

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. CABANE

Sur les transformations linéaires modulo un

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, n° 2 (1979), p. 187-193

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_2_187_0

© Gauthier-Villars, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les transformations linéaires modulo un

par

R. CABANE (*)

RÉSUMÉ. — Pour les transformations de la forme $Tx = \beta x + \alpha \text{ mod. } 1$, avec $\beta > \sqrt{2}$ ou $\beta < -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, nous étudions le support de la mesure invariante, et prouvons l'ergodicité et l'existence d'une partition faiblement Bernoulli, ce qui généralise des résultats déjà connus pour $\beta > 2$.

ABSTRACT. — We consider the transformation $Tx = \beta x + \alpha \text{ mod. } 1$, with $\beta > \sqrt{2}$, or $\beta < -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. We describe the support of the invariant measure, and then prove its ergodicity and weak bernoullicity. These results are known for $\beta > 2$.

INTRODUCTION

Nous étudions ici les transformations linéaires modulo un, définies par : $Tx = \beta x + \alpha \text{ mod. } 1$, avec $|\beta| > 1$ et $0 \leq \alpha < 1$. Leur étude remonte à Renyi [1] et Parry [2] qui a construit, pour $\beta > 1$ une probabilité μ T-invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m . De plus, quand μ charge les ouverts, $\frac{d\mu}{dm}$ est bornée supérieurement et inférieurement, et c'est le cas pour $\beta > 2$.

(*) 24, Avenue Lombart, 92260 Fontenay-aux-Roses, France.

Nous décrivons ici le support de μ pour $\beta > \sqrt{2}$ et pour $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

D'autre part, Smorodinsky [3] et Wilkinson [4] ont prouvé que (T, μ) est faiblement Bernoulli pour $\beta > 2$. Nous prouvons ce résultat pour $|\beta| > \sqrt{2}$ en faisant appel à des théorèmes dûs à Kowalski, Ratner et Bowen.

Énoncé du théorème

Pour α et β vérifiant : $0 \leq \alpha < 1$ et $|\beta| > 1$ nous définissons une transformation de $[0, 1]$ par $Tx = \beta x + \alpha \pmod{1}$. Soit m la mesure de Lebesgue ; il existe, d'après [6] une mesure μ , absolument continue (par rapport à m) sur $[0, 1]$, et T -invariante. Notons J le support de μ , et Q la partition de $[0, 1]$ déduite des discontinuités de T .

Nous aurons besoin de la condition suivante :

(A) T a un point fixe P tel que : si $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, on a : $T^{-1}\{P\} = \{P\}$; si $\beta > \sqrt{2}$, on a : $T^{-1}\{P\} = \{P\}$, ou : $T^{-1}\{P\} = \{P, 0\}$, ou : $T^{-1}\{P\} = \{P, 1\}$.

THÉORÈME 1. — *i)* La mesure μ est l'unique probabilité T -invariante absolument continue ; elle est T -ergodique, et son support J est une union finie d'intervalles fermés.

ii) Si $\beta > \sqrt{2}$, ou $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, et que (A) est vérifiée, alors J est formé de deux intervalles disjoints. Si $\beta > \sqrt{2}$, ou $\beta < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, et que (A) n'est pas vérifiée, alors on a : $J = [0, 1]$.

iii) Si $|\beta| > \sqrt{2}$ le système (T, Q, μ) est faiblement Bernoulli ([4]).

iv) Pour tout β tel que $1 < |\beta| \leq \sqrt{2}$, il existe α tel que (T, μ) ne soit pas faiblement mélangeant.

v) Il existe β et α tels que : $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \leq \beta \leq -\sqrt{2}$, et que J soit composé de trois intervalles disjoints.

Démonstration de (i)

Rappelons les résultats suivants : $[0, 1]$ est une union disjointe de $n(\beta)$ ouverts T -invariants et T -ergodiques (D est T -invariant si $TD = D$ m-p. s. et D est T -ergodique si $F \subset D$ et $T^{-1}F = F$ m-p. s. impliquent $m(F) = 0$

ou $m(F) = m(D)$; $n(\beta)$ est plus petit que le nombre de discontinuités de T . (Kowalski [7] théorème 1).

Si D est T -invariant et T -ergodique, l'intérieur de $D \cap J$ est de la forme $\bigcup_0^\infty T^n I$, où I est un intervalle ouvert assez petit contenant une certaine discontinuité (Kowalski [8] théorème 2).

Alors, si D_1 et D_2 sont deux ouverts T -invariants et T -ergodiques disjoints, on a : $J \cap D_1 = \bigcup_0^\gamma T^n I_1$ p. s. et $J \cap D_2 = \bigcup_0^\alpha T^n I_2$ p. s.; or $T I_1$ et $T I_2$ contiennent un voisinage de 0, et $D_1 \cap D_2$ est non vide. Ainsi $n(\beta) = 1$, donc $[0, 1]$ est T -ergodique. Par conséquent, μ est l'unique probabilité T -invariante absolument continue par rapport à m ; et elle est ergodique pour T .

L'intérieur de J est donc de la forme : $\bigcup_0^\infty T^n I$. Par suite, $\overset{\circ}{J}$ est non vide, et contient $T\overset{\circ}{J}$ ainsi que 0 et 1. Soient J' et J'' les deux intervalles de $\overset{\circ}{J}$ qui contiennent 0 et 1, et $f = \inf \{ m(J'), m(J'') \}$. Soit N l'union des intervalles de $\overset{\circ}{J}$ dont la longueur est supérieure ou égale à f . On a : $TN \subset N$. En effet, l'image d'un intervalle contenant une discontinuité se trouve dans $J' \cup J''$, et les autres sont dilatés par T . Ainsi N est inclus dans $T^{-1}N$, et par ergodicité on a : $N = J$ μ -p. s. Finalement J est, comme N , une union finie d'intervalles.

Démonstration de (ii)

LEMME 1. — La condition (A) équivaut à l'une des conditions suivantes :

$$(A_2) \quad \beta > \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 1/\beta \leq \alpha \leq (-\beta^2 + 3\beta - 1)/\beta$$

$$(A'_2) \quad \beta < -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \text{et} \quad -(\beta^2 + \beta - 1)/\beta < \alpha < -1/\beta.$$

Preuve. — Si $\beta > 1$, le point fixe de T est $P = (1 - \alpha)/(\beta - 1)$ et (A) est vérifiée lorsque P est adhérent à un intervalle où T^{-1} est définie. Ce n'est possible que si $T1 \leq P \leq T0$, soit encore : $1/\beta \leq \alpha \leq (-\beta^2 + 3\beta - 1)/\beta$. Si $\beta < -1$ il y a deux ou trois points fixes $P_1 = \alpha/(1 - \beta)$, $P_2 = (1 + \alpha)/(1 - \beta)$ et éventuellement $P_3 = (2 + \alpha)/(1 - \beta)$ (quand T a deux discontinuités, soit $\alpha < -1 - \beta$). S'il y a deux discontinuités, on vérifie que $T^{-1} \{ P_1 \}$ et $T^{-1} \{ P_3 \}$ sont formés chacun de deux points, et que $T^{-1} \{ P_2 \} = \{ P_2 \}$

équivaut à (A'_2) . S'il y a une discontinuité $\beta < -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ implique que $P_1 > T1$ et $P_2 < T0$, ce qui exclut (A).

LEMME 2. — La condition (A) implique que J^c est non vide.

Preuve. — Le point fixe P appartient à l'adhérence d'un intervalle où T^{-1} est définie. Pour c assez petit, et $L = (P - c, P + c)$, ou éventuellement $(P, P + c)$ ou $(P - c, P)$, au cas où une égalité a lieu dans (A_2) , on a : $T^{-1}L \subset L$.

Cela ne peut se produire si $J = [0, 1]$.

LEMME 3. — Si $\beta > \sqrt{2}$, ou $\beta < -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, J est constitué de deux intervalles au plus.

Preuve. — (a) Étudions d'abord le cas où T a deux discontinuités. Posons :

$$J = J' \cup J'' \cup J_1 \cup J_2 \cup \bigcup_{k>2} J_k,$$

où J_1 et J_2 contiennent les discontinuités (si les deux discontinuités sont dans J_1 , $TJ_1 = J_1 = [0, 1]$). Si $i > 2$, on a : $m(TJ_i) = |\beta| m(J_i)$. Nous avons vu plus haut que $TJ \subset J$, et donc $TJ = J$ comme support de μ .

Ainsi, si $i > 2$, il existe k différent de i , tel que : $TJ_i = J_k$, tandis que $T(J_1 \cup J_2) = J' \cup J''$. Le nombre d'intervalles devant se conserver, tout J_i est de la forme $T^q J'$ ou $T^q J''$, et il existe n et p tels que : $J_1 = T^n J'$, et $J_2 = T^p J''$, par exemple.

Dès lors, on a :

$$\begin{aligned} m(J_1) &= |\beta|^n m(J'), \quad m(J_2) = |\beta|^p m(J''), \\ m(J' \cup J'') &= m(J') + m(J'') \geq |\beta|^{n+1} m(J') = m(TJ_1). \end{aligned}$$

De même on a :

$$m(J') + m(J'') \geq |\beta|^{p+1} m(J''),$$

d'où :

$$(*) (|\beta|^{n+1} - 1)(|\beta|^{p+1} - 1) \leq 1.$$

Comme $|\beta| > \sqrt{2}$, on a nécessairement $((\sqrt{2})^{n+1} - 1)((\sqrt{2})^{p+1} - 1) \leq 1$, soit $p = 0$ et $n \leq 2$, ou inversement. En conjuguant éventuellement par $\xi : x \rightarrow 1 - x$, on peut supposer $p = 0$.

Nous distinguons à présent différents cas.

(a₀) Si $|\beta| > \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, (*) implique $n = p = 0$, soit $J = J' \cup J''$.

(a₁) Si $\sqrt{2} < \beta \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, $p = 0$ et $n = 1$, on a $J_1 = TJ'$.

Les discontinuités ne peuvent être dans J' , car l'image de J' est un inter-

valle. On a donc : $T0 = \inf TJ' = \alpha < (1 - \alpha)/\beta$ ce qui est incompatible

avec : $(2 - \alpha)/\beta < 1$ et $\beta \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

(a₂) Si $\sqrt{2} < \beta < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, $p = 0$ et $n = 2$, on a : $J_1 = T^2J'$.

TJ' se place entre J_1 et J'' , car on a vu que nécessairement $T0 \geq (1 - \alpha)/\beta$.
On a :

$$T1 \in J', T^21 \in TJ', T^31 \in J_1.$$

Par conséquent : $T0 = \alpha > T^31$, d'où : $\alpha < (-\beta^3 + 2\beta^2 + 1)/(\beta + \beta^2)$. Par ailleurs, $T^20 = \inf J_1$, d'où : $T^30 \in J''$.

Enfin, P ne peut appartenir à J'' car : $TJ'' \subset J' \cup J''$, d'où : $P < T^30$. Ceci implique :

$$\alpha > (\beta^2 - \beta + 1)/\beta^3$$

Comme $\beta < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, les deux inégalités sont contradictoires.

Il ne reste en fin de compte que le cas $n = 0$, soit : $J = J' \cup J''$.

(b) Dans le cas où T n'a qu'une discontinuité, on a cette fois :

$$J = J' \cup J'' \cup J_1 \cup \bigcup_{k>2} J_k,$$

et, comme en (a), $J_1 = T^nJ' = T^pJ''$, ce qui entraîne l'inégalité (*), et de nouveau $p = 0$ et $n \leq 2$, ou inversement.

(b₀) Si $|\beta| > \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, $n = p = 0$ et $J = J' \cup J''$.

(b₁) Si $\sqrt{2} < \beta < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ et $p = 0, n \leq 2$, J_1 contient l'extrémité de $[0, 1]$

la plus proche de la discontinuité : sinon on aurait : $J_1 \cup TJ_1 = [0, 1]$ et $n = 0$. Si par exemple 1 est dans J_1 , on a : $J' = [0, T1]$ et $TJ' = [T0, T^21]$. TJ' rencontre nécessairement J'' , donc $n = 0$ et $J = J' \cup J''$, ce qui achève la preuve du lemme 3.

On déduit alors (ii) des lemmes précédents. En effet, comme 0 et 1 sont dans J, si J^c est non vide, c'est nécessairement un intervalle, et le point fixe P s'obtient par : $\bigcap_n \overline{T^{-n}J^c}$, d'où :

$$T^{-1} \{ P \} = \bigcap_n T^{-1}(\overline{T^{-n}J^c}) \subset \bigcap_n \overline{T^{-n}J^c} \cup \{ 0, 1 \} = \{ P, 0, 1 \}.$$

En examinant les différents cas, on obtient bien la condition (A).

Démonstration de (iii)

Nous utilisons ici le théorème 7 de Ratner [5], selon lequel (T, P, μ) est faiblement Bernoulli si (T, μ) est totalement ergodique. D'après le théorème 1 de Kowalski [7], déjà cité, T^n ne sera pas ergodique si le support de μ se décompose en plusieurs ouverts T^n -invariants et T^n -ergodiques disjoints, soit :

$$\overset{\circ}{J} = \bigcup_{i=1}^{i=m} D_i.$$

On vérifie aisément que T réalise une permutation sur les D_i ; d'autre part, on obtient ainsi une décomposition de $\overset{\circ}{J}$ en intervalles (éventuellement contigus). Comme plus haut, on montre qu'il s'agit d'une union finie d'intervalles, soit :

$$\overset{\circ}{J} = K' \cup K'' \cup K_1 \cup K_2 \cup \bigcup_{i>2} K_i;$$

le même argument relatif aux longueurs s'applique, d'où : $K_1 = T^s K'$, $K_2 = T^s K''$, $t = 0$, $s \leq 2$ (ou inversement). Alors $K_1 = K'$ rencontre TK_1 , ce qui impose $m = 1$. T^n est ainsi ergodique.

Démonstration de (iv) (exemple communiqué par W. Parry)

Pour $1 < \beta < \sqrt{2}$ on prend $\alpha = 1 - \beta/2$, $P_1 = \beta/2(\beta + 1) = T^2 P_1$, et c assez petit, de sorte que si $E = (P_1 - c, P_1 + c)$ et $F = (TP_1 - c, TP_1 + c)$, alors $T^{-1}E \subset F$ et $T^{-1}F \subset E$. On a donc : $J = J_1 \cup J' \cup J''$, avec $TJ_1 = J' \cup J''$, $TJ' = TJ'' = J_1$. Donc -1 est valeur propre de T . Pour $\beta = \sqrt{2}$ et $\alpha = 1 - \sqrt{2}/2$ on vérifie directement que T^2 n'est pas ergodique.

Pour $-\sqrt{2} < \beta < -1$ on prend $\alpha = -\beta/2$ et $E = (P_1 - c, P_1 + c)$, $F = (P_2 - c, P_2 + c)$, P_1 et P_2 étant les deux points fixes, d'où la même conclusion. Pour $\beta = -\sqrt{2}$, la vérification est la même que pour $\beta = \sqrt{2}$.

Démonstration de (v)

On prend $\beta = -1,5$ et $\alpha = 0,2$, pour lesquels :

$$E = (T^2 1, T1) \cup (T^3 0, T^2 0)$$

vérifie : $T^{-1}E \subset E$; J^c est formé de deux intervalles au moins.

Le théorème est ainsi démontré.

REMERCIEMENTS

Je suis très reconnaissant à M. François Ledrappier pour ses encouragements inlassables.

RÉFÉRENCES

- [1] A. RENYL, Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, t. **8**, 1957, p. 477-493.
- [2] W. PARRY, Representations for real numbers. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, t. **15**, 1964, p. 95-105.
- [3] M. SMORODINSKY, β -automorphisms are Bernoulli. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, t. **24**, 1973, p. 273-278.
- [4] K. M. WILKINSON, Ergodic properties of certain linear modulo one transformations. *Adv. in Math.*, t. **14**, 1974, p. 64-72.
- [5] M. RATNER, Bernoulli flows over maps of the interval. *Israel Journal of Math.*, t. **31**, 1978, p. 298-313.
- [6] A. LASOTA, Y. YORKE, On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **186**, 1973, p. 481-488.
- [7] Z. S. KOWALSKI, Invariant measures for piecewise monotonic transformations, 1975, Springer Lecture Notes 472, 77-94.
- [8] Z. S. KOWALSKI, Some remarks about the invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math.*, t. **25**, n° 1, 1977, p. 7-12.
- [9] R. BOWEN, Bernoulli maps of the unit interval. *Israel Journal of Math.*, t. **28**, 1977, p. 161-168.

(Manuscrit reçu le 4 avril 1979)