ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. ÉMILION

Processus additifs positifs dans L_∞

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 2 (1981), p. 185-189

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_2_185_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 2-1981, p. 185-189. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Processus additifs positifs dans L_∞

par

R. ÉMILION

Laboratoire de Probabilités, Tour 56, 3^e^ étage, Université Paris VI^e^,
4, Place Jussieu, 75230, Paris Cedex 05

Soit $\{ F_t, t > 0 \}$ un processus additif positif dans $L_\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ relativement à un semi-groupe d'opérateurs positifs $(T_t)_{t>0}$ dans L_∞. Nous étudions dans cet article l'existence de la limite presque sûre de $\frac{1}{t} F_t$ lorsque t tend vers 0^+. Akcoglu et Krengel [*1*] ont étudié ce problème dans $L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$ $1 \leq p < \infty$. Les notations et les démonstrations étant proches de [*1*] nous omettons volontairement certains détails.

DÉFINITIONS. — Soit $(T_t)_{t>0}$ un semi-groupe d'opérateurs positifs, dans L_∞, fortement continu. On ne suppose pas nécessairement le semi-groupe défini à l'origine $t = 0$ mais on le suppose localement borné, c'est-à-dire, $\sup_{0<t<1} \| T_t \|_\infty < +\infty$. On pose $S_t f = \int_0^t T_s f \, ds$ pour $f \in L_\infty$.

$S_t f$ est égal à la limite en norme quand m tend vers l'infini des sommes de Riemann $R_t^m f = f + T_{\frac{t}{m}} f + \ldots + T_{\frac{t}{m}}^{m-1} f$.

Soit $F = \{ F_t, t > 0 \}$ un processus additif positif dans L_∞, c'est-à-dire, $F_t \in L_\infty^+$ et $F_{t+s} = F_t + T_t F_s$ pour tout t et $s > 0$.

Pour $t > 0$ soit $\mathscr{P}_t(F)$ le sous-ensemble de L_∞ défini par $f \in \mathscr{P}_t(F)$ si et seulement si il existe $r > 0$, $s > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f_0, \ldots, f_n \in L_\infty^+$ tels que

i) $r + ns < t$.

ii) $T_s^m \frac{1}{r} F_r > \sum_{i=0}^{m} T_s^{m-i} f_i$ pour $m = 0, \ldots, n$.

iii) $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$. Ces fonctions ont été définies dans [*1*], par contre nous avons modifié la définition des fonctions $\Psi_E^t(F)$ de [*1*] de la façon suivante :

Pour tout $t > 0$ et $E \in \mathscr{F}$ et un processus F posons :

$$\Psi_E^t(F) = \sup \{ \alpha \geq 0 / \forall \varepsilon > 0 \ \exists f \in \mathscr{P}_t(F), \exists E' \in \mathscr{F}, E' \subset E \text{ avec } \| \alpha 1_{E'} - f \|_\infty < \varepsilon \text{ et } \mu(E \backslash E') < \varepsilon \}.$$

Notons que l'ensemble des α n'est pas vide : $\alpha = 0$ convient pour $f = 0$ et $E' = E$.

On a $t < t' \Rightarrow \Psi_E^t(F) < \Psi_E^{t'}(F)$ car $t < t' \Rightarrow \mathscr{P}_t(F) \subset \mathscr{P}_{t'}(F)$.

Posons $\Psi_E(F) = \lim\limits_{t \to 0^+} \Psi_E^t(F)$.

Enfin, pour $h \in L_\infty$, $h > 0$, posons $H_t = S_t(S_1 h)$; appelons H le processus $\{ H_t, t > 0 \}$ et notons $C_h = \{ S_1 h > 0, H_t > 0 \ \forall t > 0 \}$.

Nous obtenons alors la proposition suivante :

PROPOSITION. — Soit $F = \{ F_t, t > 0 \}$ un processus additif positif dans L_∞, tel que $\lim\limits_{t \to 0^+} \| F_t \|_\infty = 0$, relativement à un semi-groupe d'opérateurs positifs localement borné. Supposons qu'il existe $h > 0$, $h \in L_\infty$ tel que $\Psi_E(F)$ et $\Psi_E(H)$ soient finis pour tout $E \subset C_h$, $E \in \mathscr{F}$ alors $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} F_\varepsilon$ existe p. p. sur C_h.

Remarque. — Si on ajoute des conditions à E, par exemple : $\exists a > 0$, $\exists \delta > 0$: $E' \subset E$ et $\mu(E \backslash E') < \delta \Rightarrow \| S_t 1_E \|_\infty > a$ pour un $t > 0$.

Nous voyons d'après [*1*] que Ψ_E est fini.

La démonstration se fait grâce à plusieurs lemmes :

LEMME 1. — Soit $h \in L_\infty$, $h > 0$, supposons $S_1 h > \alpha > 0$ sur $E \in \mathscr{F}$ alors $\forall E' \subset E \ \Psi_{E'}(H) \geq \alpha$.

Démonstration. — $\frac{1}{t} H_t \to S_1 h$ fortement quand $t \to 0^+$. Donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists t_0 > 0 : t < t_0 \Rightarrow \left\| \frac{1}{t} H_t - S_1 h \right\|_\infty < \varepsilon$ donc pour $t < t_0$ on a $\frac{1}{t} H_t > S_1 h - \varepsilon$ p. p. En particulier pour tout E', $E' \subset E$, $1_{E'} \frac{1}{t} H_t > (S_1 h - \varepsilon) 1_{E'}$.

$1_{E'} \frac{1}{t} H_t > (\alpha - \varepsilon) 1_{E'}$. Cette inégalité prouve que $(\alpha - \varepsilon) 1_{E'} \in \mathscr{P}_t(H)$ (voir la définition de $\mathscr{P}_t(H)$ avec $r = t$, $n = 0$, $f_0 = (\alpha - \varepsilon) 1_{E'}$).

On a ainsi $\alpha - \varepsilon < \psi_{E'}^t$ pour $0 < t < t_0$.

Donc $\alpha - \varepsilon < \psi_{E'}(H)$ et enfin $\underline{\psi_{E'}(H) > \alpha}$.

LEMME 2. — Si $f \in \mathscr{P}_t(F)$ alors $\forall u > 0$ $S_u f < F_{t+u}$ voir [1].

LEMME 3. — Soit F_t un processus additif positif, $g \in L_\infty^+$, $t_0 > 0$. Supposons que $\sup\limits_{q \in Q(t_0)} (F_q - S_q g) > 0$ sur $E \in \mathscr{F}$ alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E' \in \mathscr{F}$: $E' \subset E$, $g 1_{E'} \in \mathscr{P}_{t_0}(F)$ et $\mu(E \backslash E') < \varepsilon$.
($Q(t_0)$ désigne l'ensemble des rationnels strictement positifs et inférieurs à t_0).

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ et $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des rationnels de $Q(t_0)$. Soit $\varepsilon_i > 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$.

Par hypothèse, pour presque tout $x \in E$, $\exists q_i(x) \in Q(t_0)$: $(F_{q_i} - S_{q_i} g)(x) > 0$.
Posons $E_i = \{ x \in E / (F_{q_i} - S_{q_i} g)(x) > 0 \}$.
Soit $\alpha_i > 0$ suffisamment petit pour que si l'on pose

$$E'_i = \{ x \in E_i / (F_{q_i} - S_{q_i} g)(x) > \alpha_i \}$$

alors $\mu(E_i \backslash E'_i) < \varepsilon_i$.

Puisque $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, soit n suffisamment grand pour que

$$\mu\left(E \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

on a alors $\mu\left(E \Big\backslash \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E'_i \right) < \varepsilon$. (1)

Posons $E' = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E'_i$ $\alpha = \inf(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$. Par définition de l'intégrale $\exists M \in \mathbb{N} : m > M \Rightarrow \| R^m_{q_i} g - S_{q_i} g \|_\infty < \alpha$ pour $i = 1, \dots, n$.

Posons $r = \inf\limits_{i=1,\dots,n} \dfrac{q_i}{M}$ et $m_i = \dfrac{q_i}{r}$; alors $m_i > M$.

Sur E'_i on a $F_{q_i} - S_{q_i} g > \alpha$ et $| R^{m_i}_{q_i} - S_{q_i} g | < \alpha$ donc $F_{q_i} - R^{m_i}_{q_i} g > 0$ sur E'_i. Or $F_{q_i} - R^m_{q_i} g = r \displaystyle\sum_{j=0}^{m_i - 1} T_r^j \left(\frac{1}{r} F_r - g \right)$; on a donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{m_i - 1} T_r^j \left(\frac{1}{r} F_r - g \right) > 0$ sur E'_i.

Posons $K = \max(m_1, \dots, m_n)$; on a $Kr < t_0$, car $m_i r = q_i < t_0$ sur $E' = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E'_i$ on a $\sup\limits_{0 \leqslant k \leqslant K} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} T_r^j \left(\frac{1}{r} F_r - g \right) > 0$.

Appliquons alors le lemme de remplissage de Chacon-Ornstein [2] $\exists d_0, \ldots, d_{K-1} \in L_\infty^+$ tel que $d = d_0 + \ldots d_{K-1} = g$ sur E' et

$$\sum_{j=0}^{k} T_r^{K-j} d_j < T_r^k \frac{1}{r} F_r \qquad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, K-1 :$$

ceci prouve que $d \in \mathscr{P}_{t_0}(F)$ (car $Kr < t_0$) ; comme $g 1_{E'} \dot{<} d$ on a

$$\underline{g 1_{E'} \in \mathscr{P}_{t_0}(F) \quad \text{et} \quad \mu(E \backslash E') < \varepsilon} \quad (1).$$

LEMME 4. — Soit F_t et G_t deux processus additifs positifs tels que $\lim\limits_{t \to 0^+} \| F_t \|_\infty = \lim\limits_{t \to 0^+} \| G_t \|_\infty = 0$. Si $\sup\limits_{t \in Q(t_0)} (F_t - G_t) > 0$ sur $E \in \mathscr{F}$ alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E' \subset E$ et $\delta > 0$ tels que $\mu(E \backslash E') < \varepsilon$ et $r < \delta \Rightarrow \sup\limits_{t \in Q(t_0)} (F_t - S_t g) > 0$ sur E' pour tout $g \in \mathscr{P}_r(G)$ (voir [1] pour la démonstration).

LEMME 5. — Si $\sup\limits_{t \in Q(t_0)} (F_t - G_t) > 0$ pour tout $t_0 > 0$ sur $E \in \mathscr{F}$ avec $\mu(E) < +\infty$, alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E' \subset E : \mu(E \backslash E') < \varepsilon$ et $\psi_{E''}(F) > \psi_{E''}(G)$ $\forall E'' \subset E'$ vérifiant $\psi_{E''}(F) < +\infty$ et $\psi_{E''}(G) < +\infty$.

Démonstration. — Donnons nous $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon_i > 0$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$. Soit aussi $t_i > 0$ $t_i \downarrow 0$. D'après le lemme 4, pour chaque i : $\exists E_i, \delta_i$ tel que $\mu(E \backslash E_i) < \varepsilon_i$ et $\sup\limits_{t \in Q(t_i)} (F_t - S_t g) > 0$ sur E_i pour tout $g \in \mathscr{P}_{\delta_i}(G)$. Posons $E' = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ alors $\mu(E \backslash E') < \varepsilon$. Soit $E'' \subset E'$ tel que $\alpha = \psi_{E''}(G) < +\infty$.

Soit $a > 0$ quelconque, d'après les définitions :

$$\exists \rho_i < \delta_i : \qquad | \alpha - \psi_{E''}^{\rho_i}(G) | < \frac{a}{3}, \quad \exists \beta > 0 : \qquad | \psi_{E''}^{\rho_i}(G) - \beta | < \frac{a}{3},$$

$$\exists g \in \mathscr{P}_{\rho_i}(G), \quad \exists E_i'' \subset E'' : \qquad \| \beta 1_{E_i''} - g \|_\infty < \frac{a}{3}, \quad \mu(E'' \backslash E_i'') < \frac{a}{2}.$$

On a alors $\| \alpha 1_{E_i''} - g \|_\infty < a$ et $\mu(E'' \backslash E_i'') < \frac{a}{2}$.

Comme $g \in \mathscr{P}_{\delta_i}(G)$ (car $g \in \mathscr{P}_{\rho_i}(G)$ et $\rho_i < \delta_i$) on a d'après le lemme 3 $\exists E_i''' \subset E_i''$, $g 1_{E_i'''} \in \mathscr{P}_{t_i}(F)$ et $\mu(E_i'' \backslash E_i''') < \frac{a}{2}$ car $\sup\limits_{t \in Q(t_i)} (F_t - S_t g) >$ sur E_i''.

On a ainsi $\| \alpha 1_{E_i'''} - g 1_{E_i'''} \|_\infty < \| \alpha 1_{E_i''} - g \|_\infty < a$ (car $E_i''' \subset E_i''$) et $\mu(E'' \setminus E_i''') < \mu(E'' \setminus E_i'') + \mu(E_i'' \setminus E_i''') < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$. Comme a est arbitraire positif, d'après la définition on obtient

$$\alpha \leqslant \psi^{ti}_{E''}(F), \qquad \text{donc} \qquad \alpha \leqslant \psi_{E''}(F)$$

$\psi_{E''}(G) \leqslant \psi_{E''}(F)$.

Démonstration de la proposition voir [*1*]. — On considère $h > 0$ et on suppose $\psi_E(H) < +\infty$ pour tout $E \subset C_h$. Supposons que $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} F_t$ n'existe pas sur un sous-ensemble de C_h.

On peut trouver alors $E \subset C_h$ tel que : $\exists \alpha > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \beta_1 < \beta_2$ avec $\lim_{t \to 0^+} \inf \frac{F_t}{H_t} < \beta_1 < \beta_2 < \lim_{t \to 0^+} \sup \frac{F_t}{H_t}$, $S_1 h > \alpha$ sur E $(0 < \mu(E) < +\infty)$.

On aboutit à une contradiction exactement comme dans [*1*] en trouvant $E'' \subset E$ tel que $\beta_1 \psi_{E''}(H) > \beta_2 \psi_{E''}(H)$ ceci est impossible puisque $0 < \psi_{E''}(H)$ et $\psi_{E''}(H) < +\infty$ par hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] AKCOGLU-KRENGEL, A differentiation theorem in L_p. *Math. Z*, t. **169**, 1979, p. 31-40.

[*2*] CHACON-ORNSTEIN, A general ergodic theorem, Illinois, *J. Math.*, t. **4**, 1960, p. 153-160.

(Manuscrit reçu le 18 décembre 1980)