|u|>1}[f_\varepsilon(X_s+u) - f_\varepsilon(X_s)]\,S_n(X_s, du)$$
$$- \frac{1}{6}\int_0^t 1_{\partial G_\varepsilon}(X_s)ds\int_{|u|\leqslant 1} f'''_\varepsilon(X_s + \theta_{\omega,s,u}u).u^3S_n(X_s, du)$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t 1_{\delta^{-1}(0)}(X_s)f''_\varepsilon(X_s).\left(\int_{|u|\leqslant 1} uu^*S_n(X_s, du)\right)ds$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t 1_{(\delta^{-1}(0))^c}(X_s)f''_\varepsilon(X_s).\left(\int_{|u|\leqslant 1} uu^*S_n(X_s, du)\right)ds\Big]$$
$$= \frac{1}{2}E^n_{x_0}\left[\int_0^t 1_{G\cap\partial G_\varepsilon}(X_s)f''_\varepsilon(X_s).\left(\int_{|u|\leqslant 1} uu^*S_n(X_s, du)\right)ds\right].$$

Le premier membre de l'égalité est majoré par $C(\varepsilon)$ pour $n$ assez grand grâce au lemme 4 et aux hypothèses *A1*, *A3*, *H4*, *A5* du théorème 2, si $f_\varepsilon$ est identiquement nulle sur $G \cap (\partial G_\varepsilon)^c$ et si elle est bornée sur $\partial G_\varepsilon$ ainsi que sa dérivée par une fonction tendant vers 0 avec $\varepsilon$.

Enfin, vu le second membre de l'égalité, il suffit que $f''_\varepsilon$ soit minorée uniformément sur une bande $\partial G_{\frac{\varepsilon}{k}}(k \in \mathbb{N}^*)$ par une constante strictement positive. ■

*Démonstration du théorème 2.* — D'après [*3*] il s'agit d'établir que

$$(\forall f \in C^{2,1}_b(\overline{G}\times\mathbb{R}_+))\left(\forall t \geqslant 0,\ \forall x \in \partial G,\ \delta(x)\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \Gamma f(x, t) \geqslant 0\right)$$
$$f(X_t, t) - f(x_0, 0) - \int_0^t 1_G(X_s)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + Lf(X_s, s)\right)ds$$

est une $P_{x_0}$ sous-martingale continue.

Nous démontrons d'abord ce résultat pour les fonctions $C^{3,1}_b(\overline{G}\times\mathbb{R}_+)$ puis nous utilisons un critère de densité.

Pour simplifier les notations nous supposons que $P^n_{x_0} \Rightarrow P_{x_0}$. La démonstration se fait en plusieurs étapes :

A) Soient $s \leq t$, F positive continue bornée $\mathscr{F}_s$ mesurable.

Nous allons montrer l'inégalité suivante :

$$E_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$\geqslant \varlimsup_{n\to\infty} E^n_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + L_n f(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$

pour toute fonction $f$ de $C_b^{3,1}(\bar{G} \times \mathbb{R}_+)$.

Pour cela nous établissons simultanément les deux résultats suivants :

$$\varlimsup_{n\to\infty} E^n_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + L_n f(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} E^n_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$\leqslant E_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right].$$

*a*) Par les hypothèses *A1* et *A3* et le caractère borné de $f$ et de ses dérivées, $L_n f$ tend vers $Lf$ uniformément sur G, de sorte que :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon)(\forall n \geqslant N_\varepsilon)(\forall(\omega, v) \in \Omega^0 \times ]s, t])$$
$$1_G(X_v(\omega))\left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_v(\omega), v) + L_n f(X_v(\omega), v)\right]$$
$$\geqslant 1_G(X_v(\omega))\left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_v(\omega), v) + Lf(X_v(\omega), v)\right] - \varepsilon$$

donc aussi, pour $n \geq N_\varepsilon$,

$$E^n_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + L_n f(X_v, v)\right)dv\right)\right] - \varepsilon(t-s)E^n_{x_0}(F)$$
$$\leqslant E^n_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right],$$

d'où, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\varlimsup_{n\to\infty} E^n_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + L_n f(X_v, v)\right)dv\right)\right] - \varepsilon(t-s)\varlimsup_{n\to\infty} E^n_{x_0}(F)$$
$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} E^n_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$

et la première égalité est ainsi obtenue.

*b*) Pour la seconde, considérons, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, une fonction $g_\varepsilon$ de $C_b^\infty(\overline{G})$ qui vaut 1 sur $(\partial G_\varepsilon)^c$, 0 sur $\partial G$ et est comprise entre 0 et 1 sur $G \cap \partial G_\varepsilon$

$$E_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$= E_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t g_\varepsilon(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$- E_{x_0}\left[F\int_s^t (1_G - g_\varepsilon)(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right].$$

Les coefficients $a$ et $b$ de l'opérateur L étant bornés, F positive et bornée, $1_G - g_\varepsilon$ positive et majorée par la fonction $1_{G\cap\partial G_\varepsilon}$, on a :

$$E_{x_0}\left[F\int_s^t (1_G - g_\varepsilon)(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right] \leqslant K'E_{x_0}\left[\int_s^t 1_{G\cap\partial G_\varepsilon}(X_v)dv\right].$$

$G \cap \partial G_\varepsilon = \{ x \in G : 0 < d(x, \partial G) < \varepsilon \}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, donc

$$E_{x_0}\left[\int_s^t 1_{G\cap\partial G_\varepsilon}(X_v)dv\right] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E_{x_0}^n\left[\int_s^t 1_{G\cap\partial G_\varepsilon}(X_v)dv\right]$$

et le second membre est lui-même majoré par $C(\varepsilon)$ d'après le lemme 5. D'autre part, la convergence faible de $P_{x_0}^n$ vers $P_{x_0}$, la continuité de $P_{x_0}$ presque toutes les trajectoires du processus canonique (cf. théorème 1) et la continuité et bornitude de toutes les autres fonctions utilisées permettent d'écrire :

$$E_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t g_\varepsilon(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} E_{x_0}^n\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t g_\varepsilon(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$\geqslant \varliminf_{n\to\infty} E_{x_0}^n\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$+ \varliminf_{n\to\infty} E_{x_0}^n\left[F\int_s^t (1_G - g_\varepsilon)(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right].$$

Ainsi, en appliquant une seconde fois le lemme 5 et l'inégalité

$$0 \leqslant 1_G - g_\varepsilon \leqslant 1_{G\cap\partial G_\varepsilon}$$

on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E_{x_0}\left[F\left(f(X_t, t) - f(X_s, s) - \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\right)\right]$$
$$\geqslant -2K'C(\varepsilon) + \varliminf_{n\to\infty} E_{x_0}^n[F(f(X_t, t) - f(X_s, s)$$
$$- \int_s^t 1_G(X_v)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_v, v) + Lf(X_v, v)\right)dv\Big)\Big]$$

d'où la seconde inégalité escomptée.

B) Si $f \in C_b^{3,1}(\overline{G} \times \mathbb{R}_+)$, la formule de Taylor-MacLaurin permet d'écrire, pour $(x, t) \in \partial G \times \mathbb{R}_+$ fixé :

$$\begin{aligned} L_n f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t).b_n(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t).\int_{|u| \leqslant 1} uu^* S_n(x, du) \\ + \int_{|u|>1} [f(x+u, t) - f(x, t)] S_n(x, du) \\ + \frac{1}{6}\int_{|u| \leqslant 1} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x + \theta_{x,u,t}u, t).u^3 S_n(x, du) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(x)\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \delta(x) L_n f(x, t) \xrightarrow{n \to \infty} \delta(x)\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \Gamma f(x, t) \\ \text{uniformément sur } (\delta^{-1}(0))^c \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{1}{|b_n(x)|}\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \dfrac{1}{|b_n(x)|} L_n f(x, t) \xrightarrow{n \to \infty} \delta(x)\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \Gamma f(x, t) \\ \text{uniformément sur } \delta^{-1}(0) \times \mathbb{R}_+. \end{array} \right.$$

C) Soit donc $f \in C_b^{3,1}(\overline{G} \times \mathbb{R}_+)$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel, en tout

$$(x, t) \in \partial G \times \mathbb{R}_+, \ \delta(x)\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \Gamma f(x, t) \geqslant \alpha > 0.$$

Alors, d'après B), pour $n$ assez grand

$$(n \geqslant N_f), \ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + L_n f(x, t)$$

est positif en tout $(x, t)$ de $\partial G \times \mathbb{R}_+$, et l'inégalité établie dans A) permet d'affirmer que :

$$f(X_t, t) - f(x_0, 0) - \int_0^t 1_G(X_s)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + Lf(X_s, s)\right)ds$$

est une $P_{x_0}$ sous-martingale (avec les hypothèses du théorème, à chaque rang $n$ on n'a plus seulement une $P_{x_0}^n$ sous-martingale locale mais une vraie sous-martingale).

D) Soit $f \in C_b^{2,1}(\overline{G} \times \mathbb{R}_+)$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel, sur tout $\partial G \times \mathbb{R}_+$

$$\delta(x)\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \Gamma f(x, t) \geqslant \alpha.$$

Elle peut être approchée uniformément par des fonctions $f_n$ de $C_b^{3,1}(\overline{G} \times \mathbb{R}_+)$ telles que $\dfrac{\partial f_n}{\partial t} + Lf_n$ et $\delta\dfrac{\partial f_n}{\partial t} + \Gamma f_n$ convergent uniformément vers $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{L}f$ et $\delta \dfrac{\partial f}{\partial t} + \Gamma f$. Pour ces fonctions, il existe $\mathrm{N}_\alpha$ tel que

$$(n \geqslant \mathrm{N}_\alpha) \Rightarrow \left(\delta \frac{\partial f_n}{\partial t} + \Gamma f_n \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0\right).$$

L'utilisation de C) et du théorème de convergence dominée étendent ainsi le résultat de $\mathrm{P}_{x_0}$ sous-martingalité à toutes les fonctions de $\mathrm{C}_b^{2,1}(\overline{\mathrm{G}} \times \mathbb{R}_+)$ dont la condition frontière limite est uniformément minorée.

E) Soit $f \in \mathrm{C}_b^{2,1}(\overline{\mathrm{G}} \times \mathbb{R}_+)$ telle que $\delta \dfrac{\partial f}{\partial t} + \Gamma f \geqslant 0$ sur $\partial \mathrm{G} \times \mathbb{R}_+$ et soit $g$ vérifiant l'hypothèse *H8*.

On applique D) à la fonction $h_k = f + kg$, $k \in \mathbb{R}_+^*$. Le théorème de convergence dominée, utilisé quand $k \to 0$, permet de conclure. ■

## 3. UNICITÉ DE LA VALEUR D'ADHÉRENCE

Nous désignons par $\partial \mathrm{G}_r$ l'ensemble des points de la frontière qui sont réguliers au sens suivant ([3]) :

pour tout $x \in \partial \mathrm{G}_r$ il existe un voisinage ouvert $0_x$ de $x$ dans $\overline{\mathrm{G}}$ et une fonction $\phi \in \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R}^{\mathrm{P}})$ tels que

$$(\mathrm{R}) \begin{cases} \forall y \in \partial 0_x \cap \overline{\mathrm{G}},\ \phi'(y) \neq 0 \\ \mathrm{G} \cap 0_x = \{ y \in \mathbb{R}^{\mathrm{P}},\ \phi(y) > 0 \} \quad , \quad \partial \mathrm{G} \cap 0_x = \{ y \in \mathbb{R}^{\mathrm{P}},\ \phi(y) = 0 \} \end{cases}$$

On note $\tilde{\mathrm{G}}_r = \mathrm{G} \cup \partial \mathrm{G}_r$, $\partial \mathrm{G}_s = \partial \mathrm{G} \backslash \partial \mathrm{G}_r$.

Nous supposons toujours que $\partial \mathrm{G}$ est la réunion finie de sous-variétés fermées de dimension inférieure ou égale à $p - 1$ : $\partial \mathrm{G}_s$ est donc fermé et $\tilde{\mathrm{G}}_r$ localement compact. On peut alors trouver une suite croissante d'ouverts $0_n$ de $\overline{\mathrm{G}}$, vérifiant (R) et recouvrant $\tilde{\mathrm{G}}_r$.

THÉORÈME 6. — *$x_0$ est un point de $\mathrm{G} \cup \partial \mathrm{G}_r$ tel que l'on ait les hypothèses H1 et H4 du théorème 1, A1, A2, A5, A7 du théorème 2 et les hypothèses suivantes :*

$$A'3 : * \quad \left. \begin{array}{l} \overset{0}{b}_n(.) \overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} b(.) \\ \displaystyle\int_{|u| \leqslant 1} uu^* \overset{0}{\mathrm{S}}_n(., du) \underset{n \to \infty}{\Longrightarrow} a(.) \end{array} \right\} \text{ uniformément sur } \overline{\mathrm{G}}$$

* *$a : \overline{\mathrm{G}} \to \mathcal{M}_{p \times p}(\mathbb{R})$ strictement elliptique uniformément en $x \in \overline{\mathrm{G}}$, les coefficients de sa racine carrée $\sigma$ étant localement lipschitziens bornés,*

* *$b$ appartient en tout point au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de $a$, ou est lipschitzien; les coefficients de $b$ sont bornés.*

*A'4 :* $|b_n|$ *converge dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *uniformément sur* $\partial G$ *vers* $\frac{\gamma}{\delta}$ *où* $(\gamma, \delta)$ *est un couple de fonctions définies sur* $\partial G$ *et prenant ses valeurs dans* $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\gamma$ *étant de plus soit strictement positive, soit identiquement nulle sur* $\partial G_r$, *bornée, localement lipschitzienne, et* $\delta$ *continue bornée.*

*A'6 :* $\frac{b_n}{|b_n|}$ *converge uniformément vers* V *sur* $(\gamma^{-1}(0))^c$, V *étant un champ de vecteurs défini sur* $(\gamma^{-1}(0))^c$ *tel que*

$$\begin{cases} \forall x \in (\gamma^{-1}(0))^c \cap \partial G_r V(x) \text{ est strictement intérieur à } G \\ \forall x \in (\gamma^{-1}(0))^c \cap \partial G_s V(x) \text{ est intérieur à } G \end{cases}$$

*A8 (condition sur* $V(x)$ *pour les* $x$ « *voisins* » *de* $\partial G_s$*) : Il existe une fonction* $\varphi \in C_b^2(\tilde{G}_r)$ *telle que* $\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial V} \geqslant 0$ *sur* $\partial G_r$, $\varphi \leqslant 0$ *sur* $\tilde{G}_r$, $L\varphi \geqslant 0$ *sur* G, *et pour tout* $x \in \partial G_s$ $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in \tilde{G}_r}} \varphi(y) = -\infty$.

*Alors : la suite* $(P_{x_0}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers la loi* $P_{x_0}$, *unique solution du problème des sous-martingales continues issu de* $x_0$ *et associé au sens de* [3] *aux opérateurs* $(L, \Gamma, \delta)$.

*Démonstration.* — Par les chapitres 1 et 2 précédents, on sait que le problème des sous-martingales continues associé à $(L, \Gamma, \delta)$ et au point initial $x_0 \in \overline{G} \setminus \partial G_s$ a au moins une solution. La convergente sera démontrée s'il y a unicité de cette solution.

Pour cela, considérons une suite croissante d'ouverts $0_n$ de $\overline{G}$ qui recouvrent $\tilde{G}_r$ et vérifient (R).

Pour $x_0 \in \tilde{G}_r$, $x_0 \in 0_n$ à partir d'un certain rang. Si $\tau_n$ est le temps de sortie de $0_n$ du processus canonique, à partir de toute solution $P_{x_0}$ du problème des sous-martingales continues associé à $(x_0, L, \Gamma, \delta)$ on construit une solution $P_{x_0}^{\tau_n}$ au problème des sous-martingales arrêté à la sortie de $0_n$ au sens suivant :

$$(\forall f \in C_b^{2,1}(\overline{G} \times \mathbb{R}_+))\left(\delta \frac{\partial f}{\partial t} + \Gamma f \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad (\overline{0}_n \cap \partial G_r) \times \mathbb{R}_+\right)$$

$$f(X_{t \wedge \tau_n}, t \wedge \tau_n) - f(x_0, 0) - \int_0^{t \wedge \tau_n} \left[1_G\left(\frac{\partial f}{\partial t} + Lf\right)\right](X_s, s)ds$$

est une $P_{x_0}^{\tau_n}$ sous-martingale.

Soient $P_{x_0}$ et $Q_{x_0}$ deux solutions du problème $(L, \Gamma, \delta)$ issu de $x_0$. Soient $\overline{\Gamma_n}$ et $\overline{\delta_n}$ des prolongements à $\overline{0_n}$ des restrictions de $\Gamma$ et $\delta$ à $\overline{0}_n \cap \partial G_r$ tels qu'il y ait unicité de la solution du problème des sous-martingales continues associé à $(L_{/\overline{0}_n}, \overline{\Gamma_n}, \overline{\delta_n})$ et $x_0$ : ceci est possible ([3] : II.2.3) grâce aux hypothèses faites sur l'ouvert $0_n$ et sur les coefficients des opérateurs.

A partir de $P_{x_0}^{\tau_n}$ (resp. $Q_{x_0}^{\tau_n}$) et pour tout $t$, on peut construire une probabilité $\overline{P_{x_0}^{\tau_n}}^t$ (resp. $\overline{Q_{x_0}^{\tau_n}}^t$) qui coïncide avec $P_{x_0}^{\tau_n}$ (resp. $Q_{x_0}^{\tau_n}$) sur $\mathscr{F}^0_{t\wedge\tau_n}$ et qui est solution du problème des sous-martingales associé à $(L_n, \overline{\Gamma_n}, \overline{\delta_n})$ et $x_0$. On a donc $\overline{P_{x_0}^{\tau_n}}^t = \overline{Q_{x_0}^{\tau_n}}^t$ pour tout $t$ et par conséquent $P_{x_0}^{\tau_n} = Q_{x_0}^{\tau_n}$ sur $\mathscr{F}^0_{\tau_n}$ et $P_{x_0} = Q_{x_0}$ sur $\bigvee_n \mathscr{F}^0_{\tau_n}$.

Si $\Omega_r = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \tilde{G}_r)$ est l'ensemble des trajectoires à valeurs dans $\tilde{G}_r$, et $\Omega_n = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, 0_n)$ l'ensemble des trajectoires arrêtées à la sortie de $0_n$ (ou l'ensemble des trajectoires à valeurs dans $\overline{0}_n$), $\Omega_r$ s'identifie à la limite projective des $\Omega_n$, de sorte que l'on en conclut l'unicité de la solution $P_{x_0}^{\infty}$ (sur $\Omega_r$) du problème des sous-martingales continues à valeurs dans $\tilde{G}_r$.

Enfin on aura unicité pour le problème sur $\Omega$ tout entier si l'on n'atteint $P_{x_0}$ (ou $Q_{x_0}$) presque jamais les points singuliers de la frontière de G.

Or, d'après *A8* il existe une fonction $\varphi \in C_b^2(\tilde{G}_r)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{rll} \varphi \leqslant 0 & \text{sur} & \tilde{G}_r \\ L\varphi \geqslant 0 & \text{sur} & G \\ \Gamma\varphi \geqslant 0 & \text{sur} & \partial G_r \\ (\forall n \geqslant 1)\varphi \leqslant -n & \text{sur} & 0_n. \end{array}\right.$$

Puisque $\varphi$ appartient à $C_b^2(\tilde{G}_r)$ et satisfait à la condition frontière sur $\partial G_r$,

$$\varphi(X_t) - \varphi(x_0) - \int_0^t (1_G L\varphi)(X_s)ds$$

est une $P_{x_0}^{\infty}$ sous-martingale. Par le théorème d'arrêt on a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$E_{x_0}[-\varphi(X_{\tau_n})] \leqslant -\varphi(x_0) - E_{x_0}\left(\int_0^{\tau_n}(1_G L\varphi)(X_s)ds\right) \leqslant -\varphi(x_0)$$

et donc

$$P_{x_0}(\tau_n < \infty) \leqslant -\frac{1}{n}\varphi(x_0) ;$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{x_0}(\tau_n < \infty) = 0. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 7. — *Supposons que l'on ait toutes les hypothèses du théorème 6 pour tout $x \in \tilde{G}_r$. Alors, pour tout $x \in \tilde{G}_r$, les lois $(P_x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des processus de saut convergent faiblement vers $P_x$ et la famille $(P_x)_{x\in\tilde{G}_r}$ définit un processus de Markov unique à durée de vie infinie et à trajectoires continues dans $\tilde{G}_r$.*

REMARQUES 8. — 1) L'existence de la fonction $\varphi$ s'étudie sur les exemples. Elle impose certaines hypothèses sur les $V(y)$ pour $y$ voisin d'un même point $x \in \partial G_s$ ([2]).

2) Dans la pratique, la convergence de $(P_x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $P_x$ uniquement pour les états $x$ réguliers est suffisante ([2]).

## 4. EXEMPLE

Considérons $d$ vecteurs $(d \geqslant 2) e_1, e_2, \ldots, e_d$ de $\mathbb{R}^P$ et $p$ suites de réels

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_p^{(n)}.$$

Définissons sur $\overline{G}$ les applications suivantes ($n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$) :

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall x \in G & \lambda_i^{(n)}(x) = \lambda_i^{(n)} \\ \forall x \in \partial G & \lambda_i^{(n)}(x) = \left|\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x + e_i \notin \overline{G} \\ \lambda_i^{(n)} & \text{si} & x + e_i \in \overline{G} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Introduisons les générateurs

$$L_n f(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{(n)}(x)[f(x + \delta_n e_i) - f(x)]$$

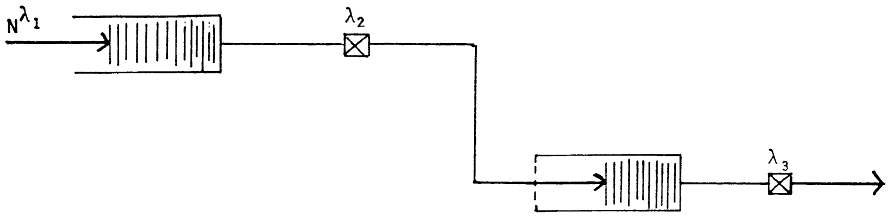
avec $\delta_n \to 0$, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{l} b_n(x) = \delta_n \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{(n)}(x) e_i \\ S_n(x, du) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{(n)}(x) \varepsilon_{\delta_n e_i}. \end{array}\right.$$

Le problème des martingales associé à $L_n$ permet de définir un processus $((X_t)_{t\geqslant 0}, P_x)$ fortement markovien et un seul sur $(\Omega^0, (\mathscr{F}_t^0)_{t\geqslant 0})$ (cf. Notations et rappels).

On peut traiter de la sorte le cas des files M/M/1, si $p = 1, d = 2, \overline{G} = \mathbb{R}_+$ (voir [2], ch. 2).

Ici nous allons illustrer cette situation générale avec deux exemples de deux files en tandem ($p = 2, d = 3$) : la deuxième file est, dans le premier exemple à capacité illimitée, dans le second à capacité limitée.




A) Dans le premier cas $\overline{G}$ est le quart de plan positif.

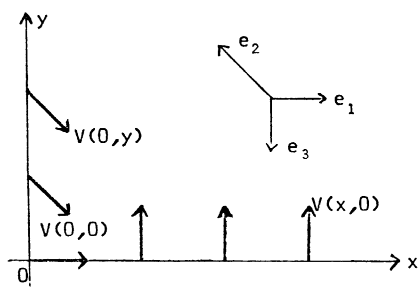
THÉORÈME 9.

*Les quatre hypothèses*
$$\begin{cases} B1 : \text{pour tout } n,\ \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \lambda_3^{(n)} \\ B2 : \delta_n \to 0 \\ B3 : \text{le vecteur drift } \delta_n \begin{pmatrix} \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)} \\ \lambda_2^{(n)} - \lambda_3^{(n)} \end{pmatrix} \text{ converge vers } b \\ B4 : \text{la ma'rice } \delta_n^2 \begin{pmatrix} \lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)} & -\lambda_2^{(n)} \\ -\lambda_2^{(n)} & \lambda_2^{(n)} + \lambda_3^{(n)} \end{pmatrix} \text{ converge} \\ \quad \text{vers } a, \text{ matrice à termes non nuls,} \end{cases}$$

*entraînent la convergence de la suite de processus de sauts associés aux paramètres* $(\delta_n, \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)})$ *vers la diffusion de* $\overline{G}$ *qui est de générateur*

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

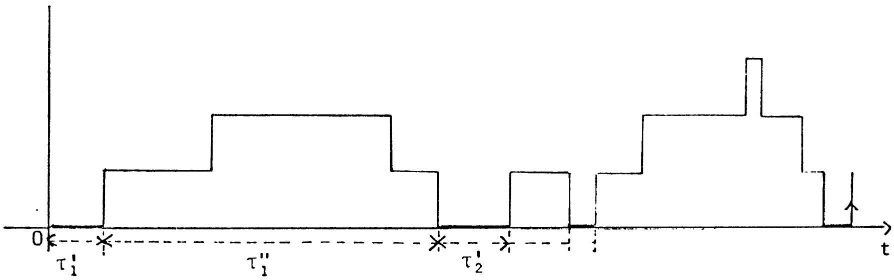
*dans* G *et qui est réfléchie sur la frontière* $\partial$G *suivant le champ de vecteurs* V *représenté sur la figure.*




$$e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* — On voit immédiatement que les fonctions $\gamma$ et $\delta$ définies dans le théorème 2 sont égales à 1 et 0 respectivement.

Pour montrer que $E^n_{(x_0,y_0)}\left(\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)ds\right)$ tend vers 0 pour tout $((x_0, y_0), t) \in \overline{G} \times \mathbb{R}_+$ en restant de l'ordre de $\delta_n$, nous faisons un calcul préalable sur les files d'attente M/M/1.




Soient $\lambda$ et $\mu$ les taux d'entrée et de service d'une telle file $X(\lambda < \mu)$. On désigne par $n_t$ le nombre de renouvellements avant $t$, par $\tau_k'(k \geqslant 1)$ les durées des « idle periods » successives, $\tau_k''(k \geqslant 1)$ des « busy periods », $\tau_k = \tau_k' + \tau_k''$.

Par propriété de la loi exponentielle, les variables aléatoires $(\tau_k')_k$ (resp. $(\tau_k'')_k$) sont indépendantes entre elles et de même loi et les deux suites $\tau'$ et $\tau''$ sont indépendantes.

L'égalité de Wald est donc applicable :

$$\left\{\begin{aligned} & E_0\left(\int_0^t 1_{(X_s=0)}ds\right) \leqslant E_0\left(\sum_{k=1}^{n_t+1} \tau_k'\right) = [E_0(n_t) + 1]E_0(\tau') \\ & \sum_{k=1}^{n_t} \tau_k \leqslant t \Rightarrow E_0\left(\sum_{k=1}^{n_t} \tau_k\right) = E_0(n_t)E_0(\tau) \leqslant t \\ & \qquad \Rightarrow E_0\left(\int_0^t 1_{(X_s=0)}ds\right) \leqslant t\,\frac{E_0(\tau')}{E_0(\tau') + E_0(\tau'')} + E_0(\tau'). \end{aligned}\right.$$

La longueur d'une idle period est de loi exponentielle de paramètre $\lambda$, donc $E_0(\tau') = \frac{1}{\lambda}$ ; d'autre part $E_0(\tau'') = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\mu - \lambda}$. Ainsi

$$E_{x_0}\left(\int_0^t 1_{(X_s=0)}ds\right) \leqslant \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)t + \frac{1}{\lambda},$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$ d'après la propriété de Markov.

Maintenant, pour la file en tandem, nous avons :

$$\begin{aligned} E^n_{(x_0,y_0)}\left(\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)ds\right) &= E^n_{(x_0,y_0)}\left(\int_0^t 1_{(X_s^1=0)}ds\right) + E^n_{(x_0,y_0)}\left(\int_0^t 1_{(X_s^2=0,X_s^1>0)}ds\right) \\ &\leqslant t\left[\left(1 - \frac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_3^{(n)}}\right) + 2\left(1 - \frac{\lambda_1^{(n)}}{\lambda_2^{(n)}}\right)\right] + \frac{1}{\lambda_2^{(n)}} + \frac{2}{\lambda_1^{(n)}} \end{aligned}$$

quantité qui est bien de l'ordre de $\delta_n$ d'après *B3* et *B4* et qui est de la forme requise par l'hypothèse *H4* du théorème 2.

D'autre part la fonction $g(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x + y) - e^{-x(y+2)} - e^{-y}$ vérifie $\Gamma g \geqslant \frac{1}{2}$ sur $\partial G$, $\Gamma$ étant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial V}$ pour le vecteur V représenté sur la figure.

Il nous reste alors à étudier l'existence d'une fonction $\varphi$ satisfaisant à l'hypothèse *A8* du théorème 6, qui assure l'unicité du problème des sous-martingales limite.

LEMME 10. — *Si l'opérateur de diffusion limite* L *n'a que des termes du second ordre* ($b = 0$), *on peut exhiber une fonction* $\varphi$ *vérifiant A8.*

*Démonstration.* — En fait on peut même résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lll} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)\varphi = 0 & & \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 & \text{si} & y = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 & \text{si} & x = 0. \end{array}\right.$$

Pour diagonaliser l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ on est amené à faire un changement de variables linéaires (X, Y) et le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial Y^2} = 0 & & \\ a\dfrac{\partial}{\partial X} + \dfrac{\partial}{\partial Y} = 0 & \text{sur} & Y = aX \\ \dfrac{\partial}{\partial X} - \dfrac{\partial}{\partial Y} = 0 & \text{sur} & X = aY \end{array}\right. \qquad (a = 2 - \sqrt{3} < 1)$$

Dans ce nouveau repère nous prenons les coordonnées polaires $(r, \theta)$ :

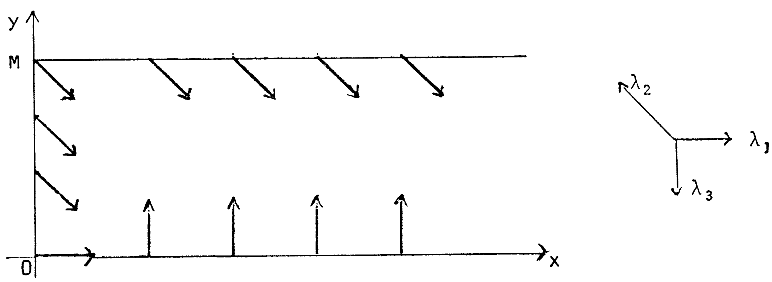
$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} = 0 & & \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \dfrac{2a}{1 - a^2}\dfrac{\partial}{\partial r} = 0 & \text{pour} & \theta = \theta_1\left(\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{1}{a}\right) \\ & \text{et pour} & \theta = \theta_2(\operatorname{tg}\theta_2 = a) \end{array}\right.$$

On vérifie que la fonction $\operatorname{Log} r - \frac{2a}{1 - a^2}\theta$ est solution de ce système. ■

Il reste à montrer l'unicité du problème des sous-martingales limite lorsque le vecteur $b$ de l'hypothèse *A3* n'est pas nul.

Il existe pour cela une solution purement analytique. Mais il est beaucoup plus intéressant ici d'utiliser un théorème du type Girsanov. Cependant cela nécessite d'établir auparavant un problème de martingales continues équivalent au problème de sous-martingales considéré, par construction du temps local. Nous ferons cette étude en commun avec le deuxième exemple.

B) Pour la file en dimension 2 dont la seconde salle d'attente est à capacité limitée (« blocking queue ») le convexe $\overline{G}$ et le vecteur limite V sont ceux représentés sur la figure :




Le théorème 9 s'applique sans aucun changement.

En effet $|b_n(x, M)| = \left|\begin{pmatrix} \delta_n\lambda_1^{(n)} \\ -\delta_n\lambda_3^{(n)} \end{pmatrix}\right|$ tend vers l'infini avec $n$ et donc la fonction $\delta$ est encore identiquement nulle.

Le temps que passe la file $X^2$ (la seconde coordonnée du processus X) en son maximum M, est inférieur au temps passé en cet état par une file M/M/1 de paramètres $\lambda_2$ et $\lambda_3$ et à capacité limitée (c'est-à-dire avec refus des clients quand le seuil est atteint). Or, pour cette dernière file, M est un point de renouvellement, donc :

$$E^n_{(x_0,y_0)}\left(\int_0^t 1_{(X^2_s=M,X^1_s>0)}ds\right) \leqslant t\,\frac{\dfrac{1}{\lambda_3^{(n)}}}{\dfrac{1}{\lambda_3^{(n)}}+\dfrac{1}{\lambda_3^{(n)}-\lambda_2^{(n)}}} + \frac{1}{\lambda_3^{(n)}} = t\,\frac{1-\dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_3^{(n)}}}{2-\dfrac{\lambda_2^{(n)}}{\lambda_3^{(n)}}} + \frac{1}{\lambda_3^{(n)}}$$

expression de l'ordre de $\delta_n$ (par *A3*).

La fonction

$$g_M(x, y) = \sin(x + y) - e^{-xy} + e^{-(M+y)}$$

vérifie $\Gamma g_M \geqslant \alpha_M > 0$ dès que $M \geqslant 2$.

L'ensemble $\partial G_s$ des points singuliers est formé de $(0, 0)$ et $(0, M)$. $V(0, M)$ est strictement intérieur à G, par contre $V(0, 0)$ est seulement tangent; il y a discontinuité en $(0, 0)$ de l'opérateur $\Gamma'$.

La matrice constante $a$ est définie positive : elle admet la racine carrée

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{3}) & \frac{\alpha}{2}(1-\sqrt{3}) \\ \frac{\alpha}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{\alpha}{2}(1+\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \delta_n\sqrt{\lambda_1^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \delta_n\sqrt{\lambda_2^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \delta_n\sqrt{\lambda_3^{(n)}} > 0.$$

Une fonction $\varphi$ qui répondrait à *A8* du théorème 6 serait : $\varphi \in C_b^2(\tilde{G}_r)$ négative, tendant vers $-\infty$ à l'approche des points $(0, 0)$ et $(0, M)$ et telle que

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha^2\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) + b_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \geqslant 0 & \text{sur} & G & \\ & & \text{où} & b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (b_1 \leqslant 0, b_2 \leqslant 0) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) \geqslant 0 & \text{pour tout} & x > 0 & \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0, y) - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(0, y) \geqslant 0 & \text{pour tout} & 0 < y < M & \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, M) - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, M) \geqslant 0 & \text{pour tout} & x > 0. & \end{array}\right.$$

Pour la singularité $(0, M)$ on vérifie que la fonction suivante convient :

$$\varphi(x, y) = e^{cx+d(M-y)} \log (x^2 + (M-y)^2 - x(M-y))$$

*où*

$$c = \frac{1 - 2b_1 - b_2}{3\alpha^2} \quad \text{et} \quad d = \frac{1 + 2b_2 + b_1}{3\alpha^2}$$

C) *Existence du temps local pour la diffusion limite.*

PROPOSITION 11. — Soit P une solution sur $(\Omega^0, \mathscr{F}_t^0, X_t)$ au problème des sous-martingales

$$\left(L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \Gamma = \frac{\partial}{\partial V}, \delta \equiv 0\right)$$

défini sur l'ouvert $G = \mathbb{R}_+^* \times \{y : 0 < y < M\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Il existe un processus unidimensionnel croissant continu $A_t$ adapté, unique tel que :

* $A_0 = 0$ Pps, $E(A_t) < \infty$ pour tout $t$.
* $A_t = \int_0^t 1_{\partial G}(X_s)dA_s$ Pps pour tout $t$.
* pour toute fonction $f$ de $C_b^2(\overline{G})$,

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t 1_G(X_s)Lf(X_s)ds - \int_0^t \Gamma f(X_s)dA_s$$

est une martingale continue

* $\int_0^t 1_{\partial G}(X_s)ds = 0$ Pps.

*Démonstration.* — On suit [3] (I.1.2 th. 2). La décomposition de Doob et Meyer permet d'exhiber un processus croissant $A_t^f$ localement intégrable continu adapté unique pour toute fonction $f$ de $C_b^2(\overline{G})$ telle que $\Gamma f \geq 0$ sur $\partial G$, et en particulier $A_t^{g_M}$ qui est associé à $g_M(x, y) = \sin(x + y) - e^{-xy} + e^{-(M+y)}$ et au minorant $\alpha_M > 0$ de son opérateur frontière $\Gamma g_M = \operatorname{grad} g_M . V$.

En introduisant la suite croissante d'ouverts

$$0_n = \left\{ x : \frac{1}{n} < x < n \right\} \times \left\{ y : \frac{1}{n} < y < M - \frac{1}{n} \right\}$$

(relativement compact dans $0_{n+1}$) on obtient, tout comme dans [3],

$$\int_0^t 1_G(X_s)dA_s^f = 0 \text{ Pps} \quad \text{pour tout } t,$$

c'est-à-dire que $A^f$ ne croît que sur $\partial G$.

Toutes les mesures $dA_t^f$ portées par $\partial G$ sont absolument continues par rapport à l'une d'entre elles, $dA_t^{g_M}$. En effet, soit $f \in C_b^2(\overline{G})$ telle que $\Gamma f \geqslant 0$ sur $\partial G$; notons $m = \sup_{(x,y)\in\partial G} \Gamma f(x, y)$ et $\bar{f} = \frac{m}{\alpha_M} g_M - f$. $\bar{f}$ est dans $C_b^2(\overline{G})$ et vérifie $\Gamma \bar{f} \geqslant 0$ sur $\partial G$ de sorte que :

$$0 \leqslant A_t^f \leqslant \frac{m}{\alpha_M} A_t^{g_M}.$$

Calculons alors la densité aléatoire $\alpha_t^f = \frac{dA_t^f}{dA_t^{g_M}}$.

Si $(x, y) \in \partial G$ est fixé, posons $\beta = \frac{\Gamma f(x, y)}{\Gamma g_M(x, y)}$ ; $f$ et $g_M$ étant continues, pour tout $0 < \varepsilon < \beta$ il existe un voisinage ouvert U de $(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$0 < \Gamma((\beta - \varepsilon)g_M) \leqslant \Gamma f \leqslant \Gamma((\beta + \varepsilon)g_M) \quad \text{sur} \quad U \cap \partial G.$$

Avec le lemme 2.5 de [*21*] on en déduit que

$$(\beta - \varepsilon)\int_0^t 1_U(X_s)dA_s^{g_M} \leqslant \int_0^t 1_U(X_s)\alpha_s^f dA_s^{g_M} \leqslant (\beta + \varepsilon)\int_0^t 1_U(X_s)dA_s^{g_M}$$

et donc

$$(\beta - \varepsilon)1_U \leqslant \alpha^f 1_U \leqslant (\beta + \varepsilon)1_U$$

ou encore

$$\beta - \varepsilon \leqslant \alpha^f \leqslant \beta + \varepsilon \qquad \text{pour tout} \qquad \varepsilon < \beta.$$

On en conclut donc que $\alpha_t^f = \dfrac{\Gamma f(X_t)}{\Gamma g_M(X_t)}$.

Ainsi, en posant $A_t = \displaystyle\int_0^t \frac{dA_s^{g_M}}{\Gamma g_M(X_s)}$ on a l'existence et l'unicité du temps local ainsi que les trois premières propriétés de la proposition. Pour la quatrième, on utilise comme dans [*3*] la fonction

$$\psi(t, .) = t + g_M(.).$$

Le processus $\left(t - \displaystyle\int_0^t 1_G(X_s)ds\right)_t$, qui est à la fois un processus à variations bornées et une P-martingale locale, est nul. ■

PROPOSITION 12. — Le temps local $A_t$ est indépendant de la solution P du problème des sous-martingales précédent.

PROPOSITION 13. — *i*) $M_t = X_t - X_0 - bt - \displaystyle\int_0^t V(X_s)dA_s$ est une P martingale locale continue telle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$ la martingale réelle $\langle \theta, M \rangle$ est localement intégrable de processus croissant $\langle \theta, a\theta \rangle t$.

*ii*) $\forall \theta \in \mathbb{R}^2 \exp\left\{\left\langle \theta, X_t - X_0 - bt - \displaystyle\int_0^t V(X_s)dA_s \right\rangle - \frac{1}{2}\langle \theta, a\theta \rangle t\right\}$ est une P martingale locale.

*iii*) Les deux problèmes de martingale *i*) et *ii*) sont équivalents.

*Démonstration.* — *i*) Montrons tout d'abord que pour toute $f \in C^2(\overline{G})$

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t 1_G(X_s)Lf(X_s)ds - \int_0^t \Gamma f(X_s)dA_s$$

est une P martingale locale continue.

Pour cela soient $T_n$ les temps de sortie respectifs des ouverts

$$0_n = \left\{x : \frac{1}{n} < x < n\right\} \times \left\{y : \frac{1}{n} < y < M - \frac{1}{n}\right\}.$$

Si $f \in C^2(\overline{G})$ il existe une suite $(g_n)_n$ dans $C_c^2(\overline{G})$ telle que pour tout $n$, $g_n$ soit identique à $f$ sur $\overline{0_n}$.

En appliquant la proposition 11 à $g_n$ on conclut que

$$f(X_{t\wedge T_n}) - f(X_0) - \int_0^{t\wedge T_n} 1_G(X_s)Lf(X_s)ds - \int_0^{t\wedge T_n} \Gamma f(X_s)dA_s$$

est une martingale.

Considérons alors les fonctions $f_\theta : (x, y) \in \overline{G} \to \left\langle \theta, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$ : on obtient que $M_t$ est une martingale locale. Avec $g_\theta = f_\theta^2$ on obtient que :

$$\langle \theta, X_t \rangle^2 - \langle \theta, X_0 \rangle^2 - 2\langle \theta, b \rangle \int_0^t 1_G(X_s)\langle \theta, X_s \rangle ds$$
$$- 2\int_0^t \langle \theta, X_s \rangle \langle \theta, V(X_s) \rangle dA_s - \langle \theta, a\theta \rangle t$$

est une P martingale locale continue.

On montre enfin par les techniques classiques d'intégration par parties que

$$\left[\langle \theta, X_t \rangle - \langle \theta, X_0 \rangle - \langle \theta, b \rangle t - \int_0^t \langle \theta, V(X_s) \rangle dA_s\right]^2$$
$$- \left[\langle \theta, X_t \rangle^2 - \langle \theta, X_0 \rangle^2 - 2\langle \theta, b \rangle \int_0^t 1_G(X_s)\langle \theta, X_s \rangle ds \right.$$
$$\left. - 2\int_0^t \langle \theta, X_s \rangle \langle \theta, V(X_s) \rangle dA_s\right]$$

est une P martingale locale.

*ii*) On applique à *i*) le résultat bien connu suivant :

Si M et A sont deux processus réels continus adaptés sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ et si A est un processus croissant, alors dire que M est une martingale locale de processus croissant A équivaut à dire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\exp\left\{\theta M_t - \frac{\theta^2}{2} A_t\right\}$ est une martingale locale.

D) *Convergence des schémas d'approximation.*

PROPOSITION 14. — Le problème des martingales introduit dans la proposition 13 *i*) *a* une solution P et une seule si $b = 0$.

*Démonstration.* — Si on applique la formule d'Ito à la P-semi-martingale

$$X_t = X_0 + M_t + bt + \int_0^t V(X_s)dA_s$$

on voit immédiatement que le problème des martingales défini dans la proposition 13 *i*) est équivalent à celui introduit dans la proposition 11 pour toute $f \in C_b^2(\overline{G})$; enfin toute solution de ce dernier est à l'évidence solution du problème de sous-martingales introduit dans le théorème 2.

Nous concluons alors avec le théorème 6 et le lemme 10. ■

THÉORÈME 15. — *(Formule de Cameron-Martin).*

*Le problème des martingales posé dans la proposition 13 i) a une solution* Q *et une seule quel que soit le drift b.*

Q *est défini de la façon suivante à partir de la solution* P *du problème sans drift :*

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+) \frac{dQ}{dP} \Big/_{\mathscr{F}_t^0} = \exp \left\{ \langle a^{-1}b, X_t - X_0 \rangle - \frac{1}{2} \langle b, a^{-1}b \rangle t \right\}$$

*Démonstration.* — L'existence est établie par le théorème de convergence 6. Pour démontrer l'unicité nous suivons [*17*] (chapitre V) : à partir d'une probabilité $Q_i$ sur $(\Omega^0, \mathscr{F}_t^0)$ solution du problème avec drift, nous construisons une solution $P_i$ au problème sans drift.

D'après les propositions 12 et 13 *i*) le processus

$$M_t = X_t - X_0 - bt - \int_0^t V(X_s) dA_s$$

est une $Q_i$ martingale locale, et d'après la proposition 13 *ii*)

$$Z_t = \exp \left\{ \langle -a^{-1}b, M_t \rangle - \frac{1}{2} \langle a^{-1}b, b \rangle t \right\}$$

en est une aussi et ne dépend pas de l'indice *i*. Donc nous pouvons définir une probabilité $P_i$ sur $(\Omega^0, \mathscr{F}_t^0)$ par :

$$(\forall t) \frac{dP_i}{dQ_i} \Big/_{\mathscr{F}_t^0} = Z_t.$$

Cette probabilité $P_i$ est solution du problème des martingales sans drift : en effet posons

$$X_t^\theta = \exp \left\{ \left\langle \theta, X_t - X_0 - \int_0^t V(X_s) dA_s \right\rangle - \frac{1}{2} \langle \theta, a\theta \rangle t \right\}$$

pour $\theta \in \mathbb{R}^2$;

$$X_t^\theta . Z_t = \exp \left\{ \left\langle \theta - a^{-1}b, X_t - X_0 - bt - \int_0^t V(X_s) dA_s \right\rangle - \frac{1}{2} \langle \theta - a^{-1}b, a(\theta - a^{-1}b) \rangle t \right\}$$

est une $Q_i$ martingale locale.

Soit alors $s < t$ et $A \in \mathscr{F}_s^0$ :

$$\int_A X_t^\theta dP_i = \int_A X_t^\theta Z_t dQ_i = \int_A X_s^\theta Z_s dQ_i = \int_A X_s^\theta dP_i$$

de sorte que $P_i$ est bien une solution cherchée grâce à la caractérisation de la proposition 13 *iii*).

Soient donc $Q_1$ et $Q_2$ deux solutions du problème des martingales avec drift. Les probabilités $P_1$ et $P_2$ ainsi construites sont alors égales d'après la proposition 14 et on termine la démonstration comme [*17*] (p. 100). ■

## BIBLIOGRAPHIE


[*1*] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*. John Wiley, 1968.

[*2*] C. Boyer de Bovillane-Zélicourt, Sur l'approximation de modèles de files d'attente par des processus de diffusion associés à une condition frontière. *Thèse de 3e Cycle*, Paris VI, 1979.

[*3*] N. El Karoui, Processus de diffusion associés à un opérateur elliptique dégénéré et à une condition frontière, *Thèse d'État*, Paris VI.

[*4*] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, t. **I**, J. Wiley, 1957.

[*5*] E. Gelenbe, On approximate computer system models, *J. of the Association for Computing Machinery*, t. **22**, n° 2, April 1975, p. 261-269.

[*6*] D. L. Iglehart, Weak Convergence in queueing theory, *Adv. Appl. Prob.*, t. **5**, 1973, p. 570-594.

[*7*] H. Kobayashi, Application of the diffusion approximation to queueing networks, I: Equilibrium queue distributions, *J. of the Association for Computing Machinery*, t. **21**, n° 2, April 1974, p. 316-328.

[*8*] T. G. Kurtz, Extensions of Trotter's operator semi-group approximation theorems, *J. of functional analysis*, t. **3**, 1969, p. 354-375.

[*9*] T. G. Kurtz, Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes, *J. Appl. Prob.*, t. **7**, 1970, p. 49-58.

[*10*] T. G. Kurtz, Limit theorems for sequences of jump Markov processes approximating ordinary differential processes, *J. Appl. Prob.*, t. **8**, 1971, p. 344-356.

[*11*] T. G. Kurtz, Semi-groups of conditioned shifts and approximation of Markov processes, *The Annals of Prob.*, t. **3**, n° 4, 1975, p. 618-642.

[*12*] A. J. Lemoine, Networks of queues, A survey of weak convergence results, *Management Science*, t. **24**, n° 11, July 1978.

[*13*] J. P. Lepeltier et B. Marchal, Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **XII**, n° 1, 1976, p. 43-103.

[*14*] M. Maurel, *Thèse de 3e Cycle*, Paris VI.

[*15*] M. Metivier, *Sufficient conditions for tightness and weak convergence of a sequence of processes*, Intern. Report, University of Minnesota, Minneapolis, 1979.

[*16*] P. Priouret, Processus de Markov sur une variété à bord compacte, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **IV**, n° 3, 1968, p. 192-253.

[*17*] P. Priouret, Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, III, 1973, *Lecture Notes in Mathemathics*, n° 390.

[*18*] R. Rebolledo, Martingales et convergence étroite des mesures de probabilité, *Thèse d'État*, Paris VI, Avril 1979.

[*19*] M. I. Reiman, Queueing networks in heavy traffic, *Technical Report*, t. **76**, Septembre 1977, Depart. of Operation Research, Stanford Univ., California.

[*20*] C. STONE, Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **14**, 1963, p. 694-696.

[*21*] D. W. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, Diffusion processes with boundary conditions, *Communications on pure and applied mathematics*, t. **XXIV**, 1971, p. 147-225.

[*22*] H. F. TROTTER, Approximation of semi-groups of operators, *Pacific J. Math.*, t. **8**, 1958, p. 887-919.

[*23*] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer, 1974.

*(Manuscrit reçu le 25 mai 1981)*