

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. R. JAIBI

Évolution d'une file d'attente avec priorité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, n° 3 (1980), p. 211-223

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_3_211_0>

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Évolution d'une file d'attente avec priorité

par

M. R. JAIBI (*)

(*) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis,
Campus Universitaire, Tunis Belvédère, Tunisie

RÉSUMÉ. — Par des méthodes de processus ponctuels et d'équations différentielles stochastiques, nous étudions les processus stochastiques associés à une file d'attente à un serveur, avec priorité absolue pour une classe de clients, acquis de service (en cas d'interruption) pour une seconde classe, et service dans l'ordre des arrivées au sein de chaque classe (toutes deux prises infinies). Seuls les clients prioritaires arriveront suivant une loi de Poisson. Notre résultat principal est une décomposition du temps virtuel d'attente des clients ordinaires à l'aide de deux fonctions aléatoires indépendantes faciles à décrire (cf. Théorème); cette décomposition a déjà été introduite par Hooke qui l'a démontrée en loi.

SUMMARY. — We Use « Marked point Processes » and Stochastic Differential Equations to study the stochastic Processes associated with a priority queue—one server and two infinite classes of customers—where the service is allowed with the preemptive Resume Discipline (cf. [2], [4]). Only customers of the high priority class will arrive according to a Poisson law.

0. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Soit Ω l'espace des mesures ponctuelles simples et infinies sur $\mathbf{R}_+$ marquées par $]0, +\infty[$. Un élément ω de Ω s'écrit $\omega = \sum_N \varepsilon_{(t_n, s_n)}$ où $(t_n, n \in \mathbf{N})$

est une suite de réels positifs croissant strictement vers l'infini et $(s_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de réels strictement positifs.

Munissons Ω de la tribu $\mathcal{A}$ qui rend mesurables les applications $\omega \rightarrow \omega(F \times G)$ de Ω dans $\bar{\mathbb{N}}$ obtenues lorsque $F \times G$ décrit $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^2$.

« Le flot des arrivées marqué par les demandes de service » des clients pour chacune des deux classes de clients est représenté par le processus ponctuel simple marqué

$$\tilde{N}^i(\omega^0, \omega^1) = \omega^i = \sum_N \varepsilon_{(T_n^i(\omega^i), \sigma_n^i(\omega^i))} (i = 0, 1)$$

défini sur $\Omega \times \Omega$ et à valeurs dans Ω , où T_n^i est l'instant (aléatoire) de la $(n + 1)^e$ arrivée de client de la classe i et σ_n^i la durée du service demandé à cet instant, avec $i = 0 (i = 1)$ pour la classe ordinaire (prioritaire). Munissons l'espace $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ de la probabilité $P = P_{N_0} \otimes P_{N_1}$ telle que, par hypothèse, le processus $\tilde{N}^0$ (resp. $\tilde{N}^1$) soit un processus de renouvellement marqué admettant un saut à l'instant 0 (resp. un processus de Poisson marqué) et que ces deux processus soient indépendants; nous supposons ainsi que les variables aléatoires (v. a.) $(\sigma_n^i, n \in \mathbb{N})$ (resp. $(\theta_n^i = T_{n+1}^i - T_n^i, n \in \mathbb{N})$) sont toutes distribuées suivant la loi G_i d'espérance $\bar{\sigma}^i$ (resp. H_i d'espérance $\bar{\theta}^i$) pour $i = 0$ et 1, et qu'elles sont indépendantes entre elles; notons que la loi H_1 des v. a. T_0^1 et $\theta_n^1 (n \in \mathbb{N})$ est la loi exponentielle de paramètre ρ (soit $\exp(-\rho)$ en abrégé), que $T_0^0 = 0$ et que les lois H_0 et $G_i (i = 0, 1)$ sont des lois générales portées par $\mathbb{R}_+^*$. La transformée de Laplace d'une loi K sera notée $\tilde{K}$.

Définissons ensuite le flot des translations $(\tau_t, t \in \mathbb{R}_+)$ sur Ω par la formule $(\tau_t \omega)(F \times G) = \omega((F + t) \times G)$. Le translaté $(\tau_t \tilde{N}^i)$ du processus $\tilde{N}^i$ sera le processus dont les variables de comptage sont définies par

$$(\tau_t \tilde{N}^i)_s = \tilde{N}_{t+s}^i - \tilde{N}_t^i \quad \text{avec} \quad \tilde{N}_t^i(\cdot) = \tilde{N}^i([0, t] \times \cdot)$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $\cdot \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ ($i = 0, 1$).

Remarquons enfin que la famille de tribus $(\mathcal{F}_t = \sigma[\tilde{N}_s^i, s \leq t]; i = 0, 1; t \in \mathbb{R}_+)$ représentant l'histoire naturelle des processus $\tilde{N}^0$ et $\tilde{N}^1$ est une famille de tribus continue à droite, les deux processus étant à trajectoires continues à droite et sans accumulation de saut par hypothèse (cf. [6]). La tribu $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par le couple $(\tilde{N}^0, \tilde{N}^1)$.

Nous nous placerons dans toute la suite sur l'espace probabilisé $(\Omega \times \Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+), P)$.

1. MODÉLISATION

1-a) En faisant abstraction des clients ordinaires, les prioritaires constituent une file M/G/1. Alors, sous la condition $\rho_1 = \bar{\sigma}^1/\bar{\theta}^1 = \rho\bar{\sigma}^1 < 1$, le système présente une alternance de périodes de liberté et de service ininterrompu; ces périodes sont indépendantes entre elles, respectivement équidistribuées et les périodes de liberté sont de loi exp (ρ) (cf. [6]); la loi Γ_1 des périodes de service ininterrompu a pour transformée de Laplace l'unique solution $\tilde{\Gamma}_1(s)$ dans l'intervalle $[0, 1]$ de l'équation en α (cf. Prop. 1) :

$$\alpha = \tilde{\Gamma}_1(s + \rho(1 - \alpha))(s \in \mathbf{R}_+)$$

Nous noterons u_i et v_i les temps de début et de fin des périodes de service ininterrompu, $a_i = v_i - u_i$ la durée de la i^e période de service ininterrompu ($i \geq 1$). Dans toute la suite cette i^e période sera assimilée au i^e blocage intervenant dans le service des clients ordinaires, deux blocages étant séparés par un temps de loi exp (ρ).

1-b) Les temps Z_n^0 et S_n^0 de début et de fin de service des clients ordinaires, sachant que $T_0^0 = 0$ et $Z_0^0 \stackrel{p.s.}{=} 0$, sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \lambda'_{-1} &= 0 \\ Z_n^0 &= S_{n-1}^0 \vee T_n^0 \vee v_{\lambda'_{n-1}} \\ \lambda_n &= \lambda'_{n-1} \quad \text{si} \quad \sigma_n^0 < u_{\lambda'_{n-1}+1} - Z_n^0 \\ &= \text{Sup} \left\{ m > \lambda'_{n-1} : \sigma_n^0 - (u_{\lambda'_{n-1}+1} - Z_n^0) \geq \sum_{i=\lambda'_{n-1}+2}^m (u_i - v_{i-1}) \right\} \text{ sinon} \\ (1) \quad S_n^0 &= Z_n^0 + \sigma_n^0 + \sum_{k=\lambda'_{n-1}+1}^{\lambda_n} a_k \\ \lambda'_n &= \lambda_n \quad \text{si} \quad T_{n+1}^0 < S_n^0 \\ &= \text{Sup} \{ m \geq \lambda_n : u_m < T_{n+1}^0 \} \text{ sinon} \end{aligned}$$

Remarquons que λ'_{n-1} (resp. λ_n) est l'indice du dernier blocage survenu avant le début (resp. la fin) du service du client ordinaire « n » et que $\lambda_n - \lambda'_{n-1}$ est le nombre de blocages qu'il subit.

2. CHARGES DU SERVEUR

2-a) La charge « prioritaire » γ_t^1 est définie à l'instant t par :

$$\begin{aligned} \gamma_t^1 &= 0 & \text{si} & \quad 0 \leq t < T_0^1 \\ \gamma_t^1 &= [\bar{\gamma}_n^1 + \sigma_n^1 - (t - T_n^1)]^+ & \text{si} & \quad T_n^1 \leq t < T_{n+1}^1 \end{aligned}$$

où $\bar{\gamma}_0^1 = 0$ et $\bar{\gamma}_{n+1}^1 = [\bar{\gamma}_n^1 + \sigma_n^1 - \theta_n^1]^+$ pour $n \geq 0$.

La fonction aléatoire (f. a.) γ_t^1 est continue à droite-limitée à gauche (cad-lag), on convient de poser $\gamma_{0-}^1 = 0$ et l'accroissement de cette f. a. durant un temps dt vaut

$$(2) \quad d\gamma_t^1 = -1_{[\gamma_t^1 > 0]} dt + \sum_{n \geq 0} \sigma_n^1 \varepsilon_{T_n^1}(dt)$$

2-b) La charge « ordinaire » γ_t^0 est définie à l'instant t par :

$$\gamma_t^0 = \left[\bar{\gamma}_n^0 + \sigma_n^0 - \int_{T_n^0}^t 1_{[\gamma_s^0 = 0]} ds \right]^+ \quad \text{si} \quad T_n^0 \leq t < T_{n+1}^0$$

où

$$\bar{\gamma}_0^0 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_{n+1}^0 = \left[\bar{\gamma}_n^0 + \sigma_n^0 - \int_{T_n^0}^{T_{n+1}^0} 1_{[\gamma_s^0 = 0]} ds \right]^+ \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$

La f. a. γ_t^0 est cad-lag, $\gamma_{0-}^0 = 0$ et son accroissement durant un temps dt vaut :

$$(3) \quad d\gamma_t^0 = -1_{[\gamma_t^0 > 0]} 1_{[\gamma_t^1 = 0]} dt + \sum_{n \geq 0} \sigma_n^0 \varepsilon_{T_n^0}(dt)$$

Remarque. — La charge ordinaire $[\gamma_n^0]_t$ due aux n premiers clients ordinaires satisfait à l'équation :

$$(4) \quad d[\gamma_n^0]_t = -1_{[[\gamma_n^0]_t > 0]} 1_{[\gamma_t^1 = 0]} dt + \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i^0 \varepsilon_{T_i^0} dt$$

Le temps Z_n^0 de début de service s'écrit alors :

$$(5) \quad Z_n^0 = \inf \{ t \geq T_n^0 : [\gamma_n^0]_t + \gamma_t^1 = 0 \}$$

C'est un $\mathcal{F}$. — temps d'arrêt ($\mathcal{F}$. — t. a.), T_n^0 en étant un et la f. a. $[\gamma_n^0] + \gamma^1$ étant $\mathcal{F}$. — adaptée.

3. TEMPS VIRTUEL D'ATTENTE POUR LES CLIENTS ORDINAIRES

C'est le temps W_t nécessaire pour l'accomplissement de la charge ordinaire γ_t^0 compte tenu de la priorité si γ_t^0 est non nulle; sinon ce sera le temps nécessaire au vidage de la file prioritaire. Cette f. a. est donc définie par les relations :

$$(6) \quad \gamma_t^0 = \int_t^{t+W_t} 1_{[\gamma_s^1=0]} ds \quad \text{et} \quad \gamma_{t+W_t}^1 = 0$$

La loi des grands nombres appliquée à la succession des temps exp (ρ) de liberté de la M/G/1 prioritaire donne que $\int_0^\infty 1_{[\gamma_s^1=0]} ds = +\infty$ p. s.; on voit alors facilement que W_t existe, qu'il est unique et que la f. a. W est cad — lag puisque γ^0 et γ^1 le sont.

3.a) Différentiation de W

L'étude de la continuité à droite montre qu'en dehors des instants de saut des processus $\tilde{N}^i(\cdot \times \mathbf{R}_+)$, $i = 0, 1$, l'accroissement dW_t de la f. a. W_t vaut

$$dW_t = -1_{[W_t > 0]} dt$$

D'autre part pour $t = T_n^0$, nous avons :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} [\gamma_{T_n^0}^0 - \gamma_{T_n^0-h}^0] = \sigma_n^0 = \int_{T_n^0+W_{T_n^0-}}^{T_n^0+W_{T_n^0}} 1_{[\gamma_s^1=0]} ds$$

En remarquant que $Z_n^0 = T_n^0 + W_{T_n^0-}$, nous obtenons que le saut $\Delta W_{T_n^0}$ est défini par le système :

$$(7) \quad \sigma_n^0 = \int_0^{\Delta W_{T_n^0}} 1_{[\gamma_{Z_n^0+s}^1=0]} ds \quad \text{et} \quad \gamma_{Z_n^0+\Delta W_{T_n^0}}^1 = 0$$

D'autre part la f. a. W_t n'admet de saut à l'instant T_n^1 que si cet instant est tel que « $\gamma^1 = 0$ à gauche strictement » de T_n^1 et « $\gamma^0 = 0$ à gauche » de T_n^1 (en abrégé « $\gamma^1 = 0$ à g. strict. » de T_n^1 et « $\gamma^0 = 0$ à g. » de T_n^1), où « $U = 0$ à gauche » (resp. à gauche strictement) de T signifie :

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \alpha \in [0, \varepsilon] \text{ (resp. } \forall \alpha \in]0, \varepsilon]) U_{T-\alpha} = 0$$

Ce saut vaut alors :

$$(8) \quad \Delta W_{T_n^1} = \inf \{ t \geq 0 : \gamma_{T_n^1+t}^1 = 0 \}$$

Soient $v_k (k \in \mathbb{N})$ les entiers n successifs pour lesquels $\gamma^1 = 0$ à gauche strictement de T_n^1 ; on a $v_0 = 0$. Soient r_k les entiers n successifs pour lesquels $\gamma^0 = 0$ à gauche de $T_{v_n}^1$; en remarquant que $P[T_j^0 = T_n^1] = 0$ pour tout j et n (ces deux v. a. sont indépendantes et, pour tout n , T_n^1 suit une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue), nous obtenons que les v. a. r_k sont aussi p. s. les entiers n successifs pour lesquels $\gamma^0 = 0$ à gauche strictement de $T_{v_n}^1$.

Nous obtenons ainsi l'équation :

$$(9) \quad dW_t = -1_{[W_t > 0]} dt + \sum_{n \geq 0} \Delta W_{T_n^0} \varepsilon_{T_n^0}(dt) + \sum_{n \geq 0} \Delta W_{T_{r_n}^1} \varepsilon_{T_{r_n}^1}(dt)$$

en convenant que $W_{0-} = 0$.

3.b) Étude des deux espèces de sauts

Pour tout k , nous voyons que v_{r_k} est un $\mathcal{F}_{T^1} -$ t. a., que $\Delta W_{T_{v_{r_k}}^1}^1 = a_{r_k+1}$ (cf. (1.a)) et que, en tenant compte de la remarque qui suit sa définition, r_k est égal p. s. à un $\mathcal{H}_{v_k} -$ t. a. si $\mathcal{H}_n = \sigma[T_0^1; (\theta_i^1, \sigma_i^1; i < n); \tilde{N}^0]$ en outre a_{k+1} est $\mathcal{H}_{v_{k+1}} -$ mesurable et indépendante de H_{v_k} . Un lemme facile montre alors que $(a_{r_k+1}; k \in \mathbb{N})$ est de nouveau une suite de v. a. indépendantes suivant toutes la loi Γ_1 des v. a. a_n .

Par ailleurs, $\Delta W_{T_n^0}$ est le temps nécessaire pour que le client ordinaire « n » soit entièrement servi; nous l'appellerons *temps d'achèvement de service du client ordinaire* « n ».

PROPOSITION 1. — Les v. a. $\Delta W_{T_n^0} (n \in \mathbb{N})$ sont indépendantes et de même loi dont la transformée de Laplace vaut :

$$(10) \quad \tilde{W}_0(u) = \tilde{G}_0(u + \rho(1 - \tilde{\Gamma}_1(u))) \quad (u \in \mathbf{R}_+)$$

la transformée de Laplace $\tilde{\Gamma}_1(u)$ étant l'unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$ de l'équation en s :

$$(11) \quad s = \tilde{G}_1(u + \rho(1 - s)) \quad (u \in \mathbf{R}_+)$$

Démonstration. — Considérons la famille de tribus $(\mathcal{G}_t, t \in \mathbf{R}_+)$ définie par :

$$\mathcal{G}_t = \sigma[(\tilde{N}_s^0(\mathbf{R}_+), s \leq t); (\tilde{N}_s^1, s \leq t); (M_s, s \leq t)]$$

où $M = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_{(Z_n^0, \sigma_{n-1}^0)}$, qui admet les Z_n^0 pour t. a. Le saut $\Delta W_{T_n^0}$ est indé-

pendant de $\mathcal{G}_{Z_n^0}$ puisqu'il ne dépend que de σ_n^0 et de $\gamma_{Z_n^0+}^1$, qui sont bien indépendants de $\mathcal{G}_{Z_n^0}$ (remarquer que $\gamma_{Z_n^0}^1 = 0$); d'autre part $\Delta W_{T_n^0}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{G}_{Z_{n+1}^0}$ puisque $Z_n^0 + \Delta W_{T_n^0} \leq Z_{n+1}^0$. Il s'ensuit que la suite $(\Delta W_{T_n^0}, n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables indépendantes; on voit ainsi également que ces sauts sont de même loi W_0 . Par ailleurs, nous avons :

$$\Delta W_{T_n^0} = S_n^0 - Z_n^0 = \sigma_n^0 + \sum_{k=1}^{\lambda_n - \lambda'_{n-1}} a_{\lambda'_{n-1} + k} \quad (\text{cf. 1.b})$$

Soit U_t le temps qu'il faut attendre pour que le serveur ait disposé d'un temps t pour le service des clients ordinaires. Nous avons :

$$U_t = t + \sum_{i=1}^{\eta_t} a_i$$

où η_t est le nombre de blocages intervenus durant le temps U_t et a_i la durée du i^{e} blocage. Le nombre η_t compte les points d'un processus de Poisson de paramètre ρ tombant dans l'intervalle $[0, t]$ et est indépendant de la suite $(a_i, i \in \mathbb{N})$. Alors :

$$\begin{aligned} E[\exp(-uU_t)] &= E\left[\exp\left(-u\left(t + \sum_{i=1}^{\eta_t} a_i\right)\right)\right] \\ &= e^{-ut} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{(\rho t)^n}{n!} [\tilde{\Gamma}_1(u)]^n \\ &= \exp[-t(u + \rho(1 - \tilde{\Gamma}_1(u)))] \quad (u \in \mathbf{R}_+) \end{aligned}$$

Étant donné que $\Delta W_{T_0^0} = U_{\sigma_0^0}$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0(u) &= E[\exp(-uU_{\sigma_0^0})] = E[\exp[-\sigma_0^0(u + \rho(1 - \tilde{\Gamma}_1(u)))] \\ &= \tilde{G}_0(u + \rho(1 - \tilde{\Gamma}_1(u))) \quad (u \in \mathbf{R}_+) \end{aligned}$$

Enfin, en remarquant qu'une période de service ininterrompu dans la file M/G/1 prioritaire a pour durée le temps d'achèvement de service du client qui l'initialise si ce client perd sa priorité au profit des clients prioritaires qui le suivent et est servi suivant la même discipline que les clients ordinaires, nous avons :

$$\tilde{\Gamma}_1(u) = E[\exp(-uU_{\sigma_0^0})] = \tilde{G}_1(u + \rho(1 - \tilde{\Gamma}_1(u)))$$

et l'unicité de la solution dans $[0, 1]$ de cette équation en $\tilde{\Gamma}_1(u)$ est due à la

condition $\rho\sigma^1 < 1$ imposée dans 1.a). Remarquons que la formule (10) et l'équation précédente permettent de déterminer les moments de tous ordres des v. a. $\Delta W_{T_n^0}$ et a_n lorsque ceux-ci existent.

3.c) Décomposition

Introduisons la décomposition

$$(12) \quad W_t = W_t^0 + W_t^1$$

où W_t^0 est défini par

$$(13) \quad W_t^0 = [\bar{W}_n^0 + \Delta W_{T_n^0} - (t - T_n^0)]^+ \quad \text{si} \quad T_n^0 \leq t < T_{n+1}^0$$

où

$$\bar{W}_0^0 = \Delta W_{T_0^0} \quad \text{et} \quad \bar{W}_{n+1}^0 = [\bar{W}_n^0 + \Delta W_{T_n^0} - \theta_n^0]^+ \quad \text{pour} \quad n \geq 0$$

Cette définition peut encore s'écrire sur $\mathbf{R}_+$

$$(14) \quad dW_t^0 = -1_{[W_t^0 > 0]} dt + \sum_{n \geq 0} \Delta W_{T_n^0} \varepsilon_{T_n^0}(dt)$$

en convenant que $W_{0-}^0 = 0$. Les formules (9) et (13) donnent alors que $W_{0-}^1 = 0$ et que

$$(15) \quad dW_t^1 = -1_{[W_t^1 > 0]} 1_{[W_t^0 = 0]} dt + \sum_{n \geq 0} a_{r_{n+1}} \varepsilon_{T_{v_{r_n}}^1}(dt)$$

D'après les relations (12) de définition de W^0 et d'après la proposition 1, cette f. a. est le temps virtuel d'attente d'une file GI/GI/1 associée aux lois respectives des interarrivées et des temps d'achèvement du service des clients ordinaires.

Pour étudier la f. a. W^1 , considérons d'abord la f. a. $I(t) = \int_0^t 1_{[W_s^0 = 0]} ds$ égale au temps de liberté cumulé du serveur à l'instant t dans la GI/GI/1 définie ci-dessus et le changement de temps continu à droite défini par :

$$(16) \quad t \rightarrow I^{-1}(t) = \inf \{ u \geq 0 : I(u) > t \}$$

Posons ensuite

$$(17) \quad \hat{W}^1 = W^1 \circ I^{-1}$$

Le processus $\hat{W}^1$ ainsi défini est identique au processus W^1 considéré en dehors des périodes où $W^0 > 0$, c'est-à-dire qu'il décroît (avec une pente -1) tant qu'il est positif et admet les mêmes amplitudes de saut que le pro-

cessus W^1 . Afin de le décrire complètement, nous allons constater les égalités à un négligeable près des trois événements (qui admettent chacun deux écritures du fait que

$\{\gamma^0 + \gamma^1 = 0\} = \{W_- = 0\} = \{W_-^0 + W_-^1 = 0\}$ et que γ^0 et W^0 admettent les mêmes instants de saut) suivants :

$$\begin{aligned} A_n &= \{\gamma^1 = 0 \text{ à g. strict. de } T_n^1\} \cap \{\gamma^0 = 0 \text{ à g. de } T_n^1\} \\ &= \{W^1 = 0 \text{ à g. strict. de } T_n^1\} \cap \{W^0 = 0 \text{ à g. de } T_n^1\} \\ B_n &= \{\gamma_{T_n^1-}^1 = 0\} \cap \{\gamma_{T_n^1-}^0 = 0\} = \{W_{T_n^1-}^1 = 0\} \cap \{W_{T_n^1-}^0 = 0\} \\ C_n &= \{\gamma_{T_n^1-}^1 = 0\} \cap \{\gamma_{T_n^1-}^0 = 0\} = \{W_{T_n^1-}^1 = 0\} \cap \{W_{T_n^1-}^0 = 0\} \end{aligned}$$

qui sont dues à ce que T_n^1 est un t. a. totalement inaccessible et ne coïncide donc avec un instant où l'une des f. a. γ^0 ou γ^1 s'annule qu'avec une probabilité nulle, ces instants étant des t. a. prévisibles. Il s'ensuit que les instants de saut de $\widehat{W}^1$ sont p. s. ceux $\widehat{T}_n^1$ du processus $\widehat{N}^1$ qui sont tels que $\widehat{W}_{\widehat{T}_n^1-}^1 = 0$, avec

$$(18) \quad \widehat{N}_t^1 = \int_0^{I^{-1}(t)} 1_{[W_s^0=0]} dN_s^1 \quad \text{où} \quad N_s^1 = \widetilde{N}_s^1(\mathbf{R}_+)$$

Puisque $\widehat{W}^1$ ne saute que lorsqu'il est nul, le second changement de temps continu à droite défini à partir de la f. a. $J(t) = \int_0^t 1_{[\widehat{W}_s^1=0]} ds$ par la formule :

$$(19) \quad J^{-1}(t) = \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{[\widehat{W}_s^1=0]} ds > t \right\}$$

permet d'obtenir que les durées successives durant lesquelles $\widehat{W}^1 = 0$ sont p. s. les temps successifs qui séparent deux instants de saut du processus $\widehat{N}^1$ défini par :

$$(20) \quad \widehat{N}_t^1 = \int_0^{J^{-1}(t)} 1_{[\widehat{W}_{s-}^1=0]} d\widehat{N}_s^1$$

Nous avons alors (d'après $B_n \stackrel{\text{p.s.}}{=} C_n$) :

$$\begin{aligned} \widehat{N}_t^1 &\stackrel{\text{p.s.}}{=} \int_0^{(J \circ I)^{-1}(t)} 1_{[(W^0 + W^1)_{s-} = 0]} dN_s^1 \\ &\stackrel{\text{p.s.}}{=} \int_0^{(J \circ I)^{-1}(t)} 1_{[(\gamma^0 + \gamma^1)_{s-} = 0]} dN_s^1 \end{aligned}$$

Remarquons que $(J \circ I)^{-1}(t) = \inf \{ u \geq 0 : \int_0^u 1_{[(\gamma^0 + \gamma^1)_s = 0]} ds > t \}$ et que pour tout $t \geq 0$ $(J \circ I)^{-1}(t)$ est un $\mathcal{F}_-$ -t. a.

PROPOSITION 2. — *Le processus $\widehat{N}^1$ est un processus de Poisson de paramètre ρ par rapport à la famille de tribus $(\widehat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{(J \circ I)^{-1}(t)}; t \in \mathbf{R}_+)$.*

Démonstration. — Pour montrer cela, nous allons établir que la mesure prévisible associée au processus $\widehat{N}^1$ vaut ρdt (cf. [1]). En effet, si $s < t$ et $A \in \widehat{\mathcal{F}}_s$ et si $\phi(u) = 1_{[(\gamma^0 + \gamma^1)_u - = 0]}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty 1_A 1_{[s, t]}(u) d\widehat{N}_u^1 \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty 1_A 1_{(J \circ I)^{-1}(s), (J \circ I)^{-1}(t)}(u) \phi(u) dN_u^1 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty 1_A 1_{(J \circ I)^{-1}(s), (J \circ I)^{-1}(t)}(u) \phi(u) \rho du \right] \\ &= \mathbb{E}[1_A \rho(t - s)] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty 1_A 1_{[s, t]}(u) \rho du \right] \end{aligned}$$

La deuxième égalité découle de ce que N^1 est un processus de Poisson de mesure prévisible associée ρdu . Le fait que les indicatrices de la forme $1_A 1_{[s, t]}$ où $A \in \widehat{\mathcal{F}}_s$ engendrent la tribu des prévisibles termine la démonstration. Ainsi, nous voyons que les temps qui séparent chaque instant où $\widehat{W}^1$ s'annule de l'instant de saut de $\widehat{W}^1$ qui lui succède sont indépendants et de même loi $\exp(\rho)$. Ces temps sont indépendants des sauts de $\widehat{W}^1$ et du couple (W^0, I) en vertu des propriétés du processus de Poisson.

Nous avons donc établi le

THÉORÈME 3. — *On a $W \stackrel{p.s.}{=} W^0 + \widehat{W}^1 \circ I$ où W^0 et I sont respectivement le temps virtuel d'attente et le temps de liberté cumulé dans la file GI/GI/1 associée aux lois respectives des interarrivées et des temps d'achèvement de service des clients ordinaires et où $\widehat{W}^1$ est un processus nul en 0, qui décroît avec une pente 1 lorsqu'il est positif, qui ne saute qu'un temps de loi $\exp(\rho)$ après s'être annulé et dont les sauts sont indépendants et tous distribués suivant la loi Γ_1 . De plus, le processus $\widehat{W}^1$ est indépendant du couple (W^0, I) . J. A. Hooke établit dans [3] l'égalité du théorème 3 en loi et donne les lois asymptotiques de $\widehat{W}^1$ et de W .*

4. COMPORTEMENT ERGODIQUE DE LA FILE D'ATTENTE

4-a) Nous allons commencer par les deux propriétés suivantes que nous énonçons sous forme de lemmes et par une conséquence de ces lemmes :

LEMME 4. — Soit θ un $\mathcal{F}$. — t. a. p. s. fini; comme $\tilde{N}^1$ est un processus de Poisson marqué indépendant de $\tilde{N}^0$, le processus $(\tau_\theta \tilde{N}^1)$ suit la même loi que $\tilde{N}^1$ et est indépendant de la tribu engendrée par $\mathcal{F}_\theta$ et par le processus $\tau_\theta \tilde{N}^0$.

LEMME 5. — Soit θ un $\mathcal{F}$. — t. a. p. s. fini; la loi de $\tau_\theta N^0$ conditionnelle en $\mathcal{F}_\theta$ ne dépend que de $U(\theta)$ et lorsque $U(\theta) = u$, cette loi est celle de $\tau_u N^0$ conditionnée par $\{N_u^0 = 0\}$ où $U(t) = t - T_{N_t^0}(t \in \mathbf{R}_+)$.

Pour le vérifier, il suffit de montrer que $E^u[\phi(\tilde{N}^0)] = E[\phi(\tau_u \tilde{N}^0) | N_u^0 = 0]$ où

$$\phi(\tilde{N}^0) = \phi(\tilde{N}_{s_i}^0(C_i); i = 1, \dots, n), \phi \in C_k(\mathbf{R}_+^n)$$

Une conséquence immédiate de ces deux lemmes est que $\tau_{T_n^0}$ préserve la mesure P pour tout n et que les tribus $\tau_{T_n^0}^{-1}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F}_{T_n^0}$ sont indépendantes. En effet, d'après le lemme 3, les deux processus $\tau_{T_n^0} \tilde{N}^0$ et $\tau_{T_n^0} \tilde{N}^1$ sont indépendants et le second suit la même loi que $\tilde{N}^1$; par ailleurs, puisque $U(T_n^0) = 0$, le lemme 4 indique que la loi de $\tau_{T_n^0} \tilde{N}^0$ conditionnelle en $\mathcal{F}_{T_n^0}$ est celle de $\tilde{N}^0$, d'où la première assertion. L'indépendance des tribus provient du fait que le couple $(\tau_{T_n^0} \tilde{N}^0, \tau_{T_n^0} \tilde{N}^1)$ engendre la tribu $\tau_{T_n^0}^{-1}(\mathcal{F})$ et est d'après ce qui précède indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{T_n^0}$.

4-b) Soient $p_0 = 0 < p_1 < \dots$ les indices n des clients ordinaires successifs qui trouvent la file vide de clients ordinaires en arrivant c'est-à-dire pour lesquels $[\gamma_n^0]_{T_n^0} = 0$. Ces indices sont des $\mathcal{F}_{Z^0}$ — t. a. et les temps $Z_{p_n}^0$ de début de service de ces clients sont des $\mathcal{F}$ — t. a.; la condition $\rho_1 + \rho_1 = \bar{\sigma}^0/\bar{\theta}^0 + \bar{\sigma}^1/\bar{\theta}^1 \leq 1$ est nécessaire et suffisante pour que les v. a. Z_n^0, p_n et $Z_{p_n}^0$ soient p. s. finies pour tout n .

Soit maintenant $(X_n, n \geq 0)$ la chaîne d'espace d'états $\mathbf{N}^* \times \mathbf{R}_+^2$ définie par

$$(21) \quad X_n = (\xi_n, U_n, \Sigma_n)$$

où $\xi_n = N_{Z_{p_n}^0}^0 - N_{T_{p_n}^0}^0 + 1$ est le nombre de clients ordinaires présents à l'instant $Z_{p_n}^0$, $U_n = Z_{p_n}^0 - T_{N_{Z_{p_n}^0}^0}^0$ est le temps séparant l'arrivée du dernier de ces clients de l'instant $Z_{p_n}^0$ et $\Sigma_n = \sigma_{p_n}^0 + \dots + \sigma_{p_n + \xi_n - 1}^0$ la charge en services ordinaires à l'instant $Z_{p_n}^0$.

PROPOSITION 6. — La suite $(X_n, n \in \mathbf{N})$ est une chaîne de Markov homogène par rapport à la suite des tribus $(\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{Z_{p_n}^0}, n \in \mathbf{N})$.

Démonstration. — La suite $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est adaptée à la suite des tribus $(\mathcal{F}_n; n \in \mathbb{N})$; de plus, il existe une fonction ϕ indépendante de n telle que

$$(22) \quad X_{n+1} \stackrel{\text{p.s.}}{=} \phi[\tilde{X}_n; (\tau_{Z_{p_n}^0} \tilde{N}^i)(i = 0, 1)] \quad (\text{cf. [6]})$$

étant donné que la v. a. $U(Z_{p_n}^0) = U_n$ est contenue dans X_n , les lemmes 3 et 4 suffisent alors pour établir ce résultat.

4-c) Le premier instant après l'instant 0 auquel un client ordinaire arrive en trouvant le système entièrement vide s'écrit $T_{p_q}^0$ avec q défini par :

$$(23) \quad q = \inf \{ n > 0 : X_n \in \{1\} \times \{0\} \times \mathbf{R}_+ \}$$

PROPOSITION 7. — *L'instant $T_{p_q}^0$ est un instant de renouvellement du système; c'est-à-dire que $\tau_{T_{p_q}^0}$ préserve la mesure $P = P_{\tilde{N}^0} \otimes P_{\tilde{N}^1}$, les tribus $\tau_{T_{p_q}^0}^{-1}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F}_{T_{p_q}^0}$ sont indépendantes et de plus, nous avons les relations :*

$$(24) \quad \gamma_{T_{p_q}^0+}^i \stackrel{\text{p.s.}}{=} \gamma^i \circ \tau_{T_{p_q}^0} \quad \text{pour} \quad i = 0, 1$$

Démonstration. — Puisque $T_{p_q}^0 = Z_{p_q}^0$ par définition de q et que q est un $\mathcal{F}_{Z_{p_q}^0}$ - t. a., $T_{p_q}^0$ est un $\mathcal{F}$ - t. a. pour lequel $U(T_{p_q}^0) = 0$ et la première partie de la proposition s'obtient à partir du 4. a). Par ailleurs, nous avons $\gamma_{T_{p_q}^0+}^1 \stackrel{\text{p.s.}}{=} 0$; $\gamma_{T_{p_q}^0+}^1$ ne dépend alors que du processus $\tau_{T_{p_q}^0} \tilde{N}^1$ qui suit la loi de $\tilde{N}^1$ et nous obtenons que $\gamma_{T_{p_q}^0+}^1 \stackrel{\text{p.s.}}{=} \gamma^1 \circ \tau_{T_{p_q}^0}$ suit la même loi que γ^1 et est indépendant de $T_{p_q}^0$. Enfin, $\gamma_{T_{p_q}^0+}^0 = \sigma_{p_q}^0$ et la f. a. $\gamma_{T_{p_q}^0+}^0$ ne dépend donc que de $\sigma_{p_q}^0$ et de $(\tau_{T_{p_q}^0} \tilde{N}^i; i = 0, 1)$. Or la v. a. $\sigma_{p_q}^0$ est indépendante du couple $(p_q, T_{p_q}^0)$ et suit la loi G_0 des services ordinaires car p_q est un t. a. pour la suite de tribus $\mathcal{J}_0 = \{\phi, \Omega\}$ et $\mathcal{J}_n = \sigma[(\theta_i^0, \sigma_i^0)_{i < n}; \tilde{N}^1]$ pour $n > 0$.

Il est alors facile de voir que $\sigma_{p_q}^0 \stackrel{\text{p.s.}}{=} \sigma^0 \circ \tau_{T_{p_q}^0}$ et que par conséquent $\gamma_{T_{p_q}^0+}^0 \stackrel{\text{p.s.}}{=} \gamma^0 \circ \tau_{T_{p_q}^0}$ suit la même loi que γ^0 et est indépendant de $T_{p_q}^0$. Le système se retrouve donc à l'instant $T_{p_q}^0$ avec exactement les mêmes données qu'à l'instant initial indépendamment du passé.

4. d) Nous ferons dorénavant l'hypothèse $H_0([t, t + u_0]) \geq c H_0([t, +\infty])$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et pour deux réels $u_0 > 0$ et $c > 0$ bien choisis; la probabilité de transition $P(x, A)$ de la chaîne $(X_n, n \in \mathbb{N})$ d'un état x dans la partie $A = \{1\} \times \{0\} \times \mathbf{R}_+$ en un saut est alors minorée uniformément en x par une constante strictement positive. L'absence d'une partie cimetièrè (sous la condition $\rho_0 + \rho_1 \leq 1$, les v. a. p_n et $Z_{p_n}^0$ sont p. s. finies pour tout n) permet alors d'affirmer que le premier temps de retour q de la chaîne

en A est p. s. fini. La proposition 7 permet de définir par récurrence la suite $q_n < \infty (q_1 = q)$ des temps de retour de la chaîne en A qui est donc une partie récurrente pour la chaîne et l'instant $T_{p_{q_n}}^0$ sera pour tout n un instant de renouvellement p. s. fini, p_{q_n} étant p. s. fini pour tout n .

4.e) Sous la condition $\rho_0 + \rho_1 < 1$ et la condition du paragraphe précédent, il n'est pas difficile de démontrer que q admet des moments de tout ordre et que $\lim_{k \rightarrow \infty} p. s. (q_k/k) = E(q_1)$.

Si de plus les lois H_0 et $G_i (i = 0, 1)$ admettent des moments d'ordre deux, nous avons pu démontrer (cf. [6]) que $E[p_{q_1}] < \infty$ et alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p. s. (p_{q_k}/k) = E[p_{q_1}]$$

Ensuite, comme $E(T_{p_{q_1}}^0) = E[p_{q_1}] \bar{\theta}^0 < \infty$, nous voyons aussi que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p. s. (T_{p_{q_k}}^0/k) = E[p_{q_1}] \bar{\theta}^0$$

Remarquons aussi que d'après ce qui précède,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p. s. (p_k/k) = E(p_{q_1})/E(q_1)$$

et donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p. s. (T_{p_k}^0/k) = E(p_{q_1}) \bar{\theta}^0 / E(q_1)$$

RÉFÉRENCES

- [1] P. BREMAUD et J. JACOD, Processus Ponctuels et Martingales. *Adv. Appl. Prob.*, t. 9, 1977, p. 362-416.
- [2] J. W. COHEN, *The Single Server Queue*, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [3] J. A. HOOKE, A priority Queue With Low Priority Arrivals General. *Op. Res.*, t. 20, 1972, p. 373-380.
- [4] N. K. JAISWAL, *Priority Queues*, Academic Press, New York, 1968.
- [5] J. NEVEU, Processus Ponctuels. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour VI, 1976 *Lect. Notes in Math.*, t. 598, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [6] M. R. JAIBI, *Étude d'une file d'attente avec priorité*. Thèse de 3^e Cycle, 13 novembre 1978. Université P.-et-M.-Curie.

(Manuscrit reçu le 18 avril 1980)