ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. BRU
H. HEINICH

Sur l'espérance des variables aléatoires vectorielles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, nº 3 (1980), p. 177-196
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_3_177_0>

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 3, 1980, p. 177-196.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Mme Y. CHOQUET-BRUHAT

Sur l'espérance des variables aléatoires vectorielles

par

B. BRU et H. HEINICH (*)

(*) Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités, Tour 56,
4, place Jussieu, 75005 Paris

RÉSUMÉ. — On examine quelques propriétés des v. a. intégrables au sens de Pettis à valeurs dans des espaces de Banach, on étudie ensuite les modes de convergence des suites de v. a. générales ou adaptées, on donne diverses applications : lois des grands nombres, théorie des amarts.

SUMMARY. — Some properties of Pettis-integrable variables with values in Banach spaces are examined. Different types of convergence are studied for general or adapted r. v. We give some applications: laws of large numbers, theory of amarts.

INTRODUCTION

Nous développons ici certains résultats annoncés dans les notes [7], il s'agit d'étudier les notions d'espérance et de convergence en moyenne et en probabilité des variables aléatoires à valeurs dans les espaces de Banach, notions introduites il y a près de cinquante ans mais dont les études récentes sur les martingales asymptotiques et les mesures vectorielles ont relancé l'intérêt.

Certains des résultats que nous présentons ont sans doute été bien connus jadis, peut-être le sont-ils encore, ils ne semblent cependant pas tous figurer sous cette forme dans la littérature probabiliste classique et nous avons

© Gauthier-Villars.

essayé de les rassembler dans un exposé qui se suffise, autant que possible, à lui-même.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ intervient d'au moins deux façons différentes et complémentaires :

1) comme moyenne sur les événements de $\mathscr{F}$; elle définit une mesure réelle sur $(\Omega, \mathscr{F})$: $A \to E(X1_A)$;

2) comme limite dans L^1 et presque sûre des moyennes arithmétiques successives $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ d'une suite de réalisations $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de la v. a. X.

Nous étudions ces deux aspects de l'espérance dans le cas des espaces de Banach généraux, nous donnons ensuite des critères d'équivalence des espérances et des convergences introduites, enfin nous appliquons ces résultats à l'étude de certaines suites adaptées.

Récemment, en effet, sont parus des résultats surprenants, en théorie des amarts vectoriels : des contre-exemples extrêmement ingénieux [*2*] [*13*] ont montré que, dès que l'espace sous-jacent est de dimension infinie, on peut trouver des amarts uniformément bornés qui ne convergent pas p. s., alors qu'on sait bien que, dans tous les bons espaces, les martingales uniformément bornées convergent p. s. [*9*].

En dimension infinie, les martingales asymptotiques ne se comportent pas à l'infini comme leurs asymptotes.

Pour essayer de comprendre ce comportement anormal nous avons cherché à donner des démonstrations directes, n'utilisant pas de contre-exemples, suivant en cela l'adage bien connu : « qu'ils soient pour ou contre les exemples sont comme les arbres ils cachent souvent la forêt », à quoi on peut du reste objecter qu'une forêt a davantage de chances de cacher un arbre que l'inverse. Nous espérons avoir suffisamment débroussaillé notre forêt pour que le lecteur éventuel y trouve son chemin et son agrément.

1. INTÉGRATION DES VARIABLES ALÉATOIRES VECTORIELLES, MESURES VECTORIELLES

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach. Nous noterons toujours $\|.\|$ sa norme, $\mathbb{E}'$ son dual et $\mathbb{E}''$ son bidual, nous noterons également $\|.\|$ les normes canoniques de ces deux espaces, ce qui ne présente pas d'inconvénients majeurs.

a) Mesures, définitions, propriétés élémentaires

— Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable, on appelle mesure vectorielle à valeurs dans $\mathbb{E}$, toute application additive μ de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{E}$, vérifiant $\| \mu(A_n) \| \to 0$ dès que $A_n \downarrow \emptyset$ dans $\mathscr{F}$. On sait qu'alors μ est σ-additive et qu'elle vérifie en outre la propriété suivante :

LEMME 1 [*14*]. — Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{F}$ et $\overline{\lim}\, A_n = \emptyset$, alors $\bigvee_{\substack{B \subset A_n \\ B \in \mathscr{F}}} \| \mu(B) \| \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0$.

Démonstration. — On montre que la tribu engendrée par les A_n est isomorphe à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, le résultat s'en suit.

On notera $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{E})$ ou plus simplement $\mathscr{M}(\mathbb{E})$ l'ensemble des mesures à valeurs dans $\mathbb{E}$. On le munit de la norme S :

$$S(\mu) = \bigvee \{ | u \circ \mu | (\Omega) : u \in \mathbb{E}', \| u \| \leq 1 \} = \bigvee \left\{ \left\| \int g d\mu \right\| : g : \Omega \to R \right.$$

mesurable, $| g | \leq 1 \} = \bigvee \{ \| \Sigma a_n \mu(A_n) \| \ : \ | a_n | \leq 1, \ (A_n)$ partition dénombrable mesurable de $\Omega \}$.

Pour cette norme $\mathscr{M}(\mathbb{E})$ est un espace de Banach, cela résulte du théorème de Vitali-Hahn-Saks, mais on remarque que, si $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathscr{M}(\mathbb{E}) = l^1(\mathbb{E})$ = ensemble des suites sommables d'éléments de $\mathbb{E}$ et la norme S est la norme ε [*19*] :

$$S(\mu) = \| \mu \|_\varepsilon = \bigvee_{\substack{\| u \| \leq 1 \\ u \in \mathbb{E}}} \sum_n | u(\mu(n)) |$$

que $l^1(\mathbb{E})$ soit complet pour $\| . \|_\varepsilon$ figure déjà dans [*5*].

On introduit également la norme équivalente P : $P(\mu) = \bigvee_{A \in \mathscr{F}} \| \mu(A) \|$, il est classique et on vérifie aisément que $P(\mu) \leq S(\mu) \leq 2P(\mu)$.

On adopte en outre la notation habituelle $\mu |_{\mathscr{G}}$ pour désigner la mesure μ restreinte à une sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$.

— On appelle mesure à variations bornées, toute mesure telle que $\bigvee \sum_n \| \mu(A_n) \| < \infty$, la borne supérieure étant prise sur toutes les partitions mesurables dénombrables (A_n) de $\mathscr{F}$.

On notera $\mathscr{M}_b(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{E})$ ou $\mathscr{M}_b(\mathbb{E})$ l'ensemble des mesures à variations bornées à valeurs dans $\mathbb{E}$. On le munit de la norme B :

$$B(\mu) = \bigvee \sum_n \| \mu(A_n) \|.$$

$\mathscr{M}_b(\mathbb{E})$ est un espace de Banach pour B. On remarque que si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ alors $\mathscr{M}_b(\mathbb{E}) = l^1[\mathbb{E}]$ = ensemble des suites absolument sommables d'éléments de $\mathbb{E}$ et la norme B est la norme π [*19*] :

$$B(\mu) = \| \mu \|_\pi = \sum_n \| \mu(n) \|,$$

le résultat est alors classique.

Rappelons le critère suivant :

LEMME 2 [*14*]. — Une mesure μ est à variations bornées si et seulement si pour toute partition mesurable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω on a : $\sum_n \| \mu(A_n) \| < \infty$.

b) Variables aléatoires

Nous appellerons variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{E}$, toute application X de Ω dans $\mathbb{E}$, limite simple de fonctions mesurables prenant un nombre fini de valeurs, X et $\| X \|$ sont alors évidemment mesurables, ce qui évite tous les désagréments habituels.

On se donne une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$, pour ne pas la confondre avec la norme P, nous la noterons toujours Pr et si X est une v. a. réelle intégrable nous noterons E(X) son espérance.

— On dit qu'une v. a. X à valeurs dans $\mathbb{E}$ est scalairement intégrable si, pour tout $u \in \mathbb{E}'$, $u(X)$ est une v. a. réelle intégrable. Nous noterons $\$(\Omega, \mathscr{F}, \Pr, \mathbb{E})$ ou plus simplement $\$(\mathbb{E})$ l'ensemble des v. a. scalairement intégrables, on le munit de la norme S :

$$S(X) = \bigvee_{\substack{\| u \| \leq 1 \\ u \in \mathbb{E}'}} E(| u(X) |).$$

— On dit que X est intégrable au sens de Pettis si pour tout $A \in \mathscr{F}$ il existe un élément de $\mathbb{E}$, noté $E(X1_A)$, vérifiant pour tout $u \in \mathbb{E}'$,

$$u(E(X1_A)) = E(u(X1_A)).$$

Nous noterons $\mathbb{P}(\Omega, \mathscr{F}, \Pr, R)$ ou simplement $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ l'ensemble des v. a. intégrables au sens de Pettis.

$\mathbb{P}(\mathbb{E})$ se plonge canoniquement dans $\mathscr{M}(\mathbb{E})$, en effet on sait que l'application μ_X de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{E}$ définie par $\mu_X(A) = E(X1_A)$ est une mesure [*18*],

on dit que X est la densité de μ_X et on note $\mu_X = X \circ \Pr$, on a alors $S(X) = S(X \circ \Pr)$, on pose de même

$$P(X) = P(X \circ \Pr) = \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \| E(X1_A) \|,$$

P définit sur $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ une norme équivalente à S, on appellera indifféremment norme de Pettis les normes S et P sur $\mathbb{P}(\mathbb{E})$. En fait la norme P semble avoir été introduite pour la première fois dans [*5*] et la norme S dans [*18*].

On peut remarquer que si X est adaptée (mesurable par rapport) à une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ on a

$$P(X) = \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \| E(X1_A) \| \leq S(X) \leq 2 \bigvee_{A \in \mathcal{G}} \| E(X1_A) \|.$$

En effet si $A \in \mathcal{F}$, en notant $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X, on a :

$$\begin{aligned} \| E(X1_A) \| &= \bigvee_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ u \in \mathbb{E}'}} | E(u(X)1_A) | = \bigvee_{\|u\| \leq 1} | E(u(X)E(1_A/u(X))) | \\ &\leq \bigvee_{\|u\| \leq 1} E(| u(X) |) = S(X) \leq 2 \bigvee_{\|u\| \leq 1} \bigvee_{A \in \sigma(X)} | E(u(X)1_A) | \\ &= 2 \bigvee_{A \in \sigma(X)} \| E(u(X)1_A) \| \leq 2 \bigvee_{A \in \mathcal{G}} \| E(X1_A) \| \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{P}(\mathbb{E})$, la norme S apparaît donc comme plus intrinsèque que la norme P mais cette dernière est souvent plus simple à manier, comme nous le verrons.

— On dit que X est intégrable au sens de Bochner, si $\| X \|$ est une v. a. réelle intégrable, nous noterons $\mathbb{B}(\Omega, \mathcal{F}, \Pr, \mathbb{E})$ ou plus simplement $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ l'ensemble des v. a. intégrables au sens de Bochner; on le munit de la norme B : $B(X) = E(\| X \|)$. $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ est un espace de Banach pour cette norme.

$\mathbb{B}(\mathbb{E})$ se plonge canoniquement dans $\mathcal{M}_b(\mathbb{E})$, en effet $\mu_X(A) = E(X1_A)$ définit une mesure à variations bornées et on a

$$B(X) = B(\mu_X).$$

On vérifie que $\mathbb{B}(\mathbb{E}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{E}) \subset \$(\mathbb{E})$ et que si $X \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ $P(X) \leq S(X) \leq B(X)$.

Remarque. — Les normes P et B ne sont généralement pas équivalentes sur $\mathbb{B}(\mathbb{E})$, et les espaces $\$(\mathbb{E})$, $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ et $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ ne sont pas complets pour la norme de Pettis. Nous étudierons ce point au paragraphe 3.

L'étude de $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ est bien connue, nous donnons ci-dessous un certain

nombre de résultats simples sur $\$(\mathbb{E})$ et $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ qui nous seront utiles dans la suite de l'exposé.

LEMME 3. — Soit i l'injection canonique de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}''$ et soit $X \in \$(\mathbb{E})$ alors $i(X) \in \mathbb{P}(\mathbb{E}'')$ et $S(X) = S(i(X))$.

Démonstration. — Soit $A \in \mathscr{F}$, l'application $\theta_X(A) : u \to E(u(X)1_A)$ de E' dans R est linéaire continue de norme $\| \theta_X(A) \| = \bigvee_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ u \in \mathbb{E}'}} | E(u(X)1_A) | \leq S(X)$ c'est donc un élément de E''. L'application $\theta_X : \mathscr{F} \to \mathbb{E}''$ est manifestement additive, de plus si $A_n \downarrow \emptyset$ $\| \theta_X(A_n) \| \leq 2 \bigvee_{B \in A_n} | E(u(X)1_B) | \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0$ d'après le lemme 1 appliqué à la mesure réelle $B \to E(u(X)1_B)$, c'est donc une mesure à valeurs dans $\mathbb{E}''$.

De plus

$$S(\theta_X) = \bigvee_{\substack{|a_n| \leq 1 \\ (A_n) \text{ partition de } \Omega}} \left\| \sum_n a_n \theta_X(A_n) \right\| = \bigvee_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ u \in \mathbb{E}'}} \bigvee \left| \sum_n a_n \theta_X(A_n) \right| = S(X)$$

Enfin si $u \in \mathbb{E}''$, $u \in \mathbb{E}'$ et $u(\theta_X(A)) = \theta_X(A)(u) = E(u(X)1_A) = E(u(i(X))1_A)$ donc $\theta_X(A) = E(i(X)1_A)$ d'où $\theta_X = i(X) \circ \mathrm{Pr}$ et par conséquent $i(X) \in \mathbb{P}(\mathbb{E}'')$ et $S(i(X)) = S(\theta_X) = S(X)$.

LEMME 4. — Soit $X \in \$(\mathbb{E})$, les énoncés suivants sont équivalents.

i) $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$,

ii) $S(X1_{\{\|X\| > a\}}) \xrightarrow[a \uparrow \infty]{} 0$,

iii) $(X1_{\{\|X\| \leq n\}})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme de Pettis.

Démonstration. — *i)* $\Rightarrow$ *ii)*.

Notons μ_X la mesure de densité X, on a

$$S(X1_{\{\|X\| > a\}}) \leq 2 \bigvee_{B \subset \{\|X\| > a\}} \| \mu_X(B) \| \xrightarrow[a \uparrow \infty]{} 0$$

en appliquant le lemme 1 à μ_X pour la suite $\{ \| X \| > a \} \downarrow \emptyset$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*.

$$S(X1_{\{\|X\| \leq n\}} - X1_{\{\|X\| \leq m\}}) = S(X1_{\{\|X\| > m\}} - X1_{\{\|X\| > n\}}) \to 0$$

iii) $\Rightarrow$ *i)*.

Posons $X_n = X1_{\{\|X\| \leq n\}}$, on a évidemment $X_n \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ et

$$\| E(X_n 1_A) - E(X_m 1_A) \| \leq P(X_n - X_m) \xrightarrow[n,m \uparrow \infty]{} 0,$$

la suite $(E(X_n 1_A))$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{E}$, notons a sa limite.

D'autre part $|u(X_n)1_A| \uparrow |u(X)1_A|$ donc $E(u(X_n)1_A) \to E(u(X)1_A)$. D'où $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$, $E(X1_A) = a$ et $P(X_n - X) \to 0$.

Remarques. — 1) Le lemme 4 montre en particulier que toute v. a. $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ est limite pour la norme de Pettis de la suite des v. a. $X1_{\{\|X\| \leq n\}} \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$.

2) Il montre également que si $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ la mesure $\mu = X \circ \Pr$ est absolument continue par rapport à Pr ([*18*], théorème 2.5), c'est-à-dire que $\forall \varepsilon \exists \delta$ tel que $\Pr(A) \leq \delta \Rightarrow P(X1_A) \leq \varepsilon$.

On a en effet

$$\begin{aligned} P(X1_A) &\leq P(X1_{A \cap \{\|X\| > a\}}) + P(X1_{A \cap \{\|X\| \leq a\}}) \\ &\leq P(X1_{\{\|X\| > a\}}) + a\Pr(A) \end{aligned}$$

il suffit alors d'utiliser *ii*).

3) Si la probabilité Pr est purement atomique $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ est évidemment isomorphe à $l^1(\mathbb{E})$ (ou à un espace produit fini d'exemplaires de $\mathbb{E}$) donc $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ est complet pour P, mais si Pr est non atomique il n'en est plus de même [*22*], cependant si (X_n) est de Cauchy pour P et si X_n converge vers une v. a. X en un sens très faible, X_n converge pour P c'est le

LEMME 5 ([*6*], exercice 16*f*, § 1).

Soit (X_n) une suite de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ (resp. de $\$(\mathbb{E})$) de Cauchy pour la norme de Pettis et soit X une v. a. à valeurs dans $\mathbb{E}$:

a) Si $X \in \$(\mathbb{E})$ et si pour tout $u \in \mathbb{E}'$ $u(X_n) \to u(X)$ pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ alors $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ et X_n converge vers X pour P (resp. alors $S(X_n - X) \to 0$).

b) Si pour tout $u \in \mathbb{E}'$, $u(X_n) \to u(X)$ en probabilité alors $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ (resp. $X \in \$(\mathbb{E})$) et $S(X_n - X) \to 0$.

Démonstration. — Soit $(X_n) \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ et posons $\mu_n = X_n \circ \Pr$, μ_n est de Cauchy dans $\mathscr{M}(\mathbb{E})$ pour la norme P donc converge vers une mesure μ de $\mathscr{M}(\mathbb{E})$. Soit $u \in \mathbb{E}'$ on a $E(u(X_n)1_A) \to u(\mu(A))$ $\forall A \in \mathscr{F}$.

— Sous l'hypothèse *a*) alors $E(u(X_n)1_A) \to E(u(X)1_A)$ donc $\mu = X \circ \Pr$ et $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$. D'autre part $P(X_n - X) = P(\mu_n - \mu) \to 0$.

— Sous l'hypothèse *b*), $(u(X_n))$ est de Cauchy dans L^1 et converge en probabilité vers $u(X)$ donc converge vers $u(X)$ dans L^1, $X \in \$(\mathbb{E})$ et on applique *a*).

Pour une suite $X_n \in \$(\mathbb{E})$ la démonstration est identique en se plaçant dans $\mathbb{P}(\mathbb{E}'')$ (lemme 3).

Pour préciser un peu la nature des suites de Cauchy de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ ou de

$\$(\mathbb{E})$ pour la norme de Pettis nous introduisons la définition suivante :

Soit (X_n) une suite de v. a. de $\$(\mathbb{E})$ nous dirons que (X_n) est scalairement équi-intégrable (s. e. i.) si la famille de v. a. réelles

$$\{u(X_n) \mid n \in \mathbb{N}, \| u \| \leq 1, u \in \mathbb{E}' \}$$

est équi-intégrable.

Comme dans le cas réel on a (voir [*16*] par exemple).

LEMME 6. — Soit (X_n) une suite de v. a. de $\$(\mathbb{E})$, (X_n) est s. e. i. si et seulement si

a) $\bigvee_n S(X_n) < \infty$

b) $\forall \varepsilon \exists \delta$ tel que $\Pr(A) \leq \delta \Rightarrow \bigvee_n S(X_n 1_A) \leq \varepsilon$.

On en déduit :

PROPOSITION 7. — Soit (X_n) une suite de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ (resp. de $\$(\mathbb{E})$) alors

a) Si (X_n) est de Cauchy pour la norme de Pettis, X_n est s. e. i.

b) Si (X_n) est s. e. i. et si X_n converge fortement en probabilité vers une v. a. X ($\Pr \{ \| X_n - X \| > \varepsilon \} \to 0$) alors $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ (resp. $X \in \$(\mathbb{E})$) et X_n converge vers X pour la norme de Pettis.

Démonstration. — Il suffit de démontrer la proposition pour les v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ le deuxième cas s'y ramenant en plongeant $\$(\mathbb{E})$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{E}'')$:

a) se démontre comme dans le cas réel ([*16*]),

quant à *b*) on observe que $P(X_n - X_m) \leq \varepsilon + P((X_n - X_m) 1_{\{\|X_n - X_m\| > \varepsilon\}})$ en utilisant le lemme 6 (X_n) est de Cauchy pour P.

Le lemme 5 permet alors de conclure.

Remarque. — La proposition 7 ne peut être améliorée en général, en effet si X_n est de Cauchy pour la norme de Pettis, elle ne converge généralement pas en probabilité ni fortement ni faiblement, car sinon $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ serait complet pour P (lemme 5), ce qui est faux. Voir le paragraphe 3 pour d'autres précisions à ce sujet.

2. LOIS DES GRANDS NOMBRES

Il est bien connu (voir [*9*] par exemple) que si $X_1, \ldots, X_n \ldots$ est une suite de v. a. indépendantes de même loi à valeurs dans un espace de

Banach $\mathbb{E}$, $\lim_{n \uparrow \infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ converge p. s. dans $\mathbb{E}$ si et seulement si $X_n \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$, la convergence a, alors, également lieu pour la norme B. Nous examinons ci-dessous d'autres résultats de ce type.

PROPOSITION 8 (loi des grands nombres au sens de Pettis).

Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de v. a. indépendantes de même loi appartenant à $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ (resp. à $\$(\mathbb{E})$) alors la suite $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ converge vers $E(X_i)$ pour la norme de Pettis (resp. alors la suite $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ est de Cauchy pour la norme de Pettis S).

Démonstration. — Il suffit de démontrer la proposition pour les suites de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ (lemme 3).

Rappelons (lemme 4) que si $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$, il existe pour tout ε une v. a. $Y \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ telle que $P(X - Y) \leq \varepsilon$; soient $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n), \ldots$ des copies indépendantes du couple (X, Y) on a alors

$$P\left(\frac{\Sigma X_i}{n} - \frac{\Sigma Y_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(X_i - Y_i) \leq \varepsilon$$

puisque la norme de Pettis (S) ne dépend que de la loi de $(X_i - Y_i)$ donc de celle de (X, Y). D'autre part $\frac{\Sigma Y_i}{n}$ converge pour la norme B donc est, en particulier, de Cauchy pour P et par conséquent il en est de même de $\frac{\Sigma X_i}{n}$. Enfin on remarque que $u\left(\frac{\Sigma X_i}{n}\right) \to u(E(X_i))$ dans L^1 et le lemme 5 permet de conclure.

En fait la proposition 8 peut être améliorée de la façon suivante, considérons toujours une suite de v. a. indépendantes $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de même loi à valeurs dans $\mathbb{E}$. Nous introduisons comme d'habitude ([*17*]) la famille décroissante des tribus $\mathscr{S}_n$ des événements dépendants symétriquement de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Nous notons $\mathscr{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt liés à $(\mathscr{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs; $\mathscr{T}$ est filtrant croissant. On peut alors énoncer :

COROLLAIRE 9. — Si les X_i appartiennent à $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ (resp. à $\$(\mathbb{E})$) on a $\frac{X_1 + \ldots + X_\tau}{\tau} \xrightarrow[\tau \in \mathscr{T}]{} E(X_i)$ pour la norme de Pettis $\left(\text{resp. la famille} \left(\frac{X_1 + \ldots + X_\tau}{\tau}\right)_{\tau \in \mathscr{T}}\right.$ est de Cauchy pour la norme de Pettis).

Démonstration. — Si les v. a. X_i étaient intégrables au sens de Bochner, on aurait $M_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = E(X_1/\mathscr{S}_n)$, en particulier si τ_n est une suite de $\mathscr{T}$ croissant vers l'infini, $M_{\tau_n} = E(X_1/\mathscr{S}_{\tau_n})$ est une martingale convergeant p. s. et pour la norme B ([*9*]), on continue alors comme dans la démonstration précédente.

On peut se demander si les v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ ne satisfont pas une loi faible des grands nombres (convergence en probabilité forte). S'il en était ainsi, par raison de symétrie la convergence devrait avoir lieu suivant le filtre $\mathscr{T}$ comme dans le cas de la convergence en moyenne (Corollaire 9). Or on a :

PROPOSITION 10 (loi faible des grands nombres).

Soit (X_n) une suite de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ indépendantes et de même loi $\left(\dfrac{X_1 + \ldots + X_\sigma}{\sigma}\right)_{\sigma \in \mathscr{T}}$ converge fortement en probabilité vers $E(X)$ si et seulement si les X_i appartiennent à $\mathbb{B}(\mathbb{E})$, auquel cas elles vérifient la loi forte des grands nombres.

Démonstration. — Quitte à retrancher les espérances, on peut supposer que les v. a. X_n sont centrées ($E(X_n) = 0$), la proposition résulte alors du lemme suivant :

LEMME 11. — Soit $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ une suite de v. a. réelles adaptées à une suite $(\mathscr{F}_n)$ de tribus, croissante ou décroissante, soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés liés à $(\mathscr{F}_n)$ on a alors $Y_n \to 0$ p. s. si et seulement si $Y_\tau \underset{\tau \in \mathscr{T}}{\longrightarrow} 0$ en probabilité.

Démonstration. — On reconnaîtra aisément les idées de [*11*], lemme 2.1.

Supposons que $Y_n \not\to 0$ p. s., il existe alors $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\Pr(\overline{\lim}\,\{\,|\,Y_n\,| > \varepsilon\}) = \alpha$ c'est-à-dire que :

$$\forall n \exists n' \qquad \text{tel que} \qquad \Pr\left(\bigcup_n^{n'} \{\,|\,Y_k\,| > \varepsilon\}\right) > \frac{\alpha}{2}$$

On pose alors

$$\tau'_n = \begin{cases} \inf\{\,k \mid n \leq k < n',\ |\,Y_k\,| > \varepsilon\} \\ n' \text{ si l'ensemble précédent est vide} \end{cases}$$

et

$$\tau_n = \begin{cases} \sup\{\,k \mid n \leq k < n',\ |\,Y_k\,| > \varepsilon\} \\ n \text{ si l'ensemble précédent est vide} \end{cases}$$

Si $(\mathscr{F}_n)$ est croissante $\tau'_n \in \mathscr{T}$ et si $(\mathscr{F}_n)$ est décroissante $\tau_n \in \mathscr{T}$ on a

$$\Pr\{\,|\,Y_{\tau'_n}\,| > \varepsilon\} > \frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad \Pr\{\,|\,Y_{\tau_n}\,| > \varepsilon\} > \frac{\alpha}{2}.$$

Ce qui dans les deux cas contredit $Y_\sigma \underset{\sigma \in \mathscr{T}}{\longrightarrow} 0$ en probabilité.

Remarques 1. — On sait que la convergence en probabilité se définit simplement à l'aide de la convergence p. s. : $X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si de toute sous-suite on peut extraire une sous-suite convergeant p. s. vers 0.

Le lemme 11 montre qu'inversement la convergence p. s. se définit à partir de la convergence en probabilité, il suffit de remplacer l'ensemble des entiers par l'ensemble filtrant des temps d'arrêt bornés (ou des v. a. à valeurs entières bornées lorsque la filtration est constante). La plus grande richesse de cet ensemble d'indice permet d'appauvrir le mode de convergence.

On remarque que pour une suite $(X_n) \subset \mathbb{P}(\mathbb{E})$, adaptée à $(\mathscr{F}_n)$, si $P(X_\sigma) \underset{\sigma \in \mathscr{T}}{\longrightarrow} 0$, on a $u(X_\sigma) \underset{\sigma \in \mathscr{T}}{\longrightarrow} 0$ en probabilité pour tout $u \in \mathbb{E}'$ donc $u(X_n) \to 0$ p. s. Nous verrons au paragraphe 4 comment cette remarque permet d'expliquer certains phénomènes observés en théorie des amarts.

2. Il est naturel de se demander s'il n'existe pas de démonstration directe du corollaire 9; considérons, en effet, une suite $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$, indépendantes de même loi, centrées, posons $\mu = X_1 \circ \Pr$, alors, en notant $\mathscr{S}_n$ les tribus symétriques associées, on a pour tout $A \in \mathscr{S}_\sigma$: $\mu(A) = E\left(\dfrac{X_1 + \ldots + X_\sigma}{\sigma} . 1_A\right)$, le corollaire 9 peut alors s'énoncer :

$$\bigvee_{A \in \mathscr{S}_\sigma} \|\,\mu(A)\,\| \underset{\sigma \in \mathscr{T}}{\longrightarrow} \bigvee_{A \in \bigcap_n \mathscr{S}_n} \|\,\mu(A)\,\| = 0$$

ce qui pourrait être une conséquence du théorème très simple suivant : « si μ est une mesure de $\mathscr{F}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$, si $(\mathscr{G}_n)$ est une famille décroissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, alors, en posant $\mathscr{G} = \bigwedge_n \mathscr{G}_n$ on a :

$$\bigvee_{A \in \mathscr{G}_n} \|\,\mu(A)\,\| \to \bigvee_{A \in \mathscr{G}} \|\,\mu(A)\,\|. \text{ ''}$$

Ce théorème est malheureusement faux en général; considérons, par exemple, la mesure μ sur l'intervalle [0, 1] muni de sa tribu borélienne,

à valeurs dans c_0 définie par $\mu(A) = \left(\int_A \sin 2\pi nx dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et soit $(\mathscr{G}_n)$ la famille des tribus dyadiques décroissantes :

$$\mathscr{G}_n = \sigma\left(\left\{x = \sum_{\mathbb{N}} \frac{x_k}{2^k} \mid x_{n_1} = i_1, \ldots, x_{n_p} = i_p \,;\, n_1 \geq n,\, i_j = 0 \text{ ou } 1\right\}\right).$$

Les tribus $\mathscr{G}_n$ décroissent vers une tribu $\mathscr{G}$ p. s. triviale, donc

$$\bigvee_{A \in \mathscr{G}} \| \mu(A) \| = 0$$

or

$$\bigvee_{A \in \mathscr{G}_n} \| \mu(A) \| = \bigvee_{A \in \mathscr{G}_n} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \left| \int_A \sin 2\pi kx dx \right| \geq \bigvee_{A \in \mathscr{G}_n} \left| \int_A \sin 2\pi 2^n x dx \right| = \frac{1}{\pi}$$

pour tout n.

On montre que le « théorème » est vrai pour toutes les mesures à image compacte (par exemple si $\mu = X \circ \Pr$, $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$) mais la démonstration est technique et ne simplifie en rien l'exposition.

L'exemple ci-dessus montre également que les martingales-mesures vectorielles (voir § 4) du type $(\mu \mid \mathscr{G}_n)$ pour des tribus $\mathscr{G}_n$ décroissantes ne convergent généralement pas en norme de Pettis, contrairement au cas réel et au cas vectoriel à densité : $\mu = X \circ \Pr$, $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$.

Remarquons enfin que si $\mathscr{G}_n \uparrow \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ on a trivialement

$$\bigvee_{A \in \mathscr{G}_n} \| \mu(A) \| \to \bigvee_{A \in \mathscr{G}} \| \mu(A) \|,$$

mais ce résultat ne présente que peu d'intérêt.

3. ÉQUIVALENCES D'ESPÉRANCES

Nous étudions ci-dessous les cas d'équivalences des normes et des espérances introduites en 1). Pour cela nous avons besoin d'un rappel sommaire sur la géométrie des espaces de Banach.

a) Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach, rappelons qu'une suite (x_n) de $\mathbb{E}$ est dite scalairement sommable si pour tout $u \in \mathbb{E}'$, $\sum_n | u(x_n) | < \infty$. En général les suites scalairement sommables ne sont pas sommables, par exemple dans l'espace c_0 des suites de réels tendant vers 0 muni de la norme

$\| (x_n) \| = \bigvee_n | x_n |$, la base canonique $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ est scalairement sommable mais non sommable, c'est en fait le prototype de ce genre de situation, comme le montre le résultat fondamental suivant.

THÉORÈME DE BESSAGA-PELCZYNSKI [*4*]

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach, toute suite scalairement sommable est sommable si et seulement si c_0 ne se plonge pas dans $\mathbb{E}$.

On en déduit sans difficultés :

PROPOSITION 12 [*20*]. — Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathbb{E}$ ne contient pas c_0.
ii) $\$(\mathbb{E}) = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ pour toute probabilité atomique.
iii) $\$(\mathbb{E}) = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{Pr})$.

Démonstration. — *i*) $\Rightarrow$ *ii*) et *iii*) $\Rightarrow$ *i*) ne sont que la traduction probabiliste du théorème de Bessaga-Pelczynski.

Quant à *ii*) $\Rightarrow$ *iii*), cela résulte de ce que si $X \in \$(\mathbb{E})$ et si on pose $B_n = \{ n \leq \| X \| < n + 1 \}$, alors pour tout $A \in \mathscr{F}$, $X1_{A \cap B_n} \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$, la suite $(E(X1_{A \cap B_n}))$ est scalairement sommable et sa somme, a, vérifie $u(a) = E(u(X)1_A)$, soit $a = E(X1_A)$ et $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$.

b) Rappelons le deuxième résultat fondamental suivant :

THÉORÈME DE DVORETZKY-ROGERS [*10*]

$\mathbb{E}$ est de dimension finie si et seulement si toute suite sommable de $\mathbb{E}$ est absolument sommable.

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach et soit T une application linéaire continue de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, T est dite absolument sommante (a. s.) si elle transforme les suites sommables de $\mathbb{E}$ en suites absolument sommables de $\mathbb{F}$, l'importance de cette notion vient, en particulier, de ce qu'alors T est obligatoirement continue de $l^1(\mathbb{E})$ dans $l^1[\mathbb{F}]$, ou encore :

LEMME 13. — Les énoncés suivants sont équivalents :

i) T est a. s.
ii) T plonge continûment $\mathscr{M}(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathbb{E})$ dans $\mathscr{M}_b(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathrm{F})$.
iii) T plonge continûment $\mathscr{M}(\mathbb{E})$ dans $\mathscr{M}_b(\mathbb{F})$ pour tout espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$.

Démonstration. — *i*) $\Leftrightarrow$ *ii*) résulte du principe de composition (lemme IV.2.6. de [*19*] par exemple).

ii) $\Rightarrow$ *iii*), soit $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{E})$ et (A_n) une partition de Ω on a

$$\sum_n \| T\mu(A_n) \| = B(T\mu \mid_{\mathscr{F}_n})$$

en notant $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par (A_n) *ii*), implique alors qu'il existe une constante K ne dépendant que de T telle que $B(T\mu \mid_{\mathscr{F}_n}) \leq KP(\mu \mid_{\mathscr{F}_n}) \leq KP(\mu)$ et donc $B(T\mu) \leq KP(\mu)$.

Voir aussi [*13*].

On en déduit :

PROPOSITION 14. — Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable de tribu $\mathscr{F}$ infinie. Les énoncés suivants sont équivalents :

i) $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

ii) $\mathscr{M}(\mathbb{E}) = \mathscr{M}_b(\mathbb{E})$.

iii) P et B sont équivalentes sur $\mathscr{M}_b(\mathbb{E})$

iv) $\mathscr{M}(\mathbb{E})$ est complet pour P.

v) $\mathbb{P}(\mathbb{E}) = \mathbb{B}(\mathbb{E})$ pour une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ prenant une infinité de valeurs.

vi) P et B sont équivalentes sur $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ pour une probabilité prenant une infinité de valeurs.

vii) $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ est complet pour P.

viii), *ix*) *x*) mêmes énoncés que *ii*), *iii*), *iv*) en ajoutant pour tout espace probabilisable.

xi), *xii*), *xiii*) mêmes énoncés que *v*), *vi*), *vii*) en ajoutant pour tout espace probabilisé.

Démonstration. — *vi*) $\Rightarrow$ *iii*) : c'est le lemme 13 appliqué à l'identité de $\mathbb{E}$.

vii) $\Rightarrow$ *v*) : car toute v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ limite pour P d'une suite de v. a. de $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ est alors dans $\mathbb{B}(\mathbb{E})$.

Tout le reste est évident.

La proposition suivante permet de préciser davantage la proposition 7. Nous dirons, pour simplifier, qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{Pr})$ est infini si Card $(\mathrm{Pr}(\mathscr{F})) \geq$ Card $(\mathbb{N})$. On a alors :

PROPOSITION 15. — Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{Pr})$ un espace probabilisé infini, considérons les énoncés suivants :

i) $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

ii) Toute suite de Cauchy pour la norme P de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ converge fortement en probabilité.

iii) Si $(X_n) \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ vérifie $P(X_n) \to 0$ alors $\| X_n \| \to 0$ en probabilité.

iv) $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ est complet pour P.

v) Toute suite de Cauchy de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ pour la norme P converge faiblement en probabilité.

Alors on a toujours $i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iii$ et $iv \Leftrightarrow v$.

Les 5 énoncés sont équivalents si et seulement si $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ est non atomique.

Démonstration. — On a déjà vu que $v) \Rightarrow iv)$ (remarque après la proposition 7), d'autre part si $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ est non atomique Thomas [*22*] a montré que $iv) \Rightarrow i)$ la réciproque étant évidemment fausse dans le cas atomique puisque dans ce cas $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ est toujours complet pour P.

Il reste à montrer que $iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$, la première implication est évidente, la seconde résulte de ce que, si on a *ii*), alors soit $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ et $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des copies indépendantes de X, $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ est de Cauchy pour P (proposition 8) elle converge donc fortement en probabilité, donc $X \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ (proposition 10).

On en déduit alors :

COROLLAIRE 16. — Soit $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, T est a. s. si et seulement si il existe un espace probabilisé infini $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ et une constante K telle que pour tout $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ on ait

$$E(\| TX \| \wedge 1) \leq KP(X).$$

Remarque. — L'ensemble des v. a. à valeurs dans $\mathbb{E}$, muni de la convergence en probabilité forte est complet, mais il n'en est pas de même si on le munit de la convergence en probabilité faible ($u(X_n) \to u(X)$ en Proba pour tout $u \in \mathbb{E}'$) même uniformément en u, car ceci entraînerait que $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ est complet pour P.

4. SUITES ADAPTÉES DE $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ ET DE $\mathscr{M}(\mathbb{E})$

Nous munissons maintenant l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ d'une histoire $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$ vérifiant, $\mathscr{F}_0$ triviale et $\bigvee_n \mathscr{F}_n = \mathscr{F}$.

On notera toujours $\mathscr{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés liés à cette histoire.

Une suite de mesure (μ_n) à valeurs dans $\mathbb{E}$ est dite adaptée à l'histoire $(\mathscr{F}_n)$ si pour chaque n, μ_n est définie sur $\mathscr{F}_n$. On définit alors sans ambiguïté μ_τ sur $\mathscr{F}_\tau$, pour tout $\tau \in \mathscr{T}$ par la formule :

$$\mu_\tau(A) = \sum_n \mu_n(A \cap \{\tau = n\}) \qquad \text{pour} \qquad A \in \mathscr{F}_\tau$$

On définit en outre les normes P_τ : $P_\tau(\mu_\tau) = \bigvee_{A \in \mathscr{F}_\tau} \| \mu_\tau(A) \|$. On remarque que la norme P_σ est équivalente à la norme S sur $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{F}_\tau, \mathbb{E})$ pour tout $\tau \geq \sigma$.

— Une suite adaptée (μ_n) est appelée une martingale si $\mu_n(A) = \mu_p(A)$ pour tout $A \in \mathscr{F}_n$ et $p \geq n$.

(μ_n) est appelée un amart si $(\mu_\tau(\Omega))_{\tau \in \mathscr{T}}$ converge dans $\mathbb{E}$.

— Une suite adaptée (X_n) de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ (X_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable pour tout n) est appelée un amart si la suite des mesures $(X_n \circ Pr)$ est un amart.

Nous commençons par redémontrer un lemme classique, mais fondamental, de la théorie des amarts [*12*].

LEMME 17. — Soit (μ_n) un amart, il existe une mesure additive, m, sur l'algèbre $\bigcup_n \mathscr{F}_n$ telle que $m_\tau = m|_{\mathscr{F}_\tau}$ est σ-additive pour tout τ et $P_{\sigma_0}(\mu_\sigma - m_{\sigma_0}) \underset{\sigma}{\to} 0$.

Démonstration [*12*]. — Soit $\sigma_0 \in \mathscr{T}$ et soit $A \in \mathscr{F}_{\sigma_0}$, si σ et $\tau \geqslant \sigma_0$ on pose $\tau' = \begin{cases} \sigma & \text{sur } A^c \\ \tau & \text{sur } A \end{cases}$ on a alors $\mu_\sigma(A) - \mu_\tau(A) = \mu_\sigma(\Omega) - \mu_{\tau'}(\Omega)$, d'où $P_{\sigma_0}(\mu_\sigma - \mu_\tau) \xrightarrow[\sigma, \tau \geq \sigma_0]{} 0$ la limite de (μ_σ) pour P_{σ_0} est une mesure sur $\mathscr{F}_{\sigma_0}$ qui est évidemment la restriction à $\mathscr{F}_{\sigma_0}$ d'une fonction additive d'ensemble m sur l'algèbre $\bigcup_n \mathscr{F}_n$. On remarque que $m_n = m \mid \mathscr{F}_n$ est une martingale, c'est l'asymptote de l'amart μ_n; on appellera m la limite de l'amart (μ_n), on a :

LEMME 18. — Soit (μ_n) un amart, soit m sa limite et $m_n = m \mid \mathscr{F}_n$ son asymptote, alors $P_\sigma(\mu_\sigma - m_\sigma) \xrightarrow[\sigma \in \mathscr{T}]{} 0$.

Démonstration. — Fixons $\sigma \geq \sigma_0$, pour τ suffisamment grand, on a d'après le lemme 17 : $P_\sigma(\mu_\tau - m_\sigma) \leq \varepsilon$.

Soit $A \in \mathscr{F}_\sigma$, avec les notations de la démonstration du lemme 17 :

$\mu_\tau(A) - \mu_\sigma(A) = \mu_\sigma(\Omega) - \mu_{\tau'}(\Omega)$ où $\tau' \geq \sigma_0$ donc $\| \mu_\tau(A) - \mu_\sigma(A) \| \leq \varepsilon$ et par conséquent $P(\mu_\tau - \mu_\sigma) \leq \varepsilon$ d'où $P_\sigma(\mu_\sigma - \mu_\sigma) \leq 2\varepsilon$ pour tout $\sigma \geq \sigma_0$.

Remarque. — Une martingale réelle non équi-intégrable n'est pas de Cauchy dans L^1, donc un amart ne sera généralement pas de Cauchy pour la norme de Pettis, et m, sa limite, ne sera pas σ-additive, cependant on observe que $\rho_n = \mu_n - m_n$ est un amart dont la limite est identiquement nulle, on a donc $P_\sigma(\rho_\sigma) \to 0$. Cette remarque conduit à la définition suivante :

Définition. — Une suite de mesures μ_n (resp. de v. a. $X_n \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$), adaptée, est appelée un potentiel si $P_\sigma(\mu_\sigma) \underset{\sigma \in \mathscr{C}}{\longrightarrow} 0$ (resp. $P(X_\sigma) \underset{\sigma \in \mathscr{C}}{\longrightarrow} 0$).

Remarques. — 1. Edgar et Sucheston dans [*12*] définissent un potentiel (X_n) comme un amart vérifiant $P(X_n) \to 0$, Astbury dans [*1*] adopte une définition un peu plus faible : (X_n) est un potentiel si c'est un amart vérifiant $E(1_A \circ X_n) \to 0$ pour tout A de l'algèbre $\bigcup_n \mathscr{F}_n$. Ces deux définitions impliquent que la limite m de (X_n) est nulle, elles sont donc équivalentes à la définition précédente.

La deuxième note [7] donne une mauvaise définition des potentiels, on la rectifiera aisément, ainsi que l'énoncé de la proposition 2.

2. Soit (μ_n) un amart on a $\mu_n = m_n + \rho_n$ où $m_n = m\,|_{\mathscr{F}_n}$ est la martingale asymptote de (μ_n) et $\rho_n = \mu_n - m_n$ est un potentiel; en théorie des amarts, on observe ainsi la liaison de deux types bien distincts : le type martingale ($E(X_\sigma) =$ constante) et le type potentiel ($P(X_\sigma) \to 0$).

Nous introduisons maintenant la notation suivante :

Soit A un ensemble, soit S l'ensemble des suites d'éléments de A possédant une certaine propriété $\mathscr{P}$, on note *S l'ensemble des suites de A telles que de toutes sous-suites on puisse extraire une sous-suite possédant la propriété $\mathscr{P}$, on dit que les éléments de *S possèdent la propriété $*\mathscr{P}$.

Exemple. — Soit X_n une suite adaptée convergeant vers 0 p. s., alors $\| X_\sigma \| \underset{\tau \in \mathscr{C}}{\longrightarrow} 0$ en probabilité, convenons d'appeler potentiel en probabilité de telles suites. Toute suite adaptée X_n convergeant fortement en probabilité vers 0, est alors un $*$-potentiel en probabilité.

On a de même :

PROPOSITION 19. — Soit (μ_n) (resp. (X_n)) une suite de mesures (resp. de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$) adaptée à l'histoire $(\mathscr{F}_n)$ alors :

μ_n est un $*$-potentiel (resp. X_n est un $*$-potentiel) si et seulement si

$$P_n(\mu_n) \to 0 \text{ .resp. } P(X_n) \to 0$$

Démonstration. — Si $P_n(\mu_n) \to 0$, appelons (μ_n) une sous-suite extraite de la suite initiale, pour une sous-suite de (μ_n), que nous appelons encore (μ_n), on a $\sum_n P_n(\mu_n) < \infty$, d'où si

$$\sigma \geq N, \| \mu_\sigma(\Omega) \| = \| \sum_n \mu_n(\{ \sigma = n \}) \| \leq \sum_{n \geq N} P_n(\mu_n) \to 0$$

quand $N \to \infty$.

La proposition suivante résume un certain nombre de résultats classiques [*2*], [*11*], [*13*].

PROPOSITION 20. — Les énoncés suivants sont équivalents :

i) $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

ii) Tout potentiel de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ converge vers 0 fortement p. s. :

$$\| X_\sigma \| \underset{\sigma \in \mathscr{C}}{\longrightarrow} 0$$

en probabilité.

iii) Tout potentiel (X_n), vérifiant $\| X_n \| \leq 1$, converge vers 0 fortement p. s.

iv) Tout potentiel (X_n), vérifiant $\| X_n \| \leq 1$, est uniforme :

$$B(X_\sigma) \underset{\sigma \in \mathscr{C}}{\longrightarrow} 0 \text{ ([3])}.$$

v) Tout potentiel de $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ est uniforme.

Démonstration. — *i*) $\Rightarrow$ *v*) car en dimension finie, P et B sont équivalentes sur $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ (proposition 15).

v) $\Rightarrow$ *iv*) est triviale.

iv) $\Rightarrow$ *iii*) car si $B(X_\sigma) \underset{\sigma \in \mathscr{C}}{\longrightarrow} 0$ alors $\| X_\sigma \| \underset{\sigma \in \mathscr{C}}{\longrightarrow} 0$ en probabilité (inégalité de Bienaymé-Tchébycheff) donc $\| X_n \| \to 0$ p. s.

iii) $\Rightarrow$ *ii*) :

Soit (X_n) un potentiel de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ alors $Y_n = \dfrac{X_n}{\| X_n \| \vee 1}$ est un potentiel :

on remarque en effet que si $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$ et si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable et vérifie $|f| \leq 1$ alors $S(fX) \leq S(X)$, donc $S(Y_n) \leq S(X_n)$. On a donc $P(Y_\sigma) \to 0$, soit $\| Y_n \| \to 0$ p. s. donc $\| X_n \| \to 0$ p. s. (si (a_n) est une suite de nombres réels $a_n \to 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_n}{| a_n | \vee 1} \to 0$).

ii) $\Rightarrow$ *i*) :

car tout $*$-potentiel converge vers 0 en probabilité, sous l'hypothèse *ii*), donc l'espace est de dimension finie (proposition 15).

COROLLAIRE 21. — Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ un espace probabilisé infini, les énoncés suivants sont équivalents :

i) P et B sont équivalentes sur $\{ X \mid \| X \| \leq 1 \}$.

ii) $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

Démonstration. — On pose $\mathscr{F}_n \equiv \mathscr{F}$ et on applique la proposition précédente.

Remarque. — C'est en fait le résultat très élégant et inattendu de A. Bellow [*2*] sur la caractérisation des espaces de dimension finie à l'aide de la convergence p. s. des amarts, qui a motivé l'étude que nous présentons ici. Il nous a semblé qu'une explication pouvait être la suivante, la considération des temps d'arrêt bornés transforme la convergence p. s. en convergence en probabilité, le problème revient alors à décider dans quels cas la convergence au sens de Pettis implique la convergence en probabilité, et la loi faible des grands nombres pour les v. a. intégrables au sens de Pettis permet de conclure. Terminons par un dernier résultat analogue à celui de [*8*] :

PROPOSITION 22. — Si $\mathbb{E}'$ est séparable et si (X_n) est un potentiel de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ vérifiant $\bigvee_n \| X_n(\omega) \| < \infty$ p. s. alors $X_n \to 0$ faiblement p. s.

Démonstration. — $u(X_\sigma) \xrightarrow[\sigma \in \mathscr{C}]{} 0$ en probabilité (car dans L^1) pour tout u de $\mathbb{E}'$ donc $u(X_n) \to 0$ p. s. pour tout u, soit N l'ensemble négligeable en dehors duquel $u_k(X_n(\omega)) \to 0$ pour tout k, où (u_n) est dense dans $\mathbb{E}'$, comme $\bigvee_n \| X_n(\omega) \| < \infty$ p. s., sur N^c $u(X_n(\omega)) \to 0$ p. s. pour tout u.

Remarque. — La condition $\bigvee_n \| X_n(\omega) \| < \infty$ p. s. ne peut être améliorée, voir [*8*].

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] K. A. ASTBURY, Amarts indexed by directed sets. *Ann. Probability*, t. **6**, nº 2, 1978, p. 267-278.

[*2*] A. BELLOW, On vector-valued asymptotic martingales. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, t. **73**, 1976, p. 1798-1799.

[*3*] A. BELLOW, Les amarts uniformes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **284**, série A, 1977, p. 1295.

[*4*] C. BESSAGA, A. PELCZYNSKI, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. *Studia Mathematica*, t. **17**, 1958, p. 151-164.

[*5*] G. BIRKHOFF, Integration of functions with values in a Banach Space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **28**, 1935, p. 357-378.

[6] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques*, livre VI, Intégration, Chapitre 6, Hermann, Paris, 1959.

[7] B. BRU et H. HEINICH, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **288**, 1979, p. 65-68 et p. 363-366.

[8] R. V. CHACON et L. SUCHESTON, On convergence of vector-valued asymptotic martingales. *Z. Wahrs. Verw. Gebiete*, t. **33**, 1975, p. 55-59.

[9] S. D. CHATTERJI, Vector-valued martingales and their applications. *Lectures notes*, n° 526, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976, p. 33-51.

[10] A. DVORETZKY et C. A. ROGERS, Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, t. **36**, 1950, p. 192-197.

[11] G. A. EDGAR et L. SUCHESTON, Amarts: a class of asymptotic martingales. A. Discrete parameter. *J. Multiv. Anal.*, t. **6**, 1976, p. 193-221.

[12] G. A. EDGAR et L. SUCHESTON, The Riesz decomposition for vector-valued amarts. *Z. Wahrs. Verw. Gebiete*, t. **36**, 1976, p. 85-92.

[13] N. GHOUSSOUB, Summability and vector-valued amarts, 1978, — *J. Multiv.An al.* (à paraître).

[14] H. HEINICH, *Thèse*, Université P.-et-M.-Curie, Paris VI, 1975.

[15] M. E. MUNROE, Absolute and unconditional convergence in Banach Space. *Duke Math. J.*, t. **13**, 1946, p. 351-365.

[16] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson, Paris, 1964.

[17] J. NEVEU, *Martingales à temps discrets*. Masson, Paris, 1974.

[18] B. J. PETTIS, On integration in vector space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **44**, 1938, p. 277-304.

[19] H. H. SCHAEFER, *Banach lattices and positive operators*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[20] E. THOMAS, L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle. *Ann. Inst. Fourier*, t. *20*, 2, 1970, p. 55-191.

[21] E. THOMAS, The Lebesgue-Nikodym theorem for vector valued Radon measures. *Amer. Math. Soc.*, Memoir n° 139, 1974.

[22] E. THOMAS, On some negative properties of the Pettis integral. *Lecture Notes*, n° 541. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976, p. 131.

[23] J. J. UHL, Pettis mean convergence of vector-valued asymptotic martingales. *Z. Wahrs. Verw. Gebiete*, t. **37**, 1977, p. 291-295.

(Manuscrit reçu le 18 mars 1980).