ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HALIM DOSS

Quelques formules asymptotiques pour les petites perturbations de systèmes dynamiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, n° 1 (1980), p. 17-28
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_1_17_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 1, 1980, p. 17-28.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Quelques formules asymptotiques pour les petites perturbations de systèmes dynamiques

par

Halim DOSS

Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités,
4, Place Jussieu, Tour 56, 75230 Paris Cedex 05

Nous démontrons dans cet article qui s'inspire de certains travaux de Donsker et Varadhan [*2*], [*3*], des formules asymptotiques pour les petites perturbations d'équations stochastiques analogues à celles qu'avait obtenues Schilder [*6*] dans le cas du mouvement brownien.

On commence par préciser le lien qui existe entre un développement asymptotique pour ces petites perturbations et les estimations de Ventsel et Freidlin. Ensuite, sous une certaine hypothèse (Condition de Frobénius) grâce à laquelle on représente la solution d'une équation stochastique comme une fonctionnelle suffisamment régulière du mouvement brownien et qui est toujours vérifiée si ce mouvement brownien est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on montre qu'il est possible d'obtenir des développements asymptotiques à tous les ordres.

1. PRÉCISIONS A PROPOS DES ESTIMATIONS DE VENTSEL ET FREIDLIN [10]

Soient $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — (espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$) — et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux applications lipschitziennes. Supposons de plus σ de classe C^2.

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons la solution (X_t^ε) de l'équation :

$$(1) \quad X_t^\varepsilon = x + \varepsilon . S . \int_0^t \sigma(X_s^\varepsilon) dB_s + \int_0^t b(X_s^\varepsilon) ds, \qquad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

La lettre S figurant dans l'égalité (1) signifie qu'on a utilisé l'intégrale de Stratonovitch. Cf. [*5*].

Soit $\Omega \subset C_{[0,T]}(\mathbb{R}^m)$ (resp. $\Omega' \subset C_{[0,T]}(\mathbb{R}^n)$) l'ensemble des applications continues ω de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$) telles que $\omega(0) = 0$ (resp. $\omega(0) = x$), muni de la norme uniforme sur $[0, T]$.

Soit Ω_0 (resp. Ω'_0) le sous-ensemble de Ω (resp. Ω') constitué des éléments ω qui admettent une dérivée $\dot{\omega}$ au sens de Lebesgue, de carré intégrable sur $[0, T]$.

Considérons l'application Φ de Ω_0 dans Ω'_0 définie par :

$$(2) \quad \Phi(\omega)(t) = x + \int_0^t \sigma(\Phi(\omega)(s)) d\omega_s + \int_0^t b(\Phi(\omega)(s)) ds \qquad \text{si} \quad \omega \in \Omega_0 .$$

Définissons de même les fonctionnelles μ de Ω dans $\mathbb{R}_+$ et λ de Ω' dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$(3) \qquad \mu(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^T |\dot{\omega}_s|^2 ds & \text{si} \quad \omega \in \Omega_0 \\ +\infty & \text{si} \quad \omega \notin \Omega_0 \end{cases}$$

$$\lambda(\psi) = \begin{cases} \inf\limits_{\omega \in \Phi^{-1}(\psi)} \mu(\omega) & \text{si} \quad \Phi^{-1}(\psi) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si} \quad \Phi^{-1}(\psi) = \emptyset . \end{cases}$$

Si A est un borélien de Ω' nous poserons

$$\Lambda(A) = \inf_{\psi \in A} \lambda(\psi)$$

Considérons le processus $(X_t^\varepsilon)_{t \in [0,T]}$ comme une application mesurable X^ε de Ω dans Ω', Ω étant muni de la mesure de Wiener.

(I) Soit $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ — $(\theta_0 = \theta)$ — une famille d'applications mesurables de Ω' dans $\mathbb{R}$. On dira qu'elle vérifie l'hypothèse (I) si pour toute suite (ε_n) de nombres positifs tendant vers zéro, on a :

i) $\lim\limits_{L \to \infty} \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \, \varepsilon_n^2 \operatorname{Log} E \left[(\exp(\varepsilon_n^{-2} \theta_{\varepsilon_n}(X^{\varepsilon_n}))) . 1_{(\theta_{\varepsilon_n}(X^{\varepsilon_n}) \geq L)} \right] = -\infty$

ii) Pour tout $\psi \in \Omega'$ tel que $\lambda(\psi) < \infty$ et toute suite (ψ_n) tendant vers ψ :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, \theta_{\varepsilon_n}(\psi_n) \leq \theta(\psi) .$$

iii) Soit $\Omega_0'' \subseteq \Omega'$ tel que

$$\Lambda = \operatorname*{Sup}_{\psi \in \Omega'} (\theta(\psi) - \lambda(\psi)) = \operatorname*{Sup}_{\psi \in \Omega_0''} (\theta(\psi) - \lambda(\psi))$$

alors pour tout $\psi \in \Omega_0''$ et toute suite (ψ_n) tendant vers ψ :

$$\varliminf_{n \to \infty} \theta_{\varepsilon_n}(\psi_n) \geq \theta(\psi).$$

THÉORÈME 1. — Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout borélien A de Ω' :

$$-\Lambda(\overset{\circ}{A}) \leq \varliminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^\varepsilon \in A) \leq \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^\varepsilon \in A) \leq -\Lambda(\bar{A})$$

ii) Pour toute famille d'applications $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ vérifiant l'hypothèse (I) :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} E(\exp(\varepsilon^{-2}\theta_\varepsilon(X^\varepsilon))) = \operatorname*{Sup}_{\omega \in \Omega_0} (\theta(\Phi(\omega)) - \mu(\omega)).$$

iii) Pour toute application continue et bornée θ de Ω' dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} E(\exp(\varepsilon^{-2}\theta(X^\varepsilon))) = \operatorname*{Sup}_{\omega \in \Omega_0} (\theta(\Phi(\omega)) - \mu(\omega)).$$

LEMME 2. — *i*)

$$\operatorname*{Sup}_{\omega \in \Omega_0} (\theta(\Phi(\omega)) - \mu(\omega)) = \operatorname*{Sup}_{\psi \in \Omega_0'} (\theta(\psi) - \lambda(\psi))$$

ii) Les fonctionnelles λ et ψ sont semi-continues inférieurement et pour tout $M \in \mathbb{R}$ les ensembles $(\lambda \leq M)$ et $(\mu \leq M)$ sont compacts.

iii) La fonctionnelle μ est convexe et strictement convexe sur l'ensemble $(\mu < \infty)$.

Preuve. — La propriété *i*) est facile à vérifier. Quant aux propriétés *ii*) et *iii*) elles sont bien connues (on peut se référer à [*1*]).

REMARQUE 3. — L'assertion *i*) est l'énoncé des estimations de Ventsel et Freidlin généralisées au cas où σ peut être dégénéré et qui sont démontrées en [*1*].

Preuve du Théorème 1. — On vérifie aisément, compte tenu du Lemme 2, que *i*) $\Rightarrow$ *ii*) $\Rightarrow$ *iii*) grâce aux résultats de Varadhan concernant le comportement asymptotique d'une famille de probabilités (cf. [*8*], section 3).

Montrons que *iii*) $\Rightarrow$ *i*).

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des applications continues de Ω' dans $\mathbb{R}$. Soit A un borélien de Ω', θ_1 et θ_2 deux éléments de $\mathscr{C}$ tels que :

$$0 \leq \theta_1 \leq 1_A \leq \theta_2 \leq 1 \tag{4}$$

Si $\theta \in \mathscr{C}$ posons $\alpha_\theta = \operatorname*{Sup}_{\psi \in \Omega_0'} (\theta(\psi) - \lambda(\psi))$.

iii) Entraîne que

$$\alpha_{\theta_1} \leq \overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}} \varepsilon^2 \operatorname{Log}\left(P(X^\varepsilon \notin A) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)P(X^\varepsilon \in A)\right) \leq \alpha_{\theta_2} \tag{5}$$

Commençons par supposer que $\Lambda(\mathring{A}) < \infty$ et qu'il existe θ_1 vérifiant (4) tel que

$$\alpha_{\theta_1} > 0 . \tag{6}$$

On déduit alors de (5) que $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)P(X^\varepsilon \in A)$ tend vers l'infini quand ε tend vers zéro et donc que

$$\alpha_{\theta_1} - 1 \leq \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^\varepsilon \in A) \leq \alpha_{\theta_2} - 1 . \tag{7}$$

Montrons que, θ_1 et θ_2 vérifiant les inégalités (4), que

$$\Lambda(\mathring{A}) = \operatorname{Sup}_{\theta_1} (\alpha_{\theta_1} - 1) \qquad \text{et} \qquad \Lambda(\bar{A}) = \operatorname{Inf}_{\theta_2} (\alpha_{\theta_2} - 1) . \tag{8}$$

En effet si $\alpha_{\theta_1} > 0$ alors

$$\alpha_{\theta_1} = \operatorname{Sup}_{\psi : \theta_1(\psi) > 0} (\theta_1(\psi) - \lambda(\psi))$$

et comme l'ensemble $(\theta_1 > 0)$ est inclus dans $\mathring{A}$, on a

$$\alpha_{\theta_1} - 1 \leq \operatorname{Sup}_{\psi \in \mathring{A}} (-\lambda(\psi)) = -\Lambda(\mathring{A}) .$$

Réciproquement, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe ψ_ε appartenant à $\mathring{A}$ tel que :

$$\Lambda(\mathring{A}) \leq \lambda(\psi_\varepsilon) < \Lambda(\mathring{A}) + \varepsilon$$

et il existe θ_1 vérifiant (4) tel que $\theta_1(\psi_\varepsilon) = 1$ donc

$$\alpha_{\theta_1} - 1 \geq \theta_1(\psi_\varepsilon) - 1 - \lambda(\psi_\varepsilon) > -\Lambda(\mathring{A}) - \varepsilon .$$

On a donc montré la première égalité de (8).

Soit θ_2 vérifiant (4) alors $1_{\bar{A}} \leq \theta_2 \leq 1$, donc

$$\alpha_{\theta_2} - 1 = \operatorname{Sup}_{\psi} (\theta_2(\psi) - 1 - \lambda(\psi)) \geq \operatorname{Sup}_{\psi \in \bar{A}} (-\lambda(\psi)) = -\Lambda(\bar{A}) .$$

Pour montrer que $\operatorname{Inf}_{\theta_2} (\alpha_{\theta_2} - 1)$ est inférieur ou égal à $-\Lambda(\bar{A})$, on utilise le fait que

$$\Lambda(\bar{A}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda(V_\varepsilon(A)) , \tag{9}$$

si $V_\varepsilon(A)$ désigne le voisinage d'ordre ε de A.

En effet, il est évident que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda(V_\varepsilon(A)) \leq \Lambda(\bar{A}).$$

Si $\Lambda(\bar{A}) < \infty$ et si

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda(V_\varepsilon(A)) \leq \Lambda(\bar{A}) - p \qquad (p > 0)$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe ψ_ε appartenant à $V_\varepsilon(A)$ tel que $\lambda(\psi_\varepsilon) \leq \Lambda(\bar{A}) - p/2$, comme la fonctionnelle λ est s. c. i. et puisque $\{ \psi : \lambda(\psi) \leq \Lambda(\bar{A}) - p/2 \}$ est compact, on en déduit qu'il existe une sous-suite (ε_k) tendant vers zéro et ψ_0 appartenant à $\bar{A}$ tels que $\psi_{\varepsilon_k} \to \psi_0$ et $\lambda(\psi_{\varepsilon_k}) \leq \Lambda(\bar{A}) - p/2$ donc $\lambda(\psi_0) \leq \varliminf_{k \to \infty} \lambda(\psi_{\varepsilon_k}) \leq \Lambda(\bar{A}) - p/2$ ce qui est contradictoire.

Si $\Lambda(\bar{A}) = +\infty$, on montre de même que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda(V_\varepsilon(A)) = +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe θ_2 appartenant à $\mathscr{C}$ tel que $1_A \leq \theta_2 \leq 1$ et $(\theta_2 > 0) \subseteq V_\varepsilon(A)$.

Alors :

$$\alpha_{\theta_2} - 1 = \operatorname*{Sup}_{\psi : \theta_2(\psi) > 0} (\theta_2(\psi) - 1 - \lambda(\psi)) \leq \operatorname*{Sup}_{\psi \in V_\varepsilon(A)} (-\lambda(\psi)) = -\Lambda(V_\varepsilon(A)).$$

On en déduit bien que $\operatorname*{Inf}_{\theta_2} (\alpha_{\theta_2} - 1) \leq -\Lambda(\bar{A})$.

Examinons la condition (6).

Pour qu'il existe θ_1 vérifiant (4) et (6), on voit qu'il suffit que $\Lambda(\mathring{A}) < 1$.

Si ce n'est pas le cas, puisque $\Lambda(\mathring{A}) < \infty$, soit k appartenant à $\mathbb{R}_+$ tel que $\frac{1}{k^2} \Lambda(\mathring{A}) < 1$.

Soit $X^{(k)}$ le processus de diffusion solution de l'équation stochastique obtenue lorsqu'on remplace dans (1) le coefficient σ par $k\sigma$.

La fonctionnelle $\lambda^{(k)}$ associée au processus $X^{(k)}$ vérifie

$$\lambda^{(k)}(\psi) = \inf \frac{1}{2} \left\{ \int_0^T |\dot{\omega}_s|^2 ds, \qquad \omega \text{ tel que } \Phi(k\omega) = \psi \right\}$$

si $\lambda^{(k)}(\psi) < \infty$.

Donc $\lambda^{(k)}(\psi) = \frac{1}{k^2} \lambda(\psi)$ et

$$\Lambda^{(k)}(\mathring{A}) = \inf_{\psi \in \mathring{A}} \lambda^{(k)}(\psi) = \frac{1}{k^2} \Lambda(\mathring{A}) < 1.$$

D'après ce qui précède, on en déduit que :

$$- \frac{\Lambda(\mathring{A})}{k^2} \leq \overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}}\ \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^{k\varepsilon} \in A) \leq - \frac{\Lambda(\bar{A})}{k^2}$$

La propriété *i)* est donc démontrée si $\Lambda(\mathring{A}) < \infty$.

Si $\Lambda(\mathring{A}) = + \infty$, soit $M > 0$ tel que $\Lambda(V_M(A)) < \infty$.

D'après ce qui précède :

$$\overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}}\ \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^\varepsilon \in A) \leq \overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}}\ \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(X^\varepsilon \in V_M(\bar{A})) \leq - \Lambda(\overline{V_M(\bar{A})})$$

et puisque $\lim_{M \searrow 0} \Lambda(\overline{V_M(\bar{A})}) = \Lambda(\bar{A})$, la propriété *i)* est vérifiée si pour tout $M > 0$, $\Lambda(V_M(A)) < \infty$.

S'il existe M tel que $\Lambda(V_M(A)) = + \infty$, alors pour tout ω appartenant à Ω_0, $\Phi(\omega)$ n'appartient pas à $V_M(A)$. Donc la distance de $\Phi(\omega)$ à $\bar{A}$ est supérieure ou égale à M. On sait alors, en utilisant le théorème de Stroock et Varadhan concernant le support des processus de diffusion [*9*], que pour tout $\varepsilon > 0$, la distance de $X^\varepsilon(\omega)$ à $\bar{A}$ est p. s. supérieure ou égale à M.

Donc $P(X^\varepsilon \in A) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et la propriété *i)* est encore vérifiée puisque $\Lambda(\bar{A}) = + \infty$.

PROPOSITION 4. — *i)* La fonctionnelle $\psi \to \theta(\psi) - \lambda(\psi)$ admet un maximum propre si la fonctionnelle $\omega \to \theta(\Phi(\omega)) - \mu(\omega)$ admet un maximum propre.

ii) Si pour tout ψ tel que $\lambda(\psi) < \infty$, $\theta(\psi) \leq A + B\lambda(\psi)$ où $A, B \in \mathbb{R}$ et $B < 1$ et si θ est semi-continue supérieurement sur l'ensemble $(\lambda < \infty)$, la borne supérieure $\Lambda = \operatorname{Sup}_{\psi} (\theta(\psi) - \lambda(\psi))$ est atteinte en au moins un élément ψ_0. Si, de plus, cet élément ψ_0 est unique, alors

$$\operatorname{Sup}_{|\psi - \psi_0| \geq \varepsilon} (\theta(\psi) - \lambda(\psi)) < \Lambda \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0\,.$$

iii) Si l'application $\theta \circ \Phi$ est concave sur l'ensemble Ω_0, la borne supérieure Λ est atteinte en au plus un élément ψ_0.

Preuve. — On établit *i)* facilement en remarquant que l'application $\Phi_{|(\mu \leq M)}$ est continue et que, grâce aux propriétés de μ, si $\lambda(\psi) < \infty$, il existe ω appartenant à $\Phi^{-1}(\psi)$ tel que $\mu(\omega) = \lambda(\psi)$.

ii) Soit (ψ_n) une suite telle que $(\theta(\psi_n) - \lambda(\psi_n))$ tende vers Λ. Montrons que la suite $(\lambda(\psi_n))$ est bornée. Si elle ne l'est pas, on peut supposer qu'elle tend vers l'infini, alors :

$$\theta(\psi_n) - \lambda(\psi_n) \leq \mathrm{A} + (\mathrm{B} - 1)\lambda(\psi_n) \qquad \text{qui tend vers } -\infty$$

ce qui est contradictoire puisque $\Lambda > -\infty$.

Puisque, pour tout M, l'ensemble $(\lambda \leq \mathrm{M})$ est compact, on peut supposer que (ψ_n) tend vers ψ_0. Alors $\theta(\psi_0) - \lambda(\psi_0) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \theta(\psi_n) - \underline{\lim}_{n\to\infty} \lambda(\psi_n) = \Lambda$.

On démontre de même la seconde partie de *ii*).

iii) Supposons que $\Lambda = \theta(\psi_0) - \lambda(\psi_0) = \theta(\psi_1) - \lambda(\psi_1)$ avec $\psi_0 \neq \psi_1$.

Soient ω_0 et ω_1 deux éléments de Ω_0 tels que

$$\Phi(\omega_0) = \psi_0, \quad \Phi(\omega_1) = \psi_1, \quad \mu(\omega_0) = \lambda(\psi_0) \quad \text{et} \quad \mu(\omega_1) = \lambda(\psi_1),$$

alors

$$\Lambda = \theta(\Phi(\omega_0)) - \mu(\omega_0) = \theta(\Phi(\omega_1)) - \mu(\omega_1)$$

et si $0 < \alpha < 1$ on a

$$\begin{aligned} &\theta(\Phi(\alpha\omega_0 + (1-\alpha)\omega_1)) - \mu(\alpha\omega_0 + (1-\alpha)\omega_1) \\ &\qquad > \alpha(\theta(\Phi(\omega_0)) - \mu(\omega_0)) + (1-\alpha)(\theta(\Phi(\omega_1)) - \mu(\omega_1)) = \Lambda . \end{aligned}$$

puisque $\omega_0 \neq \omega_1$ et que μ est strictement convexe sur l'ensemble $(\mu < \infty)$. On aboutit donc à une contradiction

THÉORÈME 5. — Soit $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon\geq 0}$ une famille d'applications de Ω' dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (I).

Supposons de plus que la borne supérieure $\Lambda = \operatorname{Sup}_{\psi\in\Omega'} (\theta(\psi) - \lambda(\psi))$ est atteinte en un seul point ψ_0 et que $\operatorname{Sup}_{|\psi-\psi_0|>\varepsilon} (\theta(\psi) - \lambda(\psi)) < \Lambda$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\mathrm{E}[\chi(\mathrm{X}^\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-2}\theta_\varepsilon(\mathrm{X}^\varepsilon))]}{\mathrm{E}[\exp(\varepsilon^{-2}\theta_\varepsilon(\mathrm{X}^\varepsilon))]} = \chi(\psi_0)$$

pour toute application mesurable et bornée χ de Ω' dans $\mathbb{R}$ continue au point ψ_0.

Preuve. — La preuve de ce théorème est une conséquence des résultats de Varadhan (cf. [*8*], section 3) et des estimations de Ventsel et Freidlin.

REMARQUE 6. — On pourrait se demander si la fonctionnelle

$$\omega \to \theta(\Phi(\omega)) - \mu(\omega)$$

admet toujours un maximum propre lorsque θ est continue et bornée.

La réponse est négative.

En effet, supposons que $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ et que dans l'équation (2) $x = 0$, $b = 0$, $\sigma = 1$, $T = 1$. On a donc pour tout ω, $\Phi(\omega) = \omega$.

Posons $\theta(\omega) = -2\cos(\omega(1))$.

On va montrer (Proposition 8, formule 11) que les maximums ω_0 de la fonctionnelle

$$\omega \to -2\cos(\omega(1)) - \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{\omega}(s)|^2 ds$$

doivent vérifier l'équation

$$\omega_0(t) = 2t\sin(\omega_0(1)), \qquad t \in [0, 1]$$

ou bien

$$\begin{cases} \omega_0(t) = t.\omega_0(1) \\ \omega_0(1) = 2\sin(\omega_0(1)). \end{cases}$$

Cette dernière équation n'admet que trois solutions :

$$0, \qquad \alpha \qquad \text{et} \qquad -\alpha \qquad (\alpha > 0).$$

Il est facile de voir que le maximum est atteint aux points ω_0 et $\bar{\omega}_0$ définis par

$$\omega_0(t) = \alpha t \qquad \text{et} \qquad \bar{\omega}_0(t) = -\alpha t, \qquad t \in [0, 1].$$

Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire

(II) Il existe une application h de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ solution des équations aux différentielles totales :

Pour tout (α, β) appartenant à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \sigma(h(\alpha, \beta)) \\ h(\alpha, 0) = \alpha \end{cases}$$

Cette hypothèse est automatiquement réalisée si $m = 1$.

D'après [*4*], sous l'hypothèse (II), l'application Φ de Ω_0 dans Ω'_0 admet un prolongement $\bar{\Phi}$ à l'espace $\Omega \subset C_{[0,T]}(\mathbb{R}^m)$, continu pour la topologie de la convergence uniforme.

On notera encore $\bar{\Phi} = \Phi$.

Si X^ε est la solution de l'équation (1), alors $X^\varepsilon = \Phi(\varepsilon B)$ p. s.

Le prolongement Φ est donné par la formule suivante

$$\Phi(\omega)(t) = h(D_t(\omega), \omega_t), \qquad \omega \in \Omega, \quad t \in [0, T];$$

la fonction $t \to D_t(\omega)$ étant déterminée par l'équation différentielle :

$$\begin{cases} D_t'(\omega) = \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(h(D_t(\omega), \omega_t), -\omega_t)\{b(h(D_t(\omega), \omega_t))\} \\ D_0(\omega) = x \qquad \text{Cf. [4].} \end{cases}$$

REMARQUE 7. — L'existence du prolongement continu Φ nous permet de donner une démonstration directe très simple des estimations de Ventsel et Freidlin.

En effet, soit A un borélien de $\Omega' \subseteq C_{[0,T]}(\mathbb{R}^n)$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(X^\varepsilon \in A) \underset{\text{P. s.}}{=} (\Phi(\varepsilon B) \in A) = (\varepsilon B \in \Phi^{-1}(A)).$$

Le mouvement brownien étant une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans l'espace de Banach $\Omega \subseteq C_{[0,T]}(\mathbb{R}^n)$, dont la transformée de Cramer est égale à la fonctionnelle μ, on sait que :

$$-\inf_{\omega \in \overbrace{\Phi^{-1}(A)}^{\circ}} \mu(\omega) \leq \varliminf_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P(\varepsilon B \in \Phi^{-1}(A)) \leq -\inf_{\omega \in \overline{\Phi^{-1}(A)}} \mu(\omega)$$

Cf. [1].

Or $\Phi^{-1}(\mathring{A}) \subseteq \overbrace{\Phi^{-1}(A)}^{\circ}$ et $\overline{\Phi^{-1}(A)} \subseteq \Phi^{-1}(\bar{A})$ donc

$$\inf_{\omega \in \overbrace{\Phi^{-1}(A)}^{\circ}} \mu(\omega) \leq \Lambda(\mathring{A}) \qquad \text{et} \qquad \inf_{\omega \in \overline{\Phi^{-1}(A)}} \mu(\omega) \geq \Lambda(\bar{A})$$

et on retrouve la propriété *i*) du théorème 1.

2. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Sous l'hypothèse (II), lorsque σ est de classe C^{k+1} et b de classe C^k, le théorème concernant la différentiation des solutions d'équations différentielles ordinaires par rapport à un paramètre variant dans un espace de Banach, montre que l'application Φ de l'espace de Banach $\Omega \subset C_{[0,T]}(\mathbb{R}^m)$ dans l'espace de Banach $C_{[0,T]}(\mathbb{R}^n)$ est différentiable de classe C^k.

Supposons Φ différentiable.

Soit θ une application mesurable de Ω' dans $\mathbb{R}$ et

$$\alpha_\theta = \sup_{\omega \in \Omega_0} (\theta(\Phi(\omega)) - \mu(\omega)).$$

PROPOSITION 8. — *i*) Si la borne supérieure α_θ est atteinte en un point ω_0 et si θ est quasi différentiable au point $\Phi(\omega_0)$, alors la dérivée $\dot{\omega}_0$ de ω_0 est à variation finie.

ii) Supposons que $\theta \circ \Phi$ soit deux fois différentiable et que pour tout ω appartenant à Ω_0 :

$$\theta \circ \Phi(\omega) \leq A + B\mu(\omega), \qquad B < 1$$

Soit $U_j^{(t)}$ l'élément de Ω_0 défini par

$$U_j^{(t)}(s) = e_j . s \wedge t \in \mathbb{R}^m, \qquad s \text{ et } t \in [0, T]$$

où e_j ($j = 1, \ldots, m$) désigne le $j^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

Alors si $\quad \operatorname*{Sup}_{j=1,\ldots,m} \operatorname*{Sup}_{\omega \in (\mu \leq k)} \operatorname*{Sup}_{t \in [0,T]} \| D^2(\theta \circ \Phi)(\omega)(U_j^{(t)}) \| < 1$

avec

$$k = \frac{A - \theta(\Phi(0))}{1 - B}$$

la borne supérieure α_θ est atteinte en un point ω_0 unique.

Preuve. — *i*) Puisque, au point ω_0, on a un maximum de l'application différentiable

$$\varepsilon \rightarrow \theta(\Phi(\omega_0 + \varepsilon U)) - \frac{1}{2} \int_0^T |(\dot{\omega} + \varepsilon \dot{U})(s)|^2 ds$$

où $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $U \in \Omega_0$, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \theta(\Phi(\omega_0 + \varepsilon U)) - \frac{1}{2} \int_0^T |(\dot{\omega}_0 + \varepsilon \dot{U})(s))|^2 ds \right\}_{/\varepsilon = 0} = 0$$

ou bien

(10) $\quad D(\theta \circ \Phi)(\omega_0)(U) - \displaystyle\int_0^T \dot{U}(s)\dot{\omega}_0(s) ds = 0 \qquad$ pour tout $U \in \Omega_0$.

L'égalité (10) montre, puisque $D(\theta \circ \Phi)(\omega_0)$ est une forme linéaire continue sur Ω, que la dérivée au sens des distributions de chaque composante $\dot{\omega}_0^j$ de ω_0 est une mesure et donc que $\dot{\omega}_0$ est à variation finie. Cf. [7].

ii) L'égalité (10), pour $U_j = U_j^{(t)}$, s'écrit

(11) $\quad \dot{\omega}_0^j(t) = D(\theta \circ \Phi)(\omega_0)(U_j^{(t)}), \qquad t \in [0, T] \qquad (j = 1, \ldots, m).$

D'après la proposition 4, il existe au moins un maximum ω_0 de l'application $\omega \rightarrow \theta \circ \Phi(\omega) - \mu(\omega)$.

Il vérifie donc l'équation (11). De plus

$$\theta \circ \Phi(0) \leq \alpha_\theta = \theta \circ \Phi(\omega_0) - \mu(\omega_0) \leq A + (B - 1)\mu(\omega_0)$$

donc

$$(1 - B)\mu(\omega_0) \leq A - \alpha_\theta \leq A - \theta \circ \Phi(0).$$

Si ω_1 est un autre maximum, la condition de l'énoncé entraîne, d'après le théorème des accroissements finis que :

$$|\omega_0 - \omega_1| \leq C |\omega_0 - \omega_1| \qquad \text{avec } C < 1 \quad \text{et donc que} \quad \omega_0 = \omega_1 .$$

Soient χ et θ deux applications mesurables de Ω' dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

(III) *i*) La borne supérieure $\alpha_\theta = \operatorname*{Sup}_{\omega\in\Omega_0} (\theta(\Phi(\omega)) - \mu(\omega))$ est atteinte en un point ω_0 unique.

ii) $|\chi(\Phi(\omega))| \leq K_1 \exp(K_2 |\omega|^2)$ p. s.

iii) $\theta(\Phi(\omega)) \leq L_1 + L_2 |\omega|^2$ p. s. et $L_2 < \dfrac{1}{4T}$

iv) $\theta \circ \Phi$ est semi-continue supérieurement et uniformément continue dans un voisinage de l'origine contenant la boule de rayon $2 \left| \dfrac{L_1 + 1 - \alpha_\theta}{2L_2 - 1/2T} \right|^{1/2}$.

v) $$\operatorname*{Sup}_{\substack{|\eta| < \delta \\ \eta\in\Omega}} E\left(\exp\left((1 + \varepsilon)\frac{D^2}{2}(\theta \circ \Phi)(\omega_0 + \eta)(B, B)\right)\right) < \infty$$

pour au moins un $\delta > 0$ et un $\varepsilon > 0$

THÉORÈME 9. — Sous les hypothèses (II) et (III) et si au voisinage du point ω_0, $\theta \circ \Phi$ est de classe C^k et $\chi \circ \Phi$ est de classe C^{k-2} ($k \geq 3$), on a, en notant X^ε la solution de l'équation (1) :

(12) $$\exp(-\alpha_\theta \varepsilon^{-2}) E(\chi(X^\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-2}\theta(X^\varepsilon))) = \Gamma_0 + \Gamma_1 \varepsilon + \ldots + \Gamma_{k-3}\varepsilon^{k-3} + 0(\varepsilon^{k-2}) \qquad \varepsilon \to 0$$

où

$$\Gamma_0 = \chi(\Phi(\omega_0)) E\left(\exp\left(\frac{D^2}{2}(\theta \circ \Phi)(\omega_0)(B, B)\right)\right)$$

et où les constantes Γ_i se calculent en fonction des dérivées de $\theta \circ \Phi$ et $\chi \circ \Phi$ au point ω_0.

Preuve. — Sous les conditions de l'énoncé, Schilder [*6*] a démontré la formule (12) dans le cas du mouvement brownien en dimension 1. En modifiant légèrement sa démontration (Cf. Proposition 8 *i*)) on peut voir qu'elle reste valable pour un mouvement brownien en dimension *m*.

Puisque, sous l'hypothèse (II) le processus de diffusion X^ε est indistinguable du processus $\Phi(\varepsilon B)$ on voit que la preuve du théorème 9 est immédiate car on se ramène à l'étude du mouvement brownien B grâce à la fonctionnelle Φ qui est très régulière.

La question se pose de savoir si la formule (12) reste valable sans l'hypothèse (II).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZENCOTT, Cours à Saint-Flour, *Lectures notes in Maths*. Springer, été 1978.

[2] M. D. DONSKER and S. R. S. VARADHAN, Asymptotic Evaluation of certain Markov Process Expectations for large Time III. *Comm. on pure and applied maths*, vol. **XXIX**, 1976, p. 389-461.

[3] M. D. DONSKER and S. R. S. VARADHAN, Large Deviations for Markov Processes and the Asymptotic Evaluation of Certain Markov Process, Expectations for Large Time dans « Probabilitie methods in Differential Equations », *Lecture notes in maths*, Springer, t. **451**, 1975, p. 82 à 87.

[4] H. DOSS, Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. *Annales Institut Henri Poincaré*, vol. **XIII**, n° 2, 1977, p. 99-125.

[5] K. ITO, Stochastic differentials. *Applied Math. Optimization*, t. **1**, 1975, p. 374-381.

[6] M. SCHILDER, Some asymptotic formulas for Wiener integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **125**, 1966, p. 63-85.

[7] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. Hermann, 1966.

[8] S. R. S. VARADHAN, Asymptotic probabilities and differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **1**, 1966, p. 261-286.

[9] D. W. STROOCK and S. R. S. VARADHAN, *On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle*. 6th. Berkeley Symposium, vol. **III**, 1972.

[10] A. D. VENTSEL and M. I. FREIDLIN, On small random perturbations of dynamical systems. *Russian Math. surveys*, vol. **XXV**, 1970, p. 1-55.

(Manuscrit reçu le 19 octobre 1979)