ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. ROUSSEAU-EGELE

La loi forte des grands nombres pour les processus harmonisables

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 2 (1979), p. 175-186

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_2_175_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section **B** :
Vol. XV, n° 2, 1979, p. 175-186. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

La loi forte des grands nombres pour les processus harmonisables

par

J. ROUSSEAU-EGELE
Laboratoire de probabilités, Université de Rennes

RÉSUMÉ. — Soit $(X_t)_{t \in R}$ un processus de second ordre, centré, de fonction de covariance $r(s, t)$. Notons $\sigma_T X = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X_t dt$. Pour une classe donnée de processus, quelles conditions *minimales* portant *uniquement* sur le comportement asymptotique de la fonction de *covariance* (ou sur la mesure spectrale si elle existe), faut-il imposer pour avoir la loi forte des grands nombres (L. F. G. N.), i. e. $\sigma_T X \to 0$ p. s.?

Ce problème a été résolu d'une part par Gàl et Koksma lorsqu'on se restreint à la classe des processus *quasi-stationnaires* et par Gapochkine pour celle des processus *stationnaires.* Nous montrons dans cet article que pour la classe des processus *harmonisables* (classe intermédiaire entre les cas « stationnaires » et « quasi-stationnaires ») les choses se « passent comme » dans le cas stationnaire. On répond ainsi à une question de Blanc-Lapierre.

L'outil central pour cette étude nous semble être le lemme de majoration élémentaire (lemme *2*) inspiré de Gàl et Koksma.

ABSTRACT. — Let $(X_t)_{t \in R}$ be a second order process, centered, with covariance function $r(s, t)$. Let $\sigma_T X = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X_t dt$. For a given class of processes, what *minimal* condition can one put solely on the asymptotic behaviour of the *covariance* function (or the *spectral measure,* if it exists) to obtain the strong law of large numbers (S. L. L. N.)?

Annales de l'Institut Henri Poincaré-Section B-Vol. XV, 0020-2347/1979/175/$ 4,00/

This problem was solved by Gàl and Koksma for the class of *quasi-stationary* processes and by Gaposhkin for the class of stationary processes. We show in this paper, that, for the S. L. L. N., the case of the *harmonisable* processes (intermediate between the « stationary » and « quasi-stationary » ones), looks like the case of the stationary processes. This answers a question of Blanc-Lapierre. The central tool for this study seems to be the elementary estimation (Lemma 2) inspired of Gàl and Koksma.

INTRODUCTION

On considère une mesure stochastique Z, c'est-à-dire une application qui à tout borélien borné A de $\mathbb{R}$, fait correspondre une variable aléatoire Z(A) que l'on suppose de moyenne nulle, de variance finie, et telle que si A est l'union disjointe de boréliens A_i, alors on ait

$$Z(A) = \sum_{i=1}^{\infty} Z(A_i)$$

l'égalité et la convergence de la série étant prises au sens de L^2 (en moyenne quadratique).

Supposons que

$$(1) \qquad EZ(A)\overline{Z(B)} = \int_{\lambda \in A}\int_{\mu \in B} dF(\lambda, \mu)$$

où F est une mesure complexe, bornée, dans le plan.

Si de plus,

$$(2) \qquad \int\int c(\lambda)\overline{c(\mu)} dF(\lambda, \mu) \geq 0$$

pour toute fonction continue c, à support compact, alors on peut définir un processus aléatoire (X_t), $t \in R$, centré, continu en moyenne quadratique, tel que :

$$(3) \qquad X_t = \int e^{it\lambda} dZ(\lambda)$$

et qui a pour fonction de covariance :

$$(4) \qquad r(s, t) = EX_s\bar{X}_t = \int\int e^{is\lambda - it\mu} dF(\lambda, \mu)$$

Inversement, si (X_t) est donné, de covariance $r(s, t)$, vérifiant (4), où F est une mesure bornée vérifiant (2), alors le processus (X_t) est représenté par (3), où Z est une mesure stochastique vérifiant (1).

Un processus (X_t) possédant ces propriétés sera dit *harmonisable* et F sera la *mesure spectrale* du processus (X_t). Des indications sur ce type de processus sont données dans [*4*], [*8*], [*7*] et [*3*].

Remarquons que les processus stationnaires (au sens large) constituent une sous-classe des processus harmonisables. Ce sont ceux pour lesquels Z est à accroissements orthogonaux :

$$EZ(A)\overline{Z(B)} = 0 \qquad \text{si} \qquad A \cap B = \phi$$

Il est équivalent de dire que la fonction de covariance $r(s, t)$ ne dépend que de $s - t$, ou encore que la mesure F est concentrée sur la diagonale

$$r(s, t) = r(s - t) = \int e^{i(s-t)\lambda} dF(\lambda)$$

On se propose de donner des critères suffisants, « non améliorables », portant uniquement sur la mesure F (ou la fonction de covariance) pour que la loi forte des grands nombres soit vérifiée. Dans le cas harmonisable, il y a dans [*2*] une condition du type suivant :

$$(5) \quad F(]-\lambda, \lambda[^2) = 0\left(\left(\log \frac{1}{|\lambda|}\right)^{-2-\varepsilon}\right), \qquad \text{pour un } \varepsilon > 0, |\lambda| \to 0 .$$

Dans le cas stationnaire, Gapochkine [*6*] a donné des conditions beaucoup plus faibles du type suivant :

$$(6) \quad F(]-\lambda, \lambda[) = 0\left(\left(\log \log \frac{1}{|\lambda|}\right)^{-2-\varepsilon}\right), \qquad \text{pour un } \varepsilon > 0, |\lambda| \to 0 .$$

De plus, il construit un contre-exemple, montrant que pour $\varepsilon = 0$ la L. F. G. N. n'est pas en général vérifiée. Il donne aussi d'autres formes à (6), en particulier celles faisant intervenir la covariance, et montre que la condition (6) s'étend aux champs aléatoires stationnaires.

On peut s'intéresser, indépendamment de la notion de processus harmonisable, à une classe plus large de processus :

un processus (X_t) centré, continu en moyenne quadratique, sera dit *quasi-stationnaire* si

$$(7) \qquad \operatorname*{Sup}_{S} E \left| \frac{1}{2T} \int_{S-T}^{S+T} X_t dt \right|^2 \leq \Phi(T)$$

où Φ est une fonction positive décroissante, tendant vers 0 quand $T \to \infty$.

On peut aussi donner une définition plus forte portant sur la fonction de covariance [*6*].

Pour ce type de processus, Gàl-Koksma [*5*] ont montré qu'une condition suffisante pour obtenir la L. F. G. N. était

$$(8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n} < \infty \quad \left(\text{cas continu } \int_1^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt < \infty\right)$$

[La condition (8), correspond dans le cas harmonisable à :

$$\mathrm{F}(] - \lambda, \lambda[^2) = 0\left(\left(\log \frac{1}{|\lambda|}\right)^{-1-\varepsilon}\right), \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0, |\lambda| \to 0 .]$$

Lorsque la série (ou l'intégrale) dans (8) est infinie, on peut toujours trouver un processus (X_t) vérifiant (7) et tel que la L. F. G. N. ne soit pas vérifiée (cf. [*6*]).

Nous nous proposons de montrer ici, que pour un processus harmonisable, la L. F. G. N. est vérifiée avec une condition du type (6). La démonstration s'inspire de la méthode de Gapochkine et la simplifie. (Pour ce problème, harmonisable apparaît donc comme proche de stationnaire et comme nettement plus particulier que quasi-stationnaire).

LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES

Soit (X_t) un processus, on note

$$(9) \qquad \sigma_{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{X}_t dt ,$$

les moyennes de X_t sur $[-\mathrm{T}, \mathrm{T}]$.

Il est bien connu que

si X_t est un processus harmonisable, alors $\sigma_{\mathrm{T}}\mathrm{X}$ tend vers $\mathrm{F}(0, 0)$ en moyenne quadratique, où F est la mesure spectrale associée à (X_t).

1. **Préliminaires**

PROPOSITION I. — *Soit* (X_t) *un processus tel que* $\mathrm{E}\,|\,\mathrm{X}_t\,|^2 \leq \mathrm{C}^2 < \infty$, *pour tout s et t. Alors on a :*

$$(10) \qquad \lim_{n \to \infty} \sup_{n < \mathrm{T} < n+1} |\,\sigma_{\mathrm{T}}\mathrm{X} - \sigma_n\mathrm{X}\,| = 0 \quad \text{p. s.}$$

Preuve. — Un calcul simple montre que :

$$|\sigma_T X - \sigma_n X|^2 \leq 2\left(\frac{T-n}{T}\right)^2 \left[\left| \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} X_t dt \right|^2 \right] + \left[\frac{1}{T} \int_{-T}^{-n} |X_t| \, dt \right]^2 + \left[\frac{1}{T} \int_{n}^{T} |X_t| \, dt \right]^2$$

d'où

$$E \sup_{n<T<n+1} |\sigma_T X - \sigma_n X|^2 \leq \frac{6C^2}{n^2}$$

Comme

$$\sum_n E \sup_{n<T<n+1} |\sigma_T X - \sigma_n X|^2 < \infty ,$$

on en déduit (10).

La proposition I permet une première réduction : nous étudierons par la suite la L. F. G. N., pour des moyennes indexées par les entiers positifs.

Soit maintenant un entier p tel que :

$$2^p < n \leq 2^{p+1}$$

L'on peut écrire :

$$\sigma_n X = \sigma_n X - \sigma_{2^p} X + \sigma_{2^p} X ,$$

On va donc chercher des conditions pour que

(11) $$\sigma_n X - \sigma_{2^p} X \to 0 \quad \text{p. s.}$$

(12) $$\sigma_{2^p} X \to 0 \quad \text{p. s.}$$

Lorsque X est harmonisable (ou stationnaire) on verra que l'estimation en log log n'intervient que pour (12).

2. Lemme de majoration

Notations. — p est ici fixé.

Tout entier $n \in]2^p, 2^{p+1}]$ peut s'écrire d'une manière unique

$$n = 2^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \varepsilon_i 2^{p-i}$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ est une suite de 0 et de 1.

Alors, à tout entier n donné de $]2^p, 2^{p+1}]$ (i. e. à toute suite

$$(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}) \in \{ 0, 1 \}^p),$$

on peut associer la suite (finie) :

$$a_k = a_k(n) = a_k((\varepsilon)) = 2^p + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i 2^{p-i}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p \,;\, a_0 = 2^p$$

des approximations inférieures de n à 2^{p-k-1} près.

On peut remarquer en particulier que :

$$2^p + 1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_p = n,$$

et que pour k fixé $a_k((\varepsilon))$ ne dépend en fait que de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$.

LEMME 2. — *Soient (z_j) une suite de nombres complexes et (t_k) une suite de nombres réels positifs. Alors on a :*

$$(13) \quad \max_{2^p < n \leq 2^{p+1}} \left| \sum_{j=2^p+1}^{n} z_j \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} t_k^{-1} \right) \left(\sum_{k=1}^{p} t_k \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \{0,1\}^k} \left| \sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} z_j \right|^2 \right)$$

Preuve. — Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \sum_{j=2^p+1}^{n} z_j \right| \leq \sum_{k=1}^{p} \left| \sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} z_j \right| = \sum_{k=1}^{p} t_k^{-1/2} t_k^{1/2} \left| \sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} z_j \right|,$$

d'où à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{j=2^p+1}^{n} z_j \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} t_k^{-1} \right) \left(\sum_{k=1}^{p} t_k \left| \sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} z_j \right|^2 \right)$$

L'inégalité (13) s'obtient en prenant le maximum dans le membre de gauche de l'inégalité précédente, pour $2^p < n \leq 2^{p+1}$ et en majorant le membre de droite par la somme des valeurs que peut prendre $\left| \sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} z_j \right|^2$ quand n varie de $2^p + 1$ à 2^{p+1}.

3. Cas quasi-stationnaire

PROPOSITION 3 : [5]. — *La L. F. G. N. pour un processus quasi-stationnaire (X_t) est satisfaite si $\int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt < \infty$, où ϕ vérifie* (7).

Preuve. — On a :

$$\sigma_n X - \sigma_{2^p} X = \sum_{j=2^p+1}^{n} (\sigma_j X - \sigma_{j-1} X)$$

et donc d'après le lemme 2, et en reprenant ses notations :

$$(14) \quad E[\max_{2^p < n \leq 2^{p+1}} |\sigma_n X - \sigma_{2^p} X|^2]$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{p} t_k^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{p} t_k 2^k \max_{(\varepsilon)\in\{0,1\}^k} E|\sigma_{a_k} X - \sigma_{a_{k-1}+1} X|^2\right)$$

Pour vérifier (11), il suffit de montrer que le membre de droite de (14) est le terme général d'une série convergente.
Or un calcul simple montre que :

$$E|\sigma_b X - \sigma_a X|^2 \leq C\left(\frac{b-a}{b}\right)^2 \phi(b-a) \qquad (a < b)$$

Si l'on choisit $t_k = q^k$ avec $1 < q < 2$, la condition de série devient :

$$(15) \qquad \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{q}{2}\right)^k \phi(2^{p-k}) < \infty$$

Comme $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q}{2}\right)^k < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi(k)}{k} < \infty$ et ϕ décroissante, on a :

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{q}{2}\right)^k \phi(2^{p-k}) = 0(\phi(2^{\left[\frac{p}{2}\right]})) + 0\left(\left(\frac{q}{2}\right)^{\left[\frac{p}{2}\right]}\right)$$

d'où (15) et donc (11). (Ici on utilise le fait que $\sum_n u_n < \infty$ si et seulement si $\sum_p 2^p u_{2^p} < \infty$, lorsque u est monotone).

Enfin

$$E|\sigma_{2^p} X|^2 \leq \phi(2^p)$$

d'où

$$\sum_p E|\sigma_{2^p} X|^2 \leq \sum_p \phi(2^p) < \infty$$

et la condition (12) est ainsi vérifiée.

4. Cas harmonisable

PROPOSITION 4. — *Soit* (X_t) *un processus harmonisable. Alors on a*

$$\lim_{p\to\infty} \max_{2^p<n\leq 2^{p+1}} |\sigma_n X - \sigma_{2^p} X| = 0 \quad \text{p. s.},$$

Preuve. — On procède comme pour la démonstration de la proposition 4, mais ici les majorations de $E|\sigma_b X - \sigma_a X|^2$ seront plus fines de façon à éviter une condition du type (8).

On a :

$$(16) \qquad E|\sigma_b X - \sigma_a X|^2 = \iint \left(\frac{\sin \lambda b}{\lambda b} - \frac{\sin \lambda a}{\lambda a}\right)\left(\frac{\sin \mu b}{\mu b} - \frac{\sin \mu a}{\mu a}\right) dF(\lambda, \mu)$$

Le domaine d'intégration de (16) est découpé en rectangles définis par les droites d'équations $\lambda = \pm \frac{1}{2^p}$, $\mu = \pm \frac{1}{2^p}$, $\lambda = \pm \frac{1}{2^{p-k}}$, $\mu = \pm \frac{1}{2^{p-k}}$. Sur chacun des rectangles, on vérifie que la série d'indice p, définie par la formule (14), est convergente.

Comme, pour $a < b$, on a :

$$(17) \qquad \left|\frac{\sin \lambda b}{\lambda b} - \frac{\sin \lambda a}{\lambda a}\right| \leq C|\lambda|(b-a), \qquad \text{si } b|\lambda| < 1.$$

$$(18) \qquad \left|\frac{\sin \lambda b}{\lambda b} - \frac{\sin \lambda a}{\lambda a}\right| \leq C\left(\frac{b-a}{b}\right), \qquad \text{pour tout } \lambda.$$

$$(19) \qquad \left|\frac{\sin \lambda b}{\lambda b} - \frac{\sin \lambda a}{\lambda a}\right| \leq \frac{C}{|\lambda| a}, \qquad \text{pour tout } \lambda.$$

(C est une constante et par la suite nous noterons toutes les constantes par C).

Par exemple, étudions l'un des 6 cas :

$$\int_{|\lambda|<\frac{1}{2^p}} \int_{|\mu|\geq\frac{1}{2^{p-k}}} \left(\frac{\sin \lambda b}{\lambda b} - \frac{\sin \lambda a}{\lambda a}\right)\left(\frac{\sin \mu b}{\mu b} - \frac{\sin \mu a}{\mu a}\right) dF(\lambda, \mu)$$

(où $a = a_k$ et $b = a_{k+1}$).

Cette intégrale est majorée en valeur absolue par :

$$C2^{-k} \int_{|\lambda|<\frac{1}{2^p}} \int_{|\mu|\geq\frac{1}{2^{p-k}}} \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| |dF(\lambda, \mu)|$$

En prenant, comme précédemment $t_k = q^k (1 < q < 2)$, il suffit de voir que

$$\sum_{k=1}^{p} q^k \int_{|\lambda| < \frac{1}{2^p}} \int_{|\mu| \geq \frac{1}{2^{p-k}}} \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| | dF(\lambda, \mu) |$$

est le terme général d'une série convergente.

Ceci se fait aisément en utilisant le fait que F est une mesure bornée. L'on procède de même pour les cinq autres cas, d'où la proposition 4.

THÉORÈME 5. — *Soit* (X_t) *un processus harmonisable. Alors la L. F. G. N. est vérifiée si :*

$$\text{(20)} \quad F(]-\lambda, \lambda[^2) = 0\left(\frac{1}{\left(\log \log \frac{1}{|\lambda|}\right)^{2+\varepsilon}}\right) \quad \text{pour un } \varepsilon > 0, \ |\lambda| \to 0 .$$

Preuve. — D'après la proposition 4, il ne reste plus à voir que (12).

On a

$$\sigma_{2^p} X = \sigma_{2^p} X - \int_{|\lambda| < \frac{1}{2^p}} dZ(\lambda) + \int_{|\lambda| < \frac{1}{2^p}} dZ(\lambda)$$

où Z est la mesure stochastique associée à (X_t).

On obtient :

$$\text{(21)} \quad \sigma_{2^p} X = \int_{|\lambda| < \frac{1}{2^p}} \left(\frac{\sin 2^p \lambda}{2^p \lambda} - 1\right) dZ(\lambda) + \int_{|\lambda| < \frac{1}{2^p}} \frac{\sin 2^p \lambda}{2^p \lambda} dZ(\lambda) + \int_{|\lambda| \geq \frac{1}{2^p}} dZ(\lambda)$$

Comme on a :

$$\text{(22)} \quad \left| \frac{\sin a\lambda}{a\lambda} - 1 \right| \leq Ca|\lambda|, \quad \text{si} \quad a|\lambda| < 1 .$$

$$\text{(23)} \quad \left| \frac{\sin a\lambda}{a\lambda} \right| \leq \frac{C}{a|\lambda|}, \quad \text{pour tout} \quad \lambda .$$

On conclut facilement, en utilisant les techniques de séries de la proposition 4, que les deux séries déterminées par les deux premières intégrales du membre de droite de (21) sont convergentes. Donc :

$$\int_{|\lambda| < \frac{1}{2^p}} \left(\frac{\sin 2^p \lambda}{2^p \lambda} - 1\right) dZ(\lambda) \to 0 \quad \text{p. s.}$$

et

$$\int_{|\lambda| \geq \frac{1}{2^p}} \frac{\sin 2^p\lambda}{2^p\lambda} dZ(\lambda) \to 0 \quad \text{p. s.}$$

Il reste le point essentiel de la démonstration qui est de voir que

$$\int_{|\lambda| < \frac{1}{2^p}} dZ(\lambda) \to 0$$

sous la condition (20)

On a :

$$\int_{|\lambda| < \frac{1}{2^p}} dZ(\lambda) = \sum_{j=p}^{\infty} Z(V_j)$$

où

$$V_j = \left\{ \frac{1}{2^{j+1}} \leq |\lambda| < \frac{1}{2^j} \right\}$$

Il est donc équivalent de montrer que la série de terme général $Z_j = Z(V_j)$ converge p. s.

Tout d'abord cette série ΣZ_j converge évidemment dans L^2, vers une variable aléatoire que nous noterons S. Nous allons voir que $\sum_{j=1}^{m} Z_j$ converge aussi p. s. vers S. Procédons pour cela en deux temps :

Il est facile de voir que $\sum_{j=1}^{2^{p'}} Z_j$ converge p. s. vers S quand p' tend vers l'infini, en effet :

$$E \left| S - \sum_{j=1}^{2^{p'}} Z_j \right|^2 = F\left(\left] -\frac{1}{2^{2^{p'}+1}}, \frac{1}{2^{2^{p'}+1}} \right[^2 \right)$$

est le terme général d'une série convergente grâce à l'hypothèse (20).

Il reste maintenant à montrer que :

$$\max_{2^{p'} < m \leq 2^{p'+1}} \left| \sum_{j=2^{p'}+1}^{m} Z_j \right| \to 0 \quad \text{p. s.}$$

ce qui sera réalisé si l'on montre que l'espérance du carré de cette variable aléatoire est le terme général d'une série convergente.

Or ceci résulte du lemme 2, appliqué à $\{ Z_j \}$ et à $t_k = 1$ pour tout k :

$$E \left| \max_{2^{p'} < m \leq 2^{p'+1}} \left| \sum_{j=2^{p'}+1}^{m} Z_j \right|^2 \right| \leq p' \sum_{k=1}^{p'} \left(\sum_{(\varepsilon) \in \{0,1\}^k} E \left| \sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} Z_j \right|^2 \right)$$

Mais :

$$E \left| \sum_{j=a_{k-1}+1}^{a_k} Z_j \right|^2 = F\left(\left\{ \frac{1}{2^{a_k}} \leq |\lambda| < \frac{1}{2^{a_{k-1}+1}} \right\}^2 \right)$$

Si l'on note F_k le maximum de ces quantités pour $(\varepsilon) \in \{ 0, 1 \}^k$, on obtient que la quantité étudiée est majorée par $p' \sum_{k=1}^{p'} 2^k F_k$. Et la condition (20) entraîne alors facilement du fait que

$$2^{p'} < a_k \leq a_{k+1} < 2^{p'+1} \text{ et que } a_{k+1} - a_k = \begin{cases} 0 \\ 2^{p'-k} \end{cases}$$

que c'est le terme général d'une série convergente.

On a donc démontré la convergence p. s. de la série ΣZ_j, donc la L. F. G. N.

Remarques. — 1. Lorsque (X_t) est stationnaire, la démonstration se simplifie : Z est à accroissements orthogonaux, donc $\sum_j Z_j$ est une série orthogonale ; elle converge, d'après le théorème de Rademacher-Menchoff si $\sum_j F(V_j) \log^2 j < \infty$, cf. [*1*].

2. Le théorème 5 n'est plus valable lorsque $\varepsilon = 0$, puisqu'il existe même des contre-exemples dans le cas stationnaire, comme l'a démontré Gapochkine à l'aide du théorème de Tandori, cf. [*6*], [*1*].

3. On peut donner diverses variantes de la condition (20) : par exemple :

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T r(s, t) ds dt = 0 \left(\frac{1}{(\log \log T)^{2+\varepsilon}} \right) (T \to \infty)$$

En fait, la condition (20) pourrait être remplacée par une décroissance en

$$\frac{1}{\left(\log \log \frac{1}{|\lambda|} \right)^2} \frac{1}{\left(\log_3 \frac{1}{|\lambda|} \right)^{1+\varepsilon}}, \ \varepsilon > 0 .$$

La raison en est que la condition utilisée en fait est $\Sigma F(V_j \times V_j) \log^2 j < \infty$.

Nous nous sommes contentés de (20) pour simplifier un peu les calculs.

Pour examiner les relations entre ces divers types de conditions, il suffit de procéder comme dans [*2*] et [*6*].

Note sur épreuve :

V. F. Gapochkine dans *Math. USSR Sbornik*, Vol. **33** (1977), n° 1 (traduction *AMS*, 1979) indique en particulier la L. F. G. N. pour les processus harmonisables. La présentation est assez différente, mais les méthodes utilisent à peu près les mêmes idées.

RÉFÉRENCES

[*1*] G. ALEXITS, *Convergence problems of orthogonal series*. Pergamon Press, 1961.

[*2*] A. BLANC-LAPIERRE, *Problèmes liés à la détermination des spectres de puissance en théorie des fonctions aléatoires*. 8e conf. Prague. Théorie information..., 1978, p. 11-25.

[*3*] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson Paris, 1953.

[*4*] H. CRAMER, *A contribution to the theory of stochastic processes*. Proc. Second Berkeley Symposium, 1951, p. 329-339.

[*5*] I. GAL et J. KOKSMA, *Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables*. Proc. Kon. Nat. Akad. v. Wetensch., t. **53**, 1950, p. 638-653.

[*6*] V. GAPOCHKINE, *Critères de validité de la loi forte des grands nombres pour des classes de processus stationnaires au sens large et pour des champs aléatoires homogènes*. Teor. Ver. prim., t. **XXII**, vol. 2 (en russe), 1977, p. 295-318.

[*7*] U. GRENANDER et M. ROSENBLATT, *Statiscal analysis of stationary time series*. J. Wiley, 1957.

[*8*] M. LOEVE, *Fonctions aléatoires du second ordre*. Supplément au livre de P. Lévy : *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[*9*] J. ROUSSEAU-EGELE, *La loi forte des grands nombres pour des suites stationnaires*. Séminaire de probabilités II, Rennes, 1977.