ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. ÉMILION

Théorème ergodique local dans L_p $(1 < p < \infty)$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 2 (1981), p. 181-184

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_2_181_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 2-1981, p. 181-184. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorème ergodique local dans L_p $(1 < p < \infty)$

par

R. ÉMILION
Laboratoire de Probabilités, Tour 56, 3e étage,
4, Place Jussieu, Paris-VIe, 75230 Paris Cedex 05

INTRODUCTION

Soit $(X, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe à un paramètre de contractions linéaires positives dans $L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$ $1 < p < \infty$, fortement continu. La théorie ergodique locale est l'étude de l'existence de la limite presque sûre d'expressions de la forme $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_t f\, dt$ lorsque ε tend vers 0^+, f étant un élément de L_p.

Kubokawa [*2*] a démontré que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_t f\, dt = f$ p. p. lorsque $T_0 = I$. Ackoglu et Krengel [*1*] ont généralisé ce résultat en démontrant que la limite existe même quand le semi-groupe n'est pas défini en $t = 0$. L'intérêt de cet article-ci est de présenter une démonstration tout à fait simple et différente des précédentes du résultat suivant et de son analogue pour des opérateurs T_t non nécessairement positifs.

THÉORÈME. — Soit $(X, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe à un paramètre de contractions positives dans $L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$ $1 < p < \infty$, fortement continu. Alors :

Pour tout $f \in L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$ on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_t f\, dt = T(0)f$ p. p. sur X.

Remarques. — 1) L'analogue de ce théorème pour un semi-groupe à n paramètres se démontre comme celui de Terrel [*4*].

2) Si T_t n'est pas nécessairement positif mais est une contraction de L_1 et L_∞, le lemme 1 qui suit s'obtient en utilisant le semi-groupe $(\tilde{T}_t)$ d'opérateurs positifs de [2] et par suite le théorème est aussi démontré dans ce cas.

LEMME 1. — $(T_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les hypothèses du théorème, il existe une constance $c > 0$ telle que pour tout $f \in L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f\,dt \right\|_p < c \| f \|_p$$

Preuve. — Posons, pour tout $\lambda > 0$, $R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f\,dt$ et $f^* = \sup | \lambda R_\lambda f |$. S. A. MacGrath [3] a démontré que $\| f^* \|_p \leq \frac{p}{p-1} \| f \|_p$.

Pour t tel que $0 < t < \varepsilon$ on a $1 < e\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}$, donc

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_t d f t < \frac{e}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} T_t f\,dt .$$

Par suite

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_t f\,dt < e\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} T_t f\,dt$$

et

$$\sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_t f\,dt < e f^* \qquad \text{pour} \quad f \in L_p^+$$

donc

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T_t f\,dt \right\|_p < \frac{ep}{p-1} \|f\|_p \qquad \text{pour} \quad f \in L_p .$$

LEMME 2. — L'ensemble des fonctions f de L_p pour lesquelles la conclusion du théorème est vraie est fermé dans L_p.

Preuve. — Démonstration classique qu'on retrouve dans les théorèmes de convergence presque sûre. Posons pour $\varepsilon > 0$:

$$S_\varepsilon f = \int_0^\varepsilon T_t f\,dt , \qquad R^* f = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f$$

et

$$R f = \limsup_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \varepsilon'\to 0^+}} \left| \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f - \frac{1}{\varepsilon} S_{\varepsilon'} f \right| .$$

On a $Rf < 2R^* f$.

Appelons E l'ensemble des fonctions de L_p vérifiant la conclusion du théorème. Soit f adhérent à E ; il s'agit de montrer que $f \in E$. Montrons d'abord que $Rf = 0$ p. p. Soit $\varepsilon > 0$ et $g \in E$ tel que $0 < \| f - g \|_p^p < \varepsilon^2$. Puisque $Rg = 0$ on a $Rf = R(f - g)$.

On a aussi

$$\begin{aligned} \mu((Rf)^p > \varepsilon) = \mu((R(f-g))^p > \varepsilon) &< \mu\left((R(f-g))^p > \frac{1}{\varepsilon}\| f - g \|_p^p\right) \\ &< \mu\left((R^*(f-g))^p > \frac{1}{2^p\varepsilon}\| f - g \|_p^p\right) \\ &< 2^p\varepsilon \frac{\| R^*(f-g)\|_p^p}{\| f - g \|_p^p} \qquad \left(\text{si} \quad h \in L_p \mu(h^p > \lambda) < \frac{1}{\lambda}\| h \|_p^p\right) \\ &< 2^p\varepsilon c^p \text{ (lemme 1).} \qquad \text{Donc } \mu((Rf)^p > \varepsilon) < 2^p \varepsilon c^p . \end{aligned}$$

Par suite $Rf = 0$ p. p. et donc d'après le critère de Cauchy $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f$ existe p. p. D'autre part $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left\| \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f - T(0)f \right\|_p = 0$ car le semi-groupe est continu en 0. En prenant une suite ε_n tendant vers 0 et en sachant que la convergence presque sûre d'une sous-suite, on obtient par unicité de la limite : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon = T(0)f$. Donc $f \in E$.

LEMME 3. — Posons $M(\varepsilon)f = \frac{1}{\varepsilon} S_\varepsilon f$ pour $\varepsilon > 0$ et $f \in L_p$.

L'ensemble $\{ M(\varepsilon)f / f \in L_p \ 0 < \varepsilon < 1 \}$ est dense dans $T(0)L_p$ (image par T(0) de L_p) et toutes les fonctions $M(\varepsilon)f$ satisfont la conclusion du théorème.

Résultat classique démontré, par exemple, par Terrel [*4*].

Preuve du théorème. — D'après le lemme 2 et le lemme 3 toute fonction de $T(0)L_p$ satisfait la conclusion du théorème, donc pour tout $f \in L_p$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t T_0 f \, dt = T_0(T_0 f) \qquad \text{p. p.}$$

ou

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_t f \, dt = T(0)f, \qquad \text{car} \quad T_t T_0 = T_{t+0} = T_0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] AKCOGLU-KRENGEL, A differentiation theorem in L_p, *Math. Z.*, t. **169**, 1979.

[*2*] Y. KUBOKAWA, A local ergodic theorem for semi-group on L_p Tohoku. *Math. Journal*, t. **26**, 1974, p. 411-422.

[3] S. A. MAC. GRATH, An abelian ergodic theorem for semi-group in L_p spaces. *Proceed. Amer. Society*, t. **54**, 1976, p. 231-236.

[4] T. TERREL, Local ergodic theorems for n-parameters semi-groups of operators. *Contribution to ergodic and Prob. Theory*. Springer-Verlag, N. Y., 1970.

(Manuscrit reçu le 18 décembre 1980)