

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALBERT TORTRAT

Second complément sur le support des lois indéfiniment divisibles

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, n° 3 (1978), p. 349-354

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_3_349_0

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Second complément sur le support des lois indéfiniment divisibles

par

Albert TORTRAT

Laboratoire de probabilités associé au C. N. R. S.,
n° 224, Université Pierre-et-Marie Curie

SUMMARY. — The support S_μ of any infinitely divisible law (of Poisson type)

i) is always a semi-group — in the case of \mathbb{R}^1 (finite dimensional linear space)

ii) in the case of a general linear space, or of an abelian metrisable locally compact group, is invariant by translations of the S_M support of the Lévy-measure M generating μ .

1. INTRODUCTION

Considérons une loi μ du type $e(M)$, dans l'espace vectoriel topologique localement convexe (X, \mathcal{C}) , de dual Y . S_μ et S_M désignent les supports respectifs de μ et M , et $G(M)$ désigne (notations de [1]) le demi-groupe additif *fermé* engendré par S_M .

a) La proposition 4 de [3] assure :

$$(1) \quad S_\mu = G(M)$$

(pour le centrage qui donne

$$\hat{\mu}(y) = \int (e^{i(y,x)} - 1) dM,$$

sous les conditions suivantes :

i) les semi-normes P_U définissant la topologie $\bar{\mathcal{C}}$, localement convexe, vérifient :

$$(2) \quad \int_{p_U \leq 1} p_U(x) dM(x) < \infty$$

(on suppose $M(X)$ infini),

ii) μ est faiblement de Radon.

ii) a pour but d'assurer l'existence de M dans X (sur \mathbb{B}_σ tribu borélienne pour $\sigma = \sigma(X, Y)$).

b) Limitons nous maintenant au cas où X est espace de Banach. Dans le cas (contraire à a)) « avec translations », nous nous sommes attachés dans [3] à des conditions permettant de prouver plus : que S_μ égale le support linéaire topologique X_0 commun à μ et M , en général strictement plus grand que $G(M)$.

Si l'on est moins exigeant, il est très simple de prouver que S est invariant par $G(M)$, c'est-à-dire :

$$(3) \quad s \in S_\mu \Rightarrow x + S_M \subset S_\mu, \quad \text{ou } S_\mu + G(M) \subset S_\mu.$$

Il est clair que (3) vaut aussi dans le cas a).

Le même résultat vaut dans un groupe localement compact, abélien et métrisable (cf. le § 4). Auparavant nous prouverons que dans \mathbb{R}^1 (X de dimension finie I), S_μ est toujours (à une translation près) un demi-groupe (contenant 0, et bien sûr en général plus grand que $G(M)$), et préciserons un peu sa nature.

2. CAS DE $X = \mathbb{R}^1$

Pour chaque coordonnée $y_i(x) = x^{(i)}$, partageons \mathbb{R} en $t \geq 0$ et $t < 0$. \mathbb{R}^1 est ainsi partagé en 2^1 « quadrants » Q_t :

$$\mathbb{R}^1 = \sum_1^{2^1} Q_t.$$

Il est clair que si la restriction à Q_t de M , soit M_t , définit une loi $\mu_t = e(M_t)$ dont le support est un demi-groupe G_t , alors

$$(4) \quad S_\mu \text{ est la fermeture de } \sum_1^{2^1} G_t$$

(somme vectorielle), est un demi-groupe.

THÉOREME 1. — Soit M une mesure de Lévy portée par le quadrant $Q^{(1)}$. Alors, pour un centrage convenable, le support S_μ de la loi $e(\mu)$ est demi-groupe. Plus précisément, $|x|$ étant une norme de R^1 ,

i) Il existe un sous-espace E de X , de dimension I_0 , tel que pour $|x| \leq \eta$, M soit portée par E .

ii) Le support S^η de $e(M^\eta)$, pour M^η restriction de M à $|x| \leq \eta$, est le produit d'un espace $R^{I'}$ $\subset E$ par un quadrant de dimension $I_0 - I'$ contenu dans $E \cap Q$.

iii) S_μ est donc la somme vectorielle de S^η et de $\{o \cup G(M_\eta)\}$, M_η étant la restriction de M à $|x| > \eta$.

Preuve de i). — Le sous-espace de R^1 engendré par le support de M^η , décroît avec η , sa dimension $I(\eta)$ décroît donc vers I_0 lorsque $\eta \downarrow 0$. I_0 est nul si et seulement si S_M ne contient pas 0 (reste à une distance positive de 0, alors M est bornée et $S_\mu = o \cup G(M)$). Sinon nous obtenons le sous-espace E susdit.

Preuve de ii). — Plaçons-nous dans E , et soit $\alpha < \eta$. Le voisinage $|x| \leq \alpha$ de 0 contient I_0 points de S_M , soit $P_{\alpha i}$ linéairement indépendants, de normes $> \alpha'(\alpha)$. Le support de $e(M_\alpha^\eta)$ (M_α^η est la restriction de M^η à $|x| > \alpha'$)

contient, dans le quadrant $E \cap Q$, tous les points du « réseau » $\sum_1^{I_0} n_i P_{\alpha i}$

($n_i \geq 1$), et aucun point P de $E \cap Q$ n'est à une distance $> I_0 \alpha$ d'un point de ce réseau (puisque la i -ème coordonnée — suivant les $P_{\alpha i}$ — diffère de moins de $|P_{\alpha i}| \leq \alpha$, d'un $n_i |P_{\alpha i}|$).

Désignons alors par I' l'ensemble des indices des coordonnées y'_i (choisies dans E et fixes) que n'intègre pas M^η (coordonnées qui nécessitent une translation $-c_{\alpha' i}$ pour $e(M_\alpha^\eta)$, translation $\downarrow -\infty$ lorsque $\alpha' \downarrow 0$; pour les $I_0 - I'$ coordonnées restantes nous ne feront pas de translation

$$\left(: \hat{\mu}(y'_i) = \int (e^{i(y'_i, x)} - 1) dM \right).$$

Il est clair que lorsque $\alpha' \downarrow 0$, le réseau ci-dessus a pour fermeture le produit des R_i , $i \in I'$, concernées, par celui des R_j^+ (demi-droites du quadrant $Q \cap E$) pour lesquelles $j \in I_0 - I'$.

Remarque 1. — Il n'est nullement nécessaire que M soit infinie pour

(¹) La preuve qui suit ne fera pas intervenir le caractère fermé ou ouvert de Q au voisinage de ses divers éléments de frontière.

que S_μ soit un sous-espace de X . Le théorème 5 de [3] en donne un exemple assez général. Pour que $S_\mu = \mathbb{R}^I$, il suffit que dans I directions indépendantes S_M contiennent les points $c_n \downarrow kc$ et $c'_n \uparrow -k'c$ ($n = 1, 2, \dots$, tous $c > 0$, k et k' entiers, variant avec la direction).

3. L'INVARIANCE DE S_μ PAR S_M DANS UN ESPACE VECTORIEL « QUELCONQUE »

Revenons aux conditions de l'introduction : \mathcal{C} est définie par les seminormes p_U et on suppose que X est « réductible » pour la loi μ donnée sur la tribu cylindrique \mathcal{C} :

$$(5) \quad X_0 = \{ x : y(x) = 0, \text{ tout } y \mu\text{-p. s. nulle} \},$$

$$(6) \quad \mu_{\mathcal{C}}^* X_0 = 1.$$

S_μ est alors bien défini, dans X_0 (cf. [3], p. 29) par :

$$(7) \quad S_\mu = \bigcap_U \pi_U^{-1} S(\mu_U),$$

π_U étant la projection de X_0 sur l'espace normé séparable X_U quotient de X_0 par $\{ x : p_U(x) = 0 \}$, et S_U le support de la loi μ_U image de μ par π_U .

Nous ne connaissons l'existence de M_U comme mesure (σ -additive) que dans les complétés \hat{X}_U . Cela suffit à définir (dans X_0) S_M à partir des traces sur les X_U des supports dans X_U , traces notées $S(M_U)$.

$$(8) \quad S_M = \bigcap_U \pi_U^{-1} S(M_U).$$

THÉORÈME 2. — Pour toute loi $\mu = e(M)$, dans (X, \mathcal{C}) réductible pour μ (X de topologie localement convexe), le support S_μ est invariant par toute translation $b \in S_M$, S_M étant défini par (8).

Preuve. — a) Plaçons-nous d'abord dans \hat{X}_U , dont nous désignons la boule unité par \hat{U} , et par M (au lieu de M_U) et $\hat{\mu}_U = e(M)$ les mesures correspondantes. Suivant [3] (proposition 3, p. 33), on a (avec des $a_n = a(\eta_n)$ convenables).

$$(9) \quad S(\hat{\mu}_U) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \{ G(M_{\eta_n}) - a_n \},$$

quelle que soit la suite $\eta_n \downarrow 0$.

Dans (9) \lim est entendue au sens topologique (cf. ci-après) et est auto-

matiquement fermée (ce que nous avons utilisé sans le dire dans [3]): si t est un nombre positif (arbitrairement petit) on a :

$$(10) \quad x \in S(\hat{\mu}_U)$$

équivalent à $t\hat{U} + x$ coupe une infinité de $G(M_{\eta_n}) - a_n$.

Il est clair que si $b \in S(M)$, donc à un $S(M_{\eta_0})$, et si x satisfait à (10), il en est de même de $x + b$, $G(M_\eta)$ étant invariant par les translations de M_{η_0} dès que $\eta \leq \eta_0$.

b) Il en est de même, évidemment, pour les traces sur X_U et $b \in X_U$, c'est-à-dire les $S(M_U)$ de (8), et μ_U . Si donc $b \in (8)$ et $x \in (7)$, chaque $x_U + b_U$ (projection de $x + b$ sur X_U) appartient à $S(\mu_U)$ donc $x + b \in S_\mu$, ce qui prouve le théorème.

4. CAS OÙ X EST UN GROUPE ABÉLIEN MÉTRISABLE LOCALEMENT COMPACT

Tout ce qui concerne ce cas a été magistralement étudié en 1963 (cf. [2]).

μ est de Radon, M aussi mais n'est pas unique, sauf si μ se plonge dans un demi-groupe continu (pour la convergence des lois μ^t), auquel cas μ n'admet aucun facteur idempotent, ou, ce qui est équivalent, n'est invariante par aucune translation.

Alors la convergence des $e(M_\eta)_{-a_\eta}$ (lois $e(M_\eta)$ translatées de $-a_\eta$) ne correspond plus (si μ admet le facteur idempotent m_K loi de Haar sur le sous-groupe compact K) à une convergence en probabilité d'une série à

termes indépendants $\sum_1^\infty \zeta_i$, utilisée pour la proposition 3 de [3].

Cela n'est pas gênant, car (comme dans [2]), on se ramène à ce cas en se plaçant dans le quotient X/K . On peut aussi éviter ce quotient, en utilisant comme dans [1], le lemme de Yuan et Liang, plus général que la proposition 3 de [3], qui affirme (pour $\overline{\lim}$ au sens ensembliste), le $\bar{\ }^{-}$ désignant la fermeture,

$$(11) \quad S_\mu = \bar{\cap} \left\{ \bigcup_n S(\mu_{\eta_n}) \right\}^{-}, \quad \text{avec } \mu_\eta = e(M_\eta)_{-a_\eta},$$

si $\mu_n \rightarrow \mu$ et μ_η divise μ .

La formulation (11) est équivalente à (9), mais les conditions concernant $\mu_\eta \rightarrow \mu$ sont moins restrictives.

THÉORÈME 3. — Pour toute loi μ indéfiniment divisible sans composante

gaussienne (donc du type $e(M)$), le support S_μ est invariant par toute translation $b \in S_M$, S_M étant le support de la mesure de Lévy M . Ceci a lieu pour toute mesure M représentant μ .

Preuve. — Suivant [2], et notant y (au lieu de e^{by}) les « caractères », éléments du dual de X , on a :

$$(12) \quad \text{Log } \hat{\mu}(y) = \int \{ y(x) - 1 - iy(x, y) \} dM(x).$$

Dans (12) le terme, tronqué à $|x| > \eta$ ($|x| = \text{distance de } x \text{ à } 0$), $-iy(x, y)dM$ correspond toujours à la translation $-a_\eta$.

Soit donc $x \in S_\mu$ et $b \in S_M$. Le raisonnement prouvant que $x + b \in S_\mu$ est alors exactement le même qu'au théorème 3.

Remarque 2. — C. Berg, pour le cas de μ plongeable dans le semi-groupe fermé μ' a émis l'hypothèse que (comme dans \mathbb{R}^1 , au § 2), S_μ soit toujours (après centrage) un demi-groupe.

Cela est assuré pour un groupe du type $Z^J \times K$ (Z des entiers relatifs, K groupe compact) car on est dans le cas « sans translation », ou pour le type $\mathbb{R}^1 \times Z^J$ (car M est finie hors de \mathbb{R}^1). Le problème reste ouvert, par exemple, dans le cas $\mathbb{R}^1 \times Z^J \times K$.

Remarque 3. — Dans la remarque finale de [1], L. Brockett ne mentionne pas cet aspect (3) de la validité pour un groupe (au lieu d'un espace de Hilbert), seulement celle de (1).

RÉFÉRENCES

- [0] C. BERG, On the support of the measures in a symmetric convolution semi-group. *Math. Z.*, t. **148**, 1976, p. 141-146.
- [1] P. L. BROCKETT, Supports of infinitely divisible measures on Hilbert space. *The Annals of Probability*, t. **5**, 1977, p. 1012-1017.
- [2] PARTHASARATHY, RAO and VARADHAN, Probability distributions on locally compact groups. *Illinois J. Math.*, t. **7**, 1963, p. 337-369.
- [3] A. TORTRAT, Sur le support des lois indéfiniment divisibles dans les espaces vectoriels localement convexes. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **XXIII**, 1977, p. 27-43 et 293-298.

(Manuscrit reçu le 9 mars 1978)