ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JUI-LIN LONG

Sur l'espace H^p de martingales régulières $(0 < p \leq 1)$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 1 (1981), p. 123-142
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_1_123_0>

© Gauthier-Villars, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 1, 1981, p. 123-142. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur l'espace H_p de martingales régulières $(0 < p \leqslant 1)$

par

Jui-lin LONG
Académie des Sciences de Chine,
Institut des Mathématiques,
Pékin (République Populaire de Chine).

RÉSUMÉ. — On va établir plusieurs résultats relatifs aux martingales dans $H_p(0 < p \leq 1)$ sous une hypothèse de régularité, appelée hypothèse (T) (ou sous une hypothèse plus faible (T')) : la décomposition atomique de martingales dans H_p (d'après Coifman); le réarrangement de martingales dans $L^1 \cap H_p$ (d'après Davis), etc.

On va montrer que l'hypothèse (T) est en fait une conséquence de la condition simple de régularité suivante :

$$E(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_n) \leq dE(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_{n-1}), \qquad \text{pour } F \in \mathfrak{F} \text{ quelconque}.$$

On regular H_p*-martingales space* $(0 < p \leq 1)$.

ABSTRACT. — Several results concerning H_p-martingales $(0 < p \leq 1)$ have been obtained under a hypothesis of regularity named hypothesis (T) (or under a weak hypothesis (T')) : the (Coifman) atomic decomposition of H_p-martingales; the (Davis) rearrangement of $L^1 \cap H_p$-martingales, etc.

The hypothesis (T) is in reality a consequence of the following simple condition of regularity:

$$E(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_n) \leq dE(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_{n-1}), \qquad \text{for all } F \in \mathfrak{F}.$$

Soit $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espace mesurable muni d'une mesure μ positive complète σ-finie et d'une famille croissante $\{\mathfrak{F}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ de sous-tribus vérifiant les conditions suivantes : $\mathfrak{F} = \bigvee_n \mathfrak{F}_n$; $\cap \mathfrak{F}_n$ est engendrée par tous les

© Gauthier-Villars

ensembles négligeables, et $\forall n \in \mathbb{Z}$, μ est σ-finie sur $\mathfrak{F}_n$. Quand $|\Omega| < \infty$ (*), on prend $|\Omega| = 1$ et $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_0$ pour $n \leq 0$. Pour fixer les idées, supposons que $|\Omega| = \infty$.

Comme Edwards et Gaudry [*1*] l'ont montré, on peut définir l'opérateur d'espérance conditionnelle $f_n = \mathrm{E}(f \mid \mathfrak{F}_n)$ pour $f \in \bigcup_{1 \leq r < \infty} \mathrm{L}^r(\Omega)$, et cet opérateur satisfait aux propriétés habituelles (voir [*1*] § 5.1.4).

On dit qu'une suite $(f_n)_{-\infty}^{\infty}$ de fonctions dans $\bigcup_{1 \leq r < \infty} \mathrm{L}^r(\Omega)$ est une martingale, si (f_n) est adapté à $\{\mathfrak{F}_n\}$, et $\mathrm{E}(f_n \mid \mathfrak{F}_m) = f_m$ pour $m \leq n$. On dit qu'une application τ de Ω dans $\overline{\mathbb{Z}}$ est un temps d'arrêt (t. d'a. en abrégé), si $\{\tau = n\} \in \mathfrak{F}_n$. Pour un t. d'a. τ quelconque, désignons par $\mathfrak{F}_\tau$ la sous-tribu $\{\mathrm{F} \in \mathfrak{F} : \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{F} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n\}$. Évidemment, les propriétés fondamentales concernant τ et $\mathfrak{F}_\tau$ ont encore lieu comme dans le cas où $|\Omega| < \infty$.

Dans la théorie des martingales, l'introduction de t. d'a. constitue un outil puissant. Aussi, dans ce papier, nous faisons une hypothèse concernant t. d'a. comme suit : pour tous les processus positifs $(\gamma_n)_{-\infty}^{\infty}$ et tous les $\lambda > 0$, vérifiant $|\{\gamma^* > \lambda\}| < \infty$, il existe un t. d'a. τ_λ tel que

$$(1) \qquad |\{\tau_\lambda < \infty\}| \leq d\,|\{\gamma^* > \lambda\}|, \qquad d \geq 1 \text{ une constante},$$

$$(2) \qquad \{\gamma^* > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\} \qquad \text{(modulo mesure de zéro)},$$

$$(3) \qquad \gamma_{\tau_\lambda} \mathbb{1}(\{\tau_\lambda < \infty\}) \leq \lambda,$$

$$(4) \qquad \text{si } \lambda_1 \geq \lambda_2, \qquad \text{alors } \tau_{\lambda_1} \geq \tau_{\lambda_2}.$$

Dans la suite, on dit qu'on a l'hypothèse (T) si les conditions (1), (2), (3), (4) sont satisfaites, qu'on a l'hypothèse (T′) si seulement les conditions (1), (2), (3) sont satisfaites.

Dans notre papier [2], on a étudié les Φ-inégalités avec poids sous l'hypothèse (T′). Ici, on étudie quelques autres problèmes concernant les martingales dans H_p aussi sous cette hypothèse, soit (T), soit (T′).

Le paragraphe 1 est consacré à la décomposition atomique de martingales dans H_p sous l'hypothèse (T). Après C. S. Herz et R. R. Coifman, Bernard et Maisonneuve [*3*] ont obtenu la décomposition atomique de H_c^1 (continue), H_d^1 (dyadique) et H_g^1 (gauche, c'est-à-dire prévisible). Nous étudions cette décomposition pour H_p $(0 < p \leq 1)$ et sous l'hypothèse (T).

Dans le paragraphe 2, nous considérons le réarrangement f_d de $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{H}_p$ d'après Davis [*4*]. Sous l'hypothèse (T′), nous établissons la L^p-intégrabilité de $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f_d(t)dt$ pour $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{H}_p$ que Davis a établie dans le cas classique.

(*) Dans ce papier, $|\mathrm{F}|$ désigne la μ-mesure d'un ensemble mesurable F ; C, avec des indices ou non, désigne une constante qui varie de place en place.

Dans le paragraphe 3, on donne quelques résultats concernant des martingales dans H_1, sous l'hypothèse (T′) aussi.

Dans le paragraphe 4, on montre que l'hypothèse (T) est une conséquence directe d'une condition simple de régularité appelée condition « R » dans [*2*].

1. DÉCOMPOSITION ATOMIQUE DE MARTINGALES DANS H_p SOUS L'HYPOTHÈSE (T)

Définissons $H_p = \{ \text{martingale } f = (f_n)_{-\infty}^{\infty} : f^* = \sup_n |f_n| \in L^p(\Omega) \}$, $0 < p \leq 1$, avec la norme $\| f \|_{H_p} = \| f^* \|_p$. C'est un espace vectoriel métrique.

D'après [*3*], on dit qu'une fonction $a \in L^\infty(\Omega)$ est un p-atome, s'il existe un t. d'a. τ tel que $a\mathbb{1}(\{\tau = \infty\}) = 0$, $|\{\tau < \infty\}| < \infty$, et

$$(5) \quad a_n \mathbb{1}(\{n \leq \tau\}) = 0 \quad (a_n = E(a \mid \mathfrak{F}_n)) \quad \text{et} \quad \| a \|_\infty \leq |\{\tau < \infty\}|^{-\frac{1}{p}}.$$

THÉORÈME 1. — *Soit $f \in L^1 \cap H_p (0 < p \leq 1)$, alors il existe une suite $\{\lambda_j\}$ de réels positifs et une suite $\{a_j\}$ de p-atomes, telles que $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$, où la série converge ponctuellement et dans H_p. On a de plus*

$$(6) \qquad \| f \|_{H_p}^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p \leq C_p d \| f \|_{H_p}^p .$$

Preuve. — Pour le processus $(|f_n|)_{-\infty}^{\infty}$ et pour $\lambda = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$, définissons t. d'a. τ_k vérifiant (1), (2), (3), (4). D'après (1), (4), on a $\lim_{k \to \infty} \tau_k = \infty$, et donc $\lim_{k \to \infty} f_{\tau_k} = f$; d'après (3), on a $\lim_{k \to -\infty} f_{\tau_k} = 0$. Alors on obtient la décomposition suivante :

$$(7) \qquad f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}),$$

où la série converge ponctuellement.

Désignons

$$\lambda_k = 2^{k+1} |\{\tau_{k-1} < \infty\}|^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad a_k = \frac{1}{\lambda_k}(f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}})\mathbb{1}(\{\tau_{k-1} < \infty\}|).$$

Alors a_k sont tous p-atomes. En effet, d'après (2), (3), (4), on a

$$\| a_k \|_\infty \leq |\{\tau_{k-1} < \infty\}|^{-1/p}$$

et

$$(a_k)_n \mathbb{1}(\{ n \leq \tau_{k-1} \}) = \frac{1}{\lambda_k}(f_{\tau_k \wedge n} - f_{\tau_{k-1} \wedge n})\mathbb{1}(\{ n \leq \tau_{k-1} \}) = 0 .$$

Désignons $\sigma(\lambda) = |\{ f^* > \lambda \}|$, on a

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k^p \leq d \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)p} |\{ f^* > 2^{k-1} \}|$$

$$\leq C_p d \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \lambda^{p-1} \sigma(\lambda) d\lambda = C_p d \| f \|_{H_p}^p ,$$

c'est la deuxième inégalité de (6).

Maintenant, démontrons la première inégalité de (6) et la convergence dans H_p de la série $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$.

D'abord, remarquons que pour tout p-atome a, on a $\int_\Omega a^{*p} d\mu \leq 1$. Ensuite, remarquons que nous avons non seulement (7), mais encore

$$(7') \qquad f_n = \sum_{-\infty}^{\infty} (f_{\tau_k \wedge n} - f_{\tau_{k-1} \wedge n}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k (a_k)_n , \qquad -\infty < n < \infty ,$$

avec les séries convergeant ponctuellement, car $\lim_{k \to \infty} \tau_k = \infty$ et

$$\lim_{k \to \infty} | f_{\tau_k \wedge n} | \leq \lim_{k \to -\infty} 2^k = 0$$

(parce que $f_{\tau_k} \in L^1$, $\| f_{\tau_k} \|_\infty \leq 2^k$ et $f_{\tau_k \wedge n} = E(f_{\tau_k} | \mathfrak{F}_n)$). Alors on a

$$f^* = \sup_n | f_n | \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k^* ,$$

et donc

$$\| f \|_{H_p}^p \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k^p \int_\Omega a_k^{*p} d\mu \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k^p .$$

Pour la même raison, on a

$$(f - f_{\tau_{N-1}})_n = \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k (a_k)_n \quad \text{et} \quad (f_{\tau_M})_n = \sum_{k=-\infty}^{M} \lambda_k (a_k)_n , \qquad -\infty < n < \infty ,$$

et donc

$$\lim_{N\to\infty} \| f - f_{\tau_{N-1}} \|_{H_p}^p \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{N}^{\infty} \lambda_k^p = 0,$$

et

$$\lim_{M\to-\infty} \| f_{\tau_M} \|_{H_p}^p \leq \lim_{M\to-\infty} \sum_{-\infty}^{M} \lambda_k^p = 0.$$

Ce qui montre que $\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$ converge dans H_p vers f.

Enfin, on réarrange $\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k$ en $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j b_j$, on obtient ainsi la forme définitive que nous voulons. Ce qui termine la décomposition du théorème.

COROLLAIRE 1. — *Désignons*

$$\tilde{H}_p = \left\{ \textit{martingales } f = (f_n)_{-\infty}^{\infty} : S(f) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\Delta f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \in L^p \right\},$$

avec la norme $\| f \|_{\tilde{H}_p} = \| S \|_p$. *Alors on a* $H_p \subset \tilde{H}_p$ *et*

$$\| f \|_{\tilde{H}_p} \leq C_p d \| f \|_{H_p} \qquad (0 < p \leq 1).$$

Preuve. — il suffit de remarquer que pour tout p-atome a, on a

$$\int_\Omega S(a)^p d\mu \leq 1,$$

et que pour toute

$$f = \sum_{1}^{\infty} \lambda_j a_j \in L^1 \cap H_p,$$

on a

$$| f_i - f_{i-1} | \leq \sum_j \lambda_j | (a_j)_i - (a_j)_{i-1} |,$$

et que

$$S(f) \leq \sum_j \lambda_j S(a_j).$$

Remarque. — En imitant [*2*], on peut démontrer $H_p = \tilde{H}_p$ dans le cas où $|\Omega| = \infty$, sous l'hypothèse (T').

Maintenant, étudions la décomposition plus fine de martingales dans H_p atomique régulier. Pour cela, on se place dans le cas où $\mathfrak{F}_n$ est engendrée par des atomes $\{ I_i^{(n)} \}$ vérifiant

$$I_i^{(n)} = \bigcup_{j=l_i}^{m_i} I_j^{(n+1)} ;$$

$| I_j^{(n+1)} | \geq \alpha | I_i^{(n)} |$ (quand $I_j^{(n+1)} \subset I_i^{(n)}$), $0 < \alpha < 1$; et $0 < \alpha_n \leq | I_i^{(n)} | < \infty$, pour tous i, où α, α_n sont constantes. Dans ce cas, pour toute martingale $(f_n)_{-\infty}^{\infty}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $r \in]1, \infty[$, tel que $f^{(n)} = (f_{m \wedge n}) \in H_r$, car il existe $r_0 \in [1, \infty[$, tel que $f_n \in L^\infty \cap L^{r_0}$. Alors quand $f \in H_p$, $0 < p \leq 1$, on a $f^{(n)} \in H_1 \cap H_p$. Donc, il nous suffit de considérer la décomposition atomique pour $f \in H_1 \cap H_p$.

Dans ce cas, désignons

$$\mathfrak{I} = \{ \text{tous les atomes } I_i^{(n)}, \ -\infty < n < \infty, \ i = 1, 2 \ldots \}.$$

Nous disons qu'une fonction $a \in L^\infty(\Omega)$ est un p-atome strict, s'il existe un $I \in \mathfrak{I}$ tel que

$$(8') \qquad a\mathbb{1}(\{ \Omega - I \}) = 0, \quad \int_\Omega a d\mu = 0, \quad \| a \|_\infty \leq | I |^{-1/p}.$$

THÉORÈME 2. — *Soit $f \in H_1 \cap H_p$. Alors il existe une suite $\{ \lambda_j^{(r)} \}$ de réels positifs et une suite $\{ a_j^{(r)} \}$ de r-atomes stricts avec $r = 1$ ou $r = p$, telles que $\lambda_j^{(1)} a_j^{(1)} = \lambda_j^{(p)} a_j^{(p)}$, et $f = \sum_1^\infty \lambda_j^{(r)} a_j^{(r)}$, où la série converge dans H_r. De plus, on a les inégalités* (6).

Preuve. — Comme dans la démonstration du théorème 1, on a

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} (f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}) \mathbb{1}(\{ \tau_{k-1} < \infty \}).$$

Remarquons que

$$\{ \tau_{k-1} < \infty \} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^{(l_{k,j})},$$

avec $I_j^{(l_{k,j})} \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{F}_{l_{k,j}} \cap \mathfrak{F}_{\tau_{k-1}}$ disjoints deux à deux, pour k fixé. Désignons

$$a_{k,j}^{(r)} = \frac{1}{\lambda_{k,j}^{(r)}} (f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}) \mathbb{1}(I_j^{(l_{k,j})}),$$

et $\lambda_{k,j}^{(r)} = 2^{k+1} \mid I_j^{(l_k,j)} \mid^{1/r}$. Alors chaque $a_{k,j}^{(r)}$ est un r-atome strict associé à $I_j^{(l_k,j)}$. En effet, puisque $I_j^{(l_k,j)} \in \mathfrak{F}_{\tau_{k-1}}$, on a

$$\frac{1}{\mid I_j^{(l_k,j)} \mid} \int_{I^{(l_k,j)}} a_{k,j}^{(r)} d\mu = E(a_{k,j}^{(r)} \mid \mathfrak{F}_{\tau_{k-1}}) \mathbb{1}(I_j^{(l_k,j)})$$
$$= \frac{1}{\lambda_{k,j}^{(r)}} E((f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}) \mid \mathfrak{F}_{\tau_{k-1}}) \mathbb{1}(I_j^{(l_k,j)}) = 0 .$$

Alors on obtient la décomposition atomique de f suivante

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)} .$$

D'abord, démontrons la deuxième inégalité de (6). On a

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} (\lambda_{k,j}^{(r)})^r = \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)r} \mid \{ \tau_{k-1} < \infty \} \mid \leq C_r d \mid\mid f \mid\mid_{H_r}^r . \tag{8}$$

Maintenant, démontrons que la série double $\sum_{k,j} \lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)}$ converge vers f dans H_r et que $\mid\mid f \mid\mid_{H_r}^r \leq \sum_{k,j} (\lambda_{k,j}^{(r)})^r$.

Remarquons que tous les r-atomes stricts sont dans la boule unité de H_r. Alors, d'après (8), on a

$$\lim_{n,m,l \to \infty} \int_\Omega \sum_{(k,j) \notin [-n,m] \times [1,l]} \sum (\lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)*})^r d\mu \leq \lim_{n,m,l \to \infty} \sum_{(k,j) \notin [-n,m] \times [1,l]} \sum (\lambda_{k,j}^{(r)})^r = 0 .$$

Prenant $r = 1$, on a que

$$g_{n,m,l} = \sum_{k=-n}^{m} \sum_{j=1}^{l} \lambda_{k,j}^{(1)} a_{k,j}^{(1)}$$

converge vers une limite g dans H_1 (parce que H_1 est complet), et donc dans L^1 aussi. Alors

$$(g - g_{n,m,l})_i = \sum_{(k,j) \notin [-n,m] \times [1,l]} \sum \lambda_{k,j}^{(p)} (a_{k,j}^{(p)})_i , \qquad -\infty < i < \infty ,$$

avec la série convergeant dans L^1. Quitte à extraire une sous-suite, on a

$$(g - g_{n,m,l})^* \leq \sum_{(k,j) \notin [-n,m] \times [1,l]} \sum \lambda_{k,j}^{(p)} a_{k,j}^{(p)*} ,$$

alors $g_{n,m,l}$ converge vers g dans H_p aussi. Puisque f est la limite ponctuelle, on a $g = f$, et que

$$\| f \|_{H_r}^r \leq \lim_{n,m,l \to \infty} \| g_{n,m,l} \|_{H_r}^r \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} (\lambda_{k,j}^{(r)})^r .$$

En réarrangeant $\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)}$ en $\sum_{1}^{\infty} \lambda_j^{(r)} a_j^{(r)}$, on termine la démonstration.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $\{ \mathfrak{F}_n \}_{-\infty}^{\infty}$ *atomique et régulière, avec tous les atomes* $I_i^{(n)}$ *étant des cubes de* $\mathbb{R}^k$ *dont les côtés sont parallèles aux axes. Alors pour* $\frac{k}{k+1} < p \leq 1$, *on a* $H_p \subset H_{p,c}$ (*l'indice c désigne « classique » selon Stein-Weiss*).

Preuve. — D'après le théorème 2, pour $f \in H_1 \cap H_p$, on a $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ où la série converge dans H_1 (et donc dans L^1) et dans H_p, et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p \leq d C_p \| f \|_{H_p}^p .$$

Alors pour les transformées R_i de Riesz, on a

$$R_i(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j R_i(a_j) , \qquad i = 1, \ldots, k , \tag{9}$$

où la série converge dans $L^\alpha(D)$ avec $0 < \alpha < 1$ et D ensemble compact quelconque de $\mathbb{R}^k$. Quitte à extraire une sous-suite, on a

$$| R_i(f) | \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j | R_i(a_j) | , \qquad i = 1, \ldots, k ,$$

sur tout ensemble compact, donc sur $\mathbb{R}^k$ tout entier. Alors on a

$$\| f \|_{H_{p,c}}^p \leq C_p \sum_{i=0}^{k} \| R_i(f) \|_p^p \leq C_p \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p \leq C_p d \| f \|_{H_p}^p . \tag{10}$$

car $\| R_i(a_j) \|_p \leq C_p$ pour $\frac{k}{k+1} < p \leq 1$ (voir Coifman et Weiss [5], p. 586).

Comme $H_1 \cap H_p$ est dense dans H_p et que $H_{p,c}$ est complet, alors on peut prolonger l'opérateur continu d'identité $I : H_1 \cap H_p \to H_{p,c}$ en un opérateur continu sur H_p dans $H_{p,c}$. D'où le corollaire.

Remarque. — On a aussi le même résultat pour $\mathbb{T}^k$, en se référant à Stein [*6*]. Davis [*4*] a montré $H_p(\mathbb{T}) \subset H_{p,c}(\mathbb{T})$, $\frac{1}{2} < p \leq 1$.

2. LE RÉARRANGEMENT DE FONCTIONS DANS $L^1 \cap H_1$ D'APRÈS DAVIS

Récemment, Davis [*4*] a caractérisé la fonction de distribution de $f \in L^1 \cap H_{p,c}$, $0 < p \leq 1$, en montrant le résultat suivant.

PROPOSITION. — *Soit* $f \in L^1(T) \cap \operatorname{Re} H_{p,c}$, $E(f) = 0$, *alors*

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d(t)dt \right|^p dx \leq C_p \| f \|_{H_p}^p , \tag{11}$$

où f_d *est le réarrangement de* f *qui est décroissant sur* $[0, 2\pi]$.

Réciproquement, soit $f \in \operatorname{Re} L^1(\mathbb{T})$ telle que

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d(t)dt \right|^p dx < \infty ,$$

alors $f_d \in H_{p,c}$ et on a

$$\| f_d \|_{H_{p,c}}^p \leq C_p \left(\int_0^\pi \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d(t)dt \right|^p dx + \| f \|_p^p \right), \qquad \frac{1}{2} < p \leq 1 . \tag{12}$$

Il l'a aussi montré pour $H_{p,c}(\mathbb{R}^k)$.

La première assertion de cette proposition peut avoir lieu pour des martingales générales. Nous voulons l'établir sous l'hypothèse (T′).

Soit f une fonction réelle définie sur Ω, on désigne par f_d la fonction réarrangée de f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$f_d \geq 0$, décroissante sur $[0, \infty[$;
$f_d \leq 0$, décroissante sur $]-\infty, 0[$.

THÉORÈME 3. — *Supposons que l'hypothèse* (T′) *soit vérifiée. Soit*

$$f \in L^1(\Omega) \cap \operatorname{Re} H_p , \qquad 0 < p \leq 1 ,$$

alors on a

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d(t)dt \right|^p dx \leq C_{p,d} \| f \|_{H_p}^p . \tag{11'}$$

Preuve. — Désignons $f_n = \mathrm{E}(f \mid \mathfrak{F}_n)$, $f^* = \sup_n |f_n|$, $g_n = (f_n)^+$, $g^* = \sup_n g_n = (\sup_n f_n)^+$, $h = (f_n)^-$, $h^* = \sup_n h_n = (-\inf f_n)^+$. Alors $f^* = \max(g^*, h^*) \in \mathrm{L}^p$, $f_n \to f$, p. p., et $\mathrm{E}(f) = 0$. Pour le processus $(g_n)_{-\infty}^{\infty}$ et pour $\lambda > 0$, définissons le t. d'a. τ_λ vérifiant (1), (2), (3), c'est-à-dire

$$|\{\tau_\lambda < \infty\}| \leq d\,|\{g^* > \lambda\}|,$$
$$\{f > \lambda\} \subset \{\sup_n f_n > \lambda\} = \{g^* > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\},$$
$$f_{\tau_\lambda} \mathbb{1}(\{\tau_\lambda < \infty\}) \leq g_{\tau_\lambda} 1(\{\tau_\lambda < \infty\}) \leq \lambda.$$

Alors, on a

$$\int_{\{\tau_\lambda < \infty\}} f d\mu = \int_{\{\tau_\lambda < \infty\}} f_{\tau_\lambda} d\mu \leq \lambda\,|\{\tau_\lambda < \infty\}| \leq d\lambda\,|\{g^* > \lambda\}| = d\lambda\sigma(\lambda). \tag{13}$$

Désignons $\theta_\lambda = \sup\{x : f_d(x) > \lambda\}$. Les deux fonctions $\int_\varphi^{\theta_\lambda} f_d(x)dx$ et $\lambda(\theta_\lambda - \varphi)$ sont continues en $\varphi \in]-\infty, 0]$, et respectivement décroissante, croissante par rapport à $|\varphi|$ $(\varphi < 0)$. Puisque

$$\int_0^{\theta_\lambda} f_d(x)dx > \lambda\theta_\lambda \qquad \text{et} \qquad -\int_{-\infty}^0 f_d(x)dx = \int_0^\infty f_d(x)dx \geq \int_0^{\theta_\lambda} f_d(x)dx,$$

il existe $\varphi_\lambda < 0$ uniquement tel que

$$\int_{\varphi_\lambda}^{\theta_\lambda} f_d(x)dx = \lambda(\theta_\lambda - \varphi_\lambda). \tag{14}$$

Désignons $\psi_\lambda = \theta_\lambda - \varphi_\lambda$, alors ψ_λ est une fonction décroissante en $\lambda \in]0, \infty[$. En effet, soit $\lambda > \lambda'$, alors $\theta_\lambda \leq \theta_{\lambda'}$, et $\varphi_{\lambda'} \leq \varphi_\lambda$, la dernière inégalité est obtenue par l'inégalité suivante

$$\int_\varphi^{\theta_{\lambda'}} = -\int_{\varphi_\lambda}^{\varphi} + \int_{\varphi_\lambda}^{\theta_\lambda} + \int_{\theta_\lambda}^{\theta_{\lambda'}} > \lambda(\theta_\lambda - \varphi_\lambda) + \lambda'(\theta_{\lambda'} - \theta_\lambda) > \lambda'(\theta_{\lambda'} - \varphi),$$
$$\text{pour } \varphi \in [\varphi_\lambda, 0[.$$

D'après (14), on peut contruire

$$\mathrm{E} = \{f > \lambda\} \cup \{f < \beta\} \cup \mathrm{F}, \quad \mathrm{F} \subset \{f = \beta\}, \qquad \beta \leq 0,$$

tel que $|\{f < \beta\} \cup \mathrm{F}| = -\varphi_\lambda$, alors on a

$$\int_{\mathrm{E}} f d\mu = \lambda\psi_\lambda = \lambda\,|\mathrm{E}|, \tag{14'}$$

$$\int_{\mathrm{E}} f d\mu = \inf_{\mathrm{F}:\mathrm{F} \supset \{f > \lambda\}, |\mathrm{F}| \leq |\mathrm{E}|} \int_{\mathrm{F}} f d\mu. \tag{15}$$

Alors, de (13), (14′) et (15), on peut déduire

$$\psi_\lambda \leq d\,|\{g^* > \lambda\}| = d\sigma(\lambda). \tag{16}$$

En effet, quand $\int_E f d\mu \leq \int_{\{\tau_\lambda < \infty\}} f d\mu$, alors (16) est déduit de (13) et (14′); sinon, (16) est déduit de (15), car $\{f > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\}$.

Désignons $\alpha_n = \left(\frac{1}{2^{n+1}} \int_{-2^n}^{2^n} f_d(t)dt\right)^+$. D'abord on montre que $\psi_{\alpha_n} \geq 2^n$ lorsque $\alpha_n > 0$. En effet, quand $\theta_{\alpha_n} \geq 2^n$, on a $\psi_{\alpha_n} = \theta_{\alpha_n} - \varphi_{\alpha_n} \geq 2^n$; quand $0 < \theta_{\alpha_n} < 2^n$, on a

$$\int_{-2^n}^{\theta_{\alpha_n}} f_d(t)dt = \int_{-2^n}^{2^n} - \int_{\theta_{\alpha_n}}^{2^n} \geq 2^{n+1}\alpha_n - \alpha_n(2^n - \theta_{\alpha_n}) = \alpha_n(\theta_{\alpha_n} + 2^n),$$

ce qui entraîne $\varphi_{\alpha_n} \leq -2^n$, et donc $\psi_{\alpha_n} \geq 2^n$.

Pour tout $N \in \mathbb{Z}^+$, définissons $j_0 = N$, j_1 est le plus grand entier $k < j_0$ vérifiant $\alpha_k > 2\alpha_{j_o}$ (s'il existe), ... j_{i+1} est le plus grand entier $k < j_i$ vérifiant $\alpha_{j_{i+1}} > 2\alpha_{j_i}$, ..., alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{N} 2^n\alpha_n^p &= \sum_{i=0}^{\infty} \{2^{j_i}\alpha_{j_i}^p + 2^{j_i-1}\alpha_{j_i-1}^p + \ldots + 2^{j_{i+1}+1}\alpha_{j_{i+1}+1}^p\} \\ &\leq (1+2^p)\sum_{i=0}^{\infty} 2^{j_i}\alpha_{j_i}^p \leq (1+2^p)\sum_{i=0}^{\infty} \psi_{\alpha_{j_i}}\alpha_{j_i}^p \leq C_p \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\frac{\alpha_{j_i}}{2}}^{\alpha_{j_i}} \psi_\lambda \lambda^{p-1} d\lambda \\ &\leq C_{p,d}\,\|g^*\|_{H_p}^p,\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{-\infty}^{\infty} 2^n\left(\left(\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-2^n}^{2^n} f_d(t)dt\right)^+\right)^p \leq C_{p,d}\,\|f\|_{H_p}^p.$$

En considérant $-f$, on a aussi

$$\sum_{-\infty}^{\infty} 2^n\left(\left(\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-2^n}^{2^n} f_d(t)dt\right)^-\right)^p \leq C_{p,d}\,\|f\|_{H_p}^p.$$

D'après l'inégalité suivante (voir [4])

$$(17)\quad C_p \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{n(1-p)} \left| \int_{-2^n}^{2^n} f_d \right|^p - C_p \| f \|_p^p \leq \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d \right|^p dx$$

$$\leq C_p \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{n(1-p)} \left| \int_{-2^n}^{2^n} f_d \right|^p + C_p \| f \|_p^p,$$

on obtient (11′). Ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque. — Réciproquement, soit $f \in \mathrm{Re}\, L^1(\Omega)$ telle que

$$\frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d(t) dt \in L^p(0, \infty),$$

est-ce qu'on peut en déduire qu'il existe un réarrangement f_r de f, défini sur Ω, qui est une martingale dans certain H_p. Pour le cas classique la réponse de Davis [4] est « oui », comme suit :

THÉORÈME 4 (Davis). — *Soit* $f \in \mathrm{Re}\, L^1(\mathbb{R}^k)$ (*ou* $f \in \mathrm{Re}\, L^1(\mathbb{T}^k)$) *telle que*

$$\frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f_d(t) dt \in L^p(0, \infty)$$

(*ou* $\in L^p(0, 1)$), $\dfrac{k}{k+1} < p \leq 1$, *alors il existe une fonction réarrangée* f_r *de* f *définie sur* $\mathbb{R}^k$ (*ou* $\mathbb{T}^k$) *telle que* $f_r \in H_{p,c}$.

Preuve. — Il suffit de considérer $\mathbb{R}^2$. Définissons un réarrangement f_r de f vérifiant

$f_r \geq 0$ pour $y > 0$ et $f_r \leq 0$ pour $y \leq 0$;
$f_r(x_0, y) = f_r(-x_0, y) = f_r(x, \pm x_0) = C_{x_0}$, pour $0 < |y| \leq x_0$, $-x_0 \leq x \leq x_0$;

C_{x_o} est décroissant en x_0 pour $y > 0$, et croissant pour $y < 0$. Considérons une famille $\{ \mathfrak{F}_n \}_{-\infty}^{\infty}$ croissante de sous-tribus de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ avec $\mathfrak{F}_n$ engendrée par

Pour $n > 0$:

$$I_0^{(n)} = \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} \right[\times \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} \right[\text{ et tous les } I_{K,M,k,m}^{(n)}$$

$$\left[K + \frac{k}{2^n}, K + \frac{k+1}{2^n} \right[\times \left[M + \frac{m}{2^n}, M + \frac{m+1}{2^n} \right[,$$

sauf 4 carrés correspondant à $K = M = 0$; $k, m = -1, 0$;

Pour $n \leq 0$:

$$I_0^{(n)} = [-2^{|n|}, 2^{|n|}[\times [-2^{|n|}, 2^{|n|}[\text{ et tous les } I_{k,m}^{(n)} = [k2^{|n|}, (k+1)2^{|n|}[\times [m2^{|n|}, (m+1)2^{|n|}[,$$

sauf 4 carrés correspondant à $k, m = -1, 0$.

Alors, on peut montrer sans peine que $f_r \in H_p$, où H_p est relative à $\{ \mathfrak{F}_n \}$. D'après le corollaire 2, on a $f_r \in H_{p,c}$.

Remarque. — Cette démonstration est un peu plus simple que celle de Davis [*4*] qui n'est pas directe.

3. QUELQUES RÉSULTATS SUR L'ESPACE H_1

THÉORÈME 5. — *Supposons que l'hypothèse* (T′) *ait lieu. Soit* $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$, *alors pour tout* $\lambda_0 > 0$, *on a*

$$(18) \qquad -\frac{1}{2}\| f \|_1 + \frac{1}{2}\int_{\{f^* > 2\lambda_0\}} f^* d\mu \leq \int_{\{f > \lambda_0\}} f \log \frac{f}{\lambda_0} d\mu \leq d \int_{\{f^* > \lambda_0\}} f^* d\mu.$$

Preuve. — Pour $(f_n)_{-\infty}^{\infty}$ $(f_n = E(f \mid \mathfrak{F}_n))$ et pour $\lambda > 0$, définissons un t. d'a. τ vérifiant (1), (2), (3). Alors on a

$$\int_{\{f > \lambda\}} f d\mu \leq \int_{\{\tau < \infty\}} f d\mu = \int_{\{\tau < \infty\}} f_\tau d\mu \leq d\lambda \,|\, \{ f^* > \lambda \} \,| = d\lambda\sigma(\lambda).$$

Donc

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{\{f > \lambda\}} f d\mu d\lambda \leq d \int_{\lambda_0}^{\infty} \sigma(\lambda) d\lambda$$

$$= d \int_{\{f^* > \lambda_0\}} f^* d\mu - d\lambda_0 \sigma(\lambda_0) \leq d \int_{\{f^* > \lambda_0\}} f^* d\mu,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\{f > \lambda_0\}} f \log \frac{f}{\lambda_0} d\mu \leq d \int_{\{f^* > \lambda_0\}} f^* d\mu.$$

La première inégalité de (18) a lieu sans l'hypothèse (T′) et la positivité de f. En effet, on a

$$\sigma(\lambda) \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f| \, d\mu, \qquad \text{pour } f \in L^1.$$

Donc

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \sigma(\lambda) d\lambda \leq 2 \int_{\{|f| > \frac{\lambda_0}{2}\}} |f| \log \frac{2|f|}{\lambda_0} d\mu,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}\| f \|_1 + \frac{1}{2}\int_{\{f^* > 2\lambda_0\}} f^* d\mu \leq \int_{\{|f| > \lambda_0\}} | f | \log \frac{| f |}{\lambda_0} d\mu .$$

Remarque. — Gundy [7], Garsia [8] et Neveu [9] ont aussi obtenu ces résultats avec un peu de différence deux à deux. Stein [6] a étudié le cas classique.

Maintenant considérons des réarrangements de fonctions et la classe $L \log^+ L$ lorsque $| \Omega | = 1$.

THÉORÈME 6. — *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu, \{ \mathfrak{F}_n \}_{n \geq 0})$ *atomique et régulier avec* $| \Omega | = 1$. *Soit* $f \in \mathrm{Re}\, H_1$. *On suppose qu'il existe* $n_0 \in Z^+$ *et* $\lambda \in R^+$ *tels que pour tout* $n \geq n_0$ *et pour tout* $I_i^{(n)} \in \mathfrak{F}_n$, *on ait*

$I_i^{(n)} \cap \{ f > \lambda \} = \phi$ *ou bien* $I_i^{(n)} \cap \{ f < -\lambda \} = \phi$ *ou bien tous les deux, alors* $f \in L \log^+ L$.

Preuve. — Pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $I_i^{(n)}$, au moins une des deux égalités

$$\frac{1}{| I_i^{(n)} |}\int_{I_i^{(n)} \cap \{f > \lambda\}} f d\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{| I_i^{(n)} |}\int_{I_i^{(n)} \cap \{f < -\lambda\}} f d\mu = 0 ,$$

a lieu, alors on a

$$\left| \frac{1}{| I_i^{(n)} |}\int_{I_i^{(n)}} f d\mu \right| \geq \left| \frac{1}{| I_i^{(n)} |}\int_{I_i^{(n)}} f \mathbb{1}(\{ f > \lambda \}) d\mu \right| + \left| \frac{1}{| I_i^{(n)} |}\int_{I_i^{(n)}} f \mathbb{1}(\{ f < -\lambda \}) d\mu \right| - \lambda .$$

Donc

$$\max((f \mathbb{1}(\{ f > \lambda \}))^*, (f \mathbb{1}(\{ f < -\lambda \}))^*) \leq f^* + \lambda + (\min_{n < n_0, i} | I_i^{(n)} |)^{-1} \| f \|_1 ,$$

ce qui entraîne que $| f | \in H_1$. D'après théorème 5, on a $f \in L \log^+ L$.

Remarque. — 1. Cette considération est valable pour $H_{1,c}(\mathbb{T}^k)$ aussi. En effet, si $\{ f > \lambda \}$ et $\{ f < -\lambda \}$ peuvent être séparés par deux voisinages, alors on a que $f \in H_{1,c} \Rightarrow f \in L \log^+ L$. Pour cela, il suffit de remplacer l'estimation de fonction maximale par celle des transformées de Riesz R_j, $j = 1, \ldots, k$.

2. Soit f_s le réarrangement symétrique et décroissant sur $[0, \pi]$ de $f \in \mathrm{Re}\, L^1(\mathbb{T})$. M. Essen et D. Shea ont montré que $f_s \in H_{1,c} \Rightarrow f \in L \log^+ L$. C'est une conséquence directe du théorème précédent. En effet, puisque f_s satisfait à la séparabilité dans la remarque 1, alors on a $f_s \in L \log^+ L$, et donc $f \in L \log^+ L$.

Voilà une autre inégalité concernant $H_{1,c}$ qui est analogue à (11).

THÉORÈME 7. — *Pour* $f \in H_{1,c}(\mathbb{R})$ (*ou* $f \in H_{1,c}(\mathbb{T})$), *on a*

$$\left\| \frac{1}{x} \int_0^x (f(x_0 + t) + f(x_0 - t))dt \right\|_1 \leq C \| f \|_{H_1}. \tag{19}$$

Preuve. — Par exemple, considérons $\mathbb{R}$. Définissons deux opérateurs

$$Mf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt, \quad M^*f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^\infty \frac{f(t)}{t} dt, & x > 0 \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{t} dt, & x < 0, \end{cases} \quad \text{pour } f \in \bigcup_{p \geq 1} L^p.$$

Désignons la transformée de Fourier et de Hilbert de f par $\mathfrak{F}f$ et $\tilde{f}$ respectivement.

D'abord nous montrons que

$$\| M\tilde{g} \|_1 \leq C \| g \|_1, \qquad \text{pour toute fonction impaire } g \in H_1. \tag{20}$$

En effet, d'après

$$M^*f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(xy) \frac{1}{y} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| dy, \tag{21}$$

pour toute fonction paire $f \in L^p$, $1 < p < \infty$.

On a que

$$\| M^*\tilde{f} \|_\infty \leq C \| f \|_\infty, \quad \text{pour toute fonction paire } f \in L^\infty \cap L^p, 1 < p < \infty.$$

Soit g une fonction impaire dans $H_1 \cap H_2$. Prenant une fonction paire $f \in L^\infty$ qui est nulle dans un voisinage de 0, respectivement de ∞. En remarquant que $\tilde{g}$ est paire dans $L^1 \cap L^2$, et que $\mathfrak{F}M^*f = M\mathfrak{F}f$ pour $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} \int_0^x \tilde{g}(t)dt f(x)dx &= \int_{-\infty}^\infty \tilde{g}(t) M^*f(t)dt \\ &= -\int_{-\infty}^\infty \mathfrak{F}^{-1}g(t)(-i \operatorname{sgn} t \mathfrak{F}M^*f(t))dt \\ &= -\int_{-\infty}^\infty \mathfrak{F}^{-1}g(t) M\mathfrak{F}\tilde{f}(t)dt \\ &= -\int_{-\infty}^\infty g(t) M^*\tilde{f}(t)dt = 0(\| g \|_1 \| f \|_\infty). \end{aligned}$$

Donc

$$\| M\tilde{g} \|_1 = \sup_{\text{telles } f : \| f \|_\infty \leq 1} \left| \int_{-\infty}^\infty M\tilde{g}(t) f(t)dt \right| \leq C \| g \|_1,$$

pour toute $g \in H_1 \cap H_2$ (impaire).

Dans le cas où $g \in H_1$, prenons $g_m \in H_1 \cap H_2$ telles que $\| g_m - g \|_{H_1} \to 0$. D'après le lemme de Fatou, on a

$$\| M\tilde{g} \|_1 = \| \lim_{m \to \infty} M\tilde{g}_m \|_1 \leq C \| g \|_1 ,$$

ce qui montre (20).

Revenons à la démonstration du théorème. Désignons

$$F_{x_0}(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t),$$

on a $F_{x_0}(t) = - \tilde{\tilde{F}}_{x_0}(t)$, $\tilde{F}_{x_0}$ impaire et $\tilde{F}_{x_0} \in H_1$. Alors

$$\| MF_{x_0} \|_1 \leq C \| \tilde{F}_{x_0} \|_1 \leq C \| f \|_{H_1} ,$$

d'où le théorème.

Remarques. — 1. Ce théorème peut être utilisé pour démontrer que $f_s \in H_1 \Rightarrow f \in L \log^+ L$. En effet, prenant $x_0 = 0$, on a $(f_s)^+ \log \frac{1}{t} \in L^1$; prenant $x_0 = \pi$, on a $(f_s)^- \log \frac{1}{\pi - t} \in L$. Ce qui montre que f^+ et f^- sont dans $L \log^+ L$.

2. Long (Acta Math. Sinica 20 (1977), 215-221) et M. Kinukawa et S. Igari (Tôhoku Math. J. 13 (1961), 274-280) ont étudié des problèmes relatifs.

4. SUR L'HYPOTHÈSE (T)

Maintenant montrons que l'hypothèse (T) est une conséquence de la condition « R » de [*2*] :

(22) condition « R » : $E(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_n) \leq d E(\mathbb{1}(F) \mid \mathfrak{F}_{n-1})$,
$- \infty < n < \infty$, pour tout $F \in \mathfrak{F}$, $| F | < \infty$.

PROPOSITION 1. — *La condition « R » implique l'hypothèse* (T).

Preuve. — Soit $(\gamma_n)_{-\infty}^{\infty}$ un processus positif adapté à $\{ \mathfrak{F}_n \}$, et soit $\lambda > 0$, vérifiant $| \{ \gamma^* > \lambda \} | < \infty$. Définissons le t. d'a. τ_λ comme suit

$$\tau_\lambda = \inf \left\{ n : \omega \in \left\{ E(\mathbb{1}(\{ \gamma_{n+1} > \lambda \}) \mid \mathfrak{F}_n) \geq \frac{1}{d} \right\} \right\} = \inf \{ n : \omega \in G_{n+1} \} .$$

a) On a $| \{ \tau_\lambda < \infty \} | \leq d | \{ \gamma^* > \lambda \} |$.

En effet, pour $N \in \mathbb{Z}^+$, définissons t. d'a. $\tau_\lambda^{(N)} = \inf \{ n \geq - N : \omega \in G_{n+1} \}$, on a

$$\{ \tau_\lambda^{(N)} = n \} = \{ \omega : \omega \notin G_{j+1}, - N \leq j < n, \text{ et } \omega \in G_{n+1} \} \subset G_{n+1} , \quad n > - N ,$$

$$\{ \tau_\lambda^{(N)} = - N \} = \{ \omega : \omega \in G_{-N+1} \} = G_{-N+1} ,$$

alors

$$\{\tau_\lambda^{(N)} = n\} = G_{n+1} \cap \{\tau_\lambda^{(N)} = n\} = \left\{ \begin{aligned} &E(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda\} \cap \{\tau_\lambda^{(N)} = n\}) \mid \mathfrak{F}_n) \\ &= E(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda\}) \mid \mathfrak{F}_n)\mathbb{1}(\{\tau_\lambda^{(N)} = n\}) \geq \frac{1}{d} \end{aligned} \right\}$$

donc

$$\sum_{-N}^{\infty} |\{\tau_\lambda^{(N)} = n\}| \leq d \sum_{-N}^{\infty} E(E(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda\} \cap \{\tau_\lambda^{(N)} = n\}) \mid \mathfrak{F}_n))$$

$$= d \sum_{-N}^{\infty} |\{\gamma_{n+1} > \lambda\} \cap \{\tau_\lambda^{(N)} = n\}|$$

$$\leq d \sum_{-N}^{\infty} |\{\gamma^* > \lambda\} \cap \{\tau_\lambda^{(N)} = n\}| \leq d\,|\{\gamma^* > \lambda\}|.$$

Puisque

$$\{\tau_\lambda = \infty\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \{\tau_\lambda^{(N)} = \infty\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \{\omega : \omega \notin G_{n+1},\ n \geq -N\}$$

avec les termes décroissants, alors

$$\{\tau_\lambda < \infty\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{\tau_\lambda^{(N)} < \infty\}$$

avec les termes croissants, et donc

$$|\{\tau_\lambda < \infty\}| = \lim_{N \to \infty} |\{\tau_\lambda^{(N)} < \infty\}| \leq d\,|\{\gamma^* > \lambda\}|.$$

En particulier, $|\{\tau_\lambda = -\infty\}| = 0$, parce que

$$\{\tau_\lambda = -\infty\} \in \bigcap_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_n \qquad \text{et} \qquad |\{\gamma^* > \lambda\}| < \infty.$$

b) On a $\{\gamma^* > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\}$.

En effet, soit $\omega \in \{\gamma^* > \lambda\}$, alors il existe $n < \infty$ tel que $\omega \in \{\gamma_{n+1} > \lambda\}$. Puisque

$$\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda\}) = E(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda\} \mid \mathfrak{F}_{n+1}) \leq dE(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda\}) \mid \mathfrak{F}_n),$$

alors $\{\gamma_{n+1} > \lambda\} \subset G_{n+1}$, et donc $\tau_\lambda(\omega) \leq n < \infty$.

c) On a $\gamma^*_{\tau_\lambda}\mathbb{1}(\{\tau_\lambda < \infty\}) \leq \lambda$.

En effet,

$$\tau_\lambda = n \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{j \leq n} G_j \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{j \leq n} \{\gamma_j > \lambda\} \Rightarrow \gamma_n^* \leq \lambda,$$

alors $\gamma^*_{\tau_\lambda}\mathbb{1}(\{\tau_\lambda < \infty\}) \leq \lambda$.

d) On a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \Rightarrow \tau_{\lambda_1} \geq \tau_{\lambda_2}$, car

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda_2\}) \mid \mathfrak{F}_n) \\ &\qquad = \mathrm{E}(\mathbb{1}(\{\gamma_{n+1} > \lambda_1\}) \mid \mathfrak{F}_n) + \mathrm{E}(\mathbb{1}(\{\lambda_1 \geq \gamma_{n+1} > \lambda_2\}) \mid \mathfrak{F}_n). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition.

On peut démontrer que la condition « R » est équivalente à la condition suivante (on a donné dans [*2*] des indications de la démonstration) :

(22′) condition « R′ » : pour tout $\mathrm{F}_n \in \mathfrak{F}_n$, il existe au moins un $\mathrm{G}_n \in \mathfrak{F}_{n-1}$, tel que $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{G}_n$ et $|\mathrm{G}_n| \leq d\,|\mathrm{F}_n|$, $\quad -\infty < n < \infty$.

PROPOSITION 2. — *Les conditions « R » et « R′ » sont équivalentes.*

Preuve. — Pour tout $\mathrm{F}_n \in \mathfrak{F}_n$, en posant

$$\mathrm{G}_n = \left\{ \mathrm{E}(1(\mathrm{F}_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) \geq \frac{1}{d} \right\},$$

on peut montrer que « R » $\Rightarrow$ « R′ ». Pour la réciproque, il suffit de démontrer que pour tout $\mathrm{F}_n \in \mathfrak{F}_n$, $|\mathrm{F}_n| < \infty$, on a

$$\mathbb{1}(\mathrm{F}_n) \leq d\mathrm{E}(\mathbb{1}(\mathrm{F}_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}). \tag{23}$$

Soit $\mathrm{F}_n \in \mathfrak{F}_n$, alors il existe $\mathrm{G}_n \in \mathfrak{F}_{n-1}$ tel que $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{G}_n$ et $|\mathrm{G}_n| \leq d\,|\mathrm{F}_n|$. Mais on peut montrer que

$$\mathrm{F}_n \subset \{\mathrm{E}(\mathbb{1}(\mathrm{F}_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) > 0\} \subset \mathrm{G}_n. \tag{24}$$

En effet, en posant $\mathrm{F}_0 = \{\mathrm{E}(\mathbb{1}(\mathrm{F}_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = 0\}$, on a

$$|\mathrm{F}_n \cap \mathrm{F}_0| = \int_{\mathrm{F}_0} \mathbb{1}(\mathrm{F}_n) d\mu = \int_{\mathrm{F}_0} \mathrm{E}(\mathbb{1}(\mathrm{F}_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) d\mu = 0,$$

ce qui entraîne que

$$\mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_0' \qquad (' \text{ désigne le complément d'ensemble}).$$

Puisque

$$\mathrm{E}(\mathbb{1}(\mathrm{F}_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) \mathbb{1}(\mathrm{G}_n') = \mathrm{E}(\mathbb{1}(\mathrm{F}_n \cap \mathrm{G}_n') \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = 0,$$

on a

$$\mathrm{G}_n' \subset \mathrm{F}_0, \qquad \mathrm{F}_0' \subset \mathrm{G}_n.$$

Ce qui démontre (24), qui entraîne que sous la condition « R′ », on a

$$|\{\mathrm{E}(\mathbb{1}(\mathrm{F}_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) > 0\}| \leq d\,|\mathrm{F}_n|, \qquad \text{pour tout } \mathrm{F}_n \in \mathfrak{F}_n,\ |\mathrm{F}_n| < \infty. \tag{25}$$

Maintenant, pour $\mathrm{F}_n \in \mathfrak{F}_n$ étant donné, posons

$$\mathrm{H}_n = \left\{ \mathrm{E}(\mathbb{1}(\mathrm{F}_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) < \frac{1}{d} \right\} \cap \mathrm{F}_n.$$

Puisque

$$E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1})\mathbb{1}(H_n) \leq E(\mathbb{1}(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1})\mathbb{1}(H_n) < \frac{1}{d},$$

alors on a

$$H_n \subset \{ 0 < E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) \} \cap \left\{ E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) < \frac{1}{d} \right\} = K_n \in \mathfrak{F}_{n-1}.$$

Donc, en utilisant (25), on obtient

$$| K_n | \leq | \{ E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) > 0 \} | \leq d \, | H_n |.$$

On en déduit que

$$| H_n | = \int_{K_n} \mathbb{1}(H_n) d\mu = \int_{K_n} E(\mathbb{1}(H_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) d\mu < \frac{1}{d} | K_n | \leq | H_n |,$$

donc $| H_n | = 0$. Ce qui implique que $F_n \subset \left\{ E(1(F_n) \mid \mathfrak{F}_{n-1}) \geq \frac{1}{d} \right\}$, c'est-à-dire (23).

Ce qui termine la démonstration de la proposition.

Remarques. — 1. La condition « R » est déjà connue. Par exemple, sous cette condition, Brossard [*10*] a obtenu l'inégalité $\| S(f) \|_p \leq C_p \| f^* \|_p$ $(0 < p < \infty)$ pour des martingales à deux indices.

2. On peut montrer aisément que $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu, \{ \mathfrak{F}_n \}_{-\infty}^{\infty})$ atomique régulier avec la constante α, satisfait à (22) avec $d = \frac{1}{\alpha}$; et que $(\mathbb{T}, \mathscr{B}, d\theta, \{ \mathfrak{F}_n \}_{n \geq 0})$ de Gundy-Varopoulos [*11*] avec l'entier r satisfait à (22) avec $d = r$. Mais il n'est pas tellement évident de vérifier qu'ils satisfont à la condition de régularité de Burkholder-Gundy (pour cette condition, voir [*12*]). D'ailleurs, si on suppose que toutes les martingales positives satisfont à la condition de régularité de B-G, alors la condition « R » est satisfaite. En effet, si pour toute $f \in L^1$, $f \geq 0$, on a

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} = \sum_{j=1}^{N} V_n^{(j)} \gamma_n^{(j)},$$

où $V_n^{(j)}$ est mesurable par rapport à $\mathfrak{F}_{n-1}$, et $\gamma_n^{(j)}$ vérifie

$$\| \gamma_n^{(j)} \|_\infty \leq B, \qquad E(\gamma_n^{(j)} \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = 0, \qquad E(\gamma_n^{(j)} \bar{\gamma}_n^{(l)} \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = \delta_{j,l},$$

alors on peut montrer que pour toute $f \in L^1$, $f \geq 0$, on a

$$f_n \leq f_{n-1} + | \Delta f_n | \leq f_{n-1} + NB^2 E(| \Delta f_n | \, | \mathfrak{F}_{n-1}) \leq (1 + 2\,NB^2) f_{n-1}.$$

3. Quand $\{ \mathfrak{F}_n \}_{n \geq 0}$ est une famille décroissante, la situation est pareille. Tous les résultats restent encore vrais. Dans ce cas, dans (1), (2), (3), (4), (22) et (22′), il faut remplacer $\{ \tau_\lambda < \infty \}$ par $\{ \tau_\lambda > 0 \}$; « $\lambda_1 \geq \lambda_2 \Rightarrow \tau_{\lambda_1} \geq \tau_{\lambda_2}$ » par « $\lambda_1 \geq \lambda_2 \Rightarrow \tau_{\lambda_1} \leq \tau_{\lambda_2}$ » et $n - 1$ par $n + 1$.

RÉFÉRENCES

[*1*] R. E. EDWARDS, G. I. GAUDRY, Littlewood-Paley and multiplier theory. *Ergebnisse der Math.*, t. **90**, 1977, Springer-Verlag.

[*2*] JUI-LIN LONG, Martingale régulière et Φ-inégalités avec poids entre f^*, S(f) et $\sigma(f)$. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **291**, 1980, p. 31-34.

[*3*] A. BERNARD, B. MAISONNEUVE, Décomposition atomique de martingales de la classe H_1. Sém. Prob. XI, *Lect. Notes*, t. **581**, 1977, p. 303-323. Springer-Verlag.

[*4*] B. DAVIS, Hardy spaces and rearrangements. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **261**, 1980, p. 211-233.

[*5*] R. R. COIFMAN, G. WEISS, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **83**, 1977, p. 569-645.

[*6*] E. M. STEIN, Note on the class L log L. *Studia Math.*, t. **32**, 1969, p. 305-310.

[*7*] R. F. GUNDY, On the class L log L, martingales and singular integrals. *Studia Math.*, t. **33**, 1969, p. 109-118.

[*8*] A. M. GARSIA, *Martingale inequalities*. Sem. Notes on Recent Progress. W. A. Benjamin Inc, 1973.

[*9*] J. Neveu, *Martingales à temps discret*. Masson, Paris, 1972.

[*10*] J. BROSSARD, Généralisation des inégalités de Burkholder et Gundy aux martingales régulières à deux indices. *C. Acad. Sci.* (Paris), t. **288**, 1979, p. 267-270.

[*11*] R. F. GUNDY, N. TH. VAROPOULOS, A martingale that occurs in harmonic analysis. *Ark. for Math.*, t. **14**, 1976, p. 179-187.

[*12*] R. F. GUNDY, Inégalités pour martingales. *Lect. Notes in Math.*, t. **774**, 1980, p. 252-334. Springer-Verlag.

(Manuscrit reçu le 7 novembre 1980).