

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. HILICO

## Mesures aléatoires stationnaires sur un espace produit

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 14, n° 1 (1978), p. 25-31

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1978\\_\\_14\\_1\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_1_25_0)

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Mesures aléatoires stationnaires sur un espace produit

par

**Mme C. HILICO**

Université de Dijon. Département de Mathématiques.  
Laboratoire de Probabilités

---

Dans cet article, nous unifions les théories des mesures de Palm d'un processus marqué et d'un couple de processus, qui sont définis chacun comme des mesures aléatoires sur le produit avec lui-même d'un groupe localement compact  $G$ .

Lorsque  $G$  n'est pas compact, la propriété d'intensité conditionnelle finie, pour les processus secondaires, se présente comme une condition nécessaire et suffisante pour que le processus de superposition des secondaires soit intégrable.

This work attempts to unify the theory of Palm's measures of marked point process and the similar theory for bivariate point processes on an abelian compact group  $G$ .

The property of finiteness of conditional intensity is necessary and sufficient for the integrability of a branching point process when  $G$  is not compact.

$G$  désigne un groupe abélien localement compact à base dénombrable,  $\mathcal{G}$  sa tribu borélienne et  $\lambda$  la mesure de Haar (unique à une constante multiplicative près). Nous rappelons quelques résultats classiques sur l'espace  $M$  des mesures positives localement finies sur  $G \times G$ .

1)  $M$  est polonais ; la tribu borélienne  $\mathcal{M}$  coïncide avec la tribu rendant mesurables les applications

$$\mu \rightarrow \mu(A) ; \quad A \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$$

L'ensemble  $N$  des mesures ponctuelles simples est mesurable.

2) Si  $P$  est une probabilité sur  $M$  la formule

$$P * \mu(f) = \int_{M \times G \times G} f(\mu, x, y) \mu(dx, dy) P(d\mu)$$

où  $f$  est une fonction non négative,  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$  mesurable, définit une mesure  $P * \mu$  sur  $M \times G \times G$ ,  $\sigma$ -finie si pour tout compact  $K$  de  $G \times G$ , la mesure moyenne de  $K$  est finie :

$$P * \mu(M \times K) = E[\mu(K)] < \infty$$

Au groupe des translations de  $G$ , nous associons deux groupes de translations de  $G \times G$ ,  $\tau_t$  « parallèles à la première bissectrice » et  $\sigma_t$  « parallèles au second espace facteur » :

$$\tau_t(x, y) = (x - t, y - t) \quad \sigma_t(x, y) = (x, y - t)$$

Si  $\mu$  est un élément de  $M$ , notons  $\hat{\tau}_t \mu$  et  $\hat{\sigma}_t \mu$  les images de  $\mu$  par les translations  $\tau_t$  et  $\sigma_t$  respectivement ; alors  $\hat{\tau}_t$  et  $\hat{\sigma}_t$  forment deux groupes de bijections bimesurables.

3) Si  $P$  est une probabilité sur  $M$  ne changeant pas  $\Delta_0$ , la mesure nulle sur  $G$ , alors  $P$  est  $\hat{\tau}_t$  invariante (resp.  $\hat{\sigma}_t$ ) si et seulement si  $P * \mu$  est  $(\tau_t, \hat{\tau}_t)$  invariante (resp.  $\hat{\sigma}_t, \sigma_t$ ).

Nous noterons systématiquement  $\hat{\Phi}\alpha$  l'image par  $\Phi$  de la mesure  $\alpha$ .

**PROPOSITION 1.** — *La bijection  $\varphi$  de  $G \times G : \varphi(x, y) = (x + y, y)$  établit une correspondance bijective  $\hat{\varphi}$  entre les probabilités  $Q$  sur  $M$ , invariantes par  $\hat{\sigma}_t$  et les probabilités  $P$  sur  $M$ , invariantes par  $\hat{\tau}_t$  ; de plus*

$$(\hat{\varphi}, \varphi)(Q * \mu) = \hat{\varphi}Q * \mu = P * \mu$$

L'image par  $\varphi$  du groupe  $\sigma_t$  est le groupe  $\tau_t$  et l'on a

$$\varphi \circ \sigma_t = \tau_t \circ \varphi$$

Il est alors aisé de montrer, pour toute fonction  $f$ ,  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$  mesurable l'identité

$$\int f(\mu, x, y) \mu(dx, dy) P(d\mu) = \int f(\hat{\varphi}\mu, x + y, y) \mu(dx dy) Q(d\mu)$$

Les trois lemmes suivants seront utiles

**LEMME 1.** — *Soient  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  deux espaces topologiques,  $E_1$  polonais ;  $m$  une mesure positive  $\sigma$ -finie sur  $E_1 \times E_2$ . Soit  $K_n$  une suite d'éléments de  $\mathcal{E}_2$  telle que  $\bigcup_n K_n = E_2$ ,  $m(E_1 \times K_n) < \infty$ .*

Il existe sur  $E_2 \times \mathcal{E}_1$  une application  $\tilde{m}$  à valeur dans  $[0, 1]$  qui est  $\mathcal{E}_2$ -mesurable pour tout  $A \in \mathcal{E}_1$  fixé et une probabilité sur  $\mathcal{E}_1$  pour  $e_2 \in E_2$  fixé telle que

$$m(A \times B) = \int_B \tilde{m}(e_2, A) dm_2(e_2)$$

où  $m_2$  désigne la mesure image, par la projection  $p$ , de  $m$  sur  $E_2$

$$p(e_1, e_2) = e_2 \quad m_2 = \hat{p}(m)$$

Ce lemme est une extension facile du théorème de Jirina [Hanan I].

LEMME 2. —  $T_1$  et  $T_2$  désignent respectivement deux bijections de  $E_1$  et  $E_2$  mesurables et  $S = (T_1, T_2)$  la bijection associée sur  $E_1 \times E_2$ .

Si  $m$  est  $S$ -invariante,  $m_2$  est  $T_2$ -invariante et  $m_2$  presque partout

$$\tilde{m}(e_2, A) = \tilde{m}(T_2 e_2, T_1 A) \quad (A \in \mathcal{E}_1).$$

LEMME 3. — Résultat classique.  $E$  est un espace mesurable ;  $G$  un groupe abélien localement compact à base dénombrable. Soit  $\rho$  une mesure sur  $E \times G$   $\sigma$ -finie positive invariante par les translations parallèles à  $G$

$$\sigma_t(e, y) = (e, y - t)$$

Il existe une mesure  $\sigma$ -finie  $\pi$  sur  $E$  telle que

$$\rho = \pi \otimes \lambda$$

où  $\lambda$  est la mesure de Haar de  $G$ .

### I. PROCESSUS MARQUÉS. MESURE DE PALM

$(K, \mathcal{K})$  désigne un espace polonais. On appelle processus ponctuel sur  $G$ , marqué par  $K$ , une probabilité  $Q$  sur  $M(K \times G)$ . Il est dit stationnaire lorsque  $Q$  est invariante par  $\hat{\sigma}_t(\sigma_t(k, y) = (k, y - t))$ .

On suppose dans la suite que l'espace des marques est  $G$  lui-même mais cela n'apparaît pas comme une restriction.

PROPOSITION 2. — Soit  $Q$  une mesure sur  $M$  et  $\rho$  la projection de  $Q * \mu$  sur  $G \times G$  :

$$\rho(\cdot) = E[\mu(\cdot)]$$

Il existe sur  $G \times G \times \mathcal{M}$  une fonction  $\tilde{Q}(x, y; A)$  qui est une probabilité

pour tout couple  $(x, y)$  fixé et  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$  mesurable pour  $A \in \mathcal{M}$  fixé, telle que :

$$\forall f \geq 0 \quad \mathcal{M} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \text{ mesurable}$$

$$\int_{\mathbf{M} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}} f(\mu, x, y) \mu(dx, dy) Q(d\mu) = \int_{\mathbf{M} \times \mathbf{G} \times \mathbf{G}} f(\mu, x, y) \tilde{Q}(x, y; d\mu) \rho(dx, dy)$$

Lorsque la mesure  $Q$  est  $\hat{\sigma}_t$  invariante, la mesure  $\rho$  est  $\sigma_t$  invariante ;  $\rho$  est le produit d'une mesure  $\pi$   $\sigma$ -finie sur  $G$  par la mesure de Haar

$$\rho = \pi \otimes \lambda$$

et  $\forall t$   $\rho$  presque partout

$$\tilde{Q}(x, y, A) = \tilde{Q}(x, y + t, \hat{\sigma}_t A) \quad A \in \mathcal{M}.$$

Ce résultat s'obtient en appliquant les lemmes 1 et 2 avec

$$E_2 = G \times G \quad E_1 = M \quad m = Q * \mu \quad \rho = \hat{p}(m)$$

**PROPOSITION 3.** — Soit  $Q$  une mesure sur  $M$  invariante par  $\hat{\sigma}_t$ . L'application  $y \rightarrow \tilde{Q}(x, y, \hat{\sigma}_{-y} A)$  est pour  $\pi$  presque tout  $x$ ,  $\lambda$  presque partout constante.

L'ensemble  $\{(x, y, t) \in G^3; \tilde{Q}(x, y, A) \neq \tilde{Q}(x, y - t, \hat{\sigma}_t A)\}$  est mesurable, de mesure  $\rho \otimes \lambda$  nulle.

Soit  $E_{(x,y)} = \{t \in G; \tilde{Q}(x, y, A) = \tilde{Q}(x, y - t, \hat{\sigma}_t A)\}$ .

Le complémentaire de  $E_{(x,y)}$  est pour  $\rho$  presque tout couple  $(x, y)$  de mesure  $\lambda$  nulle. Soit  $N$  cet ensemble négligeable. Pour deux couples  $(x, y)$ ,  $(x, y')$  n'appartenant pas à  $N$ , soit  $z = y' - y$ .

$E_{(x,y)} \cap E_{(x,y')} - z$  a un complémentaire de mesure  $\rho$  nulle. Il existe donc un couple  $(t, t') \in G^2$  avec

$$t \in E_{(x,y)} \quad t' \in E_{(x,y')} \quad \text{et} \quad t' - t = z.$$

alors

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(x, y; \hat{\sigma}_{-y} A) &= \tilde{Q}(x, y - t; \hat{\sigma}_{-y+t} A) \\ &= \tilde{Q}(x, y' - t', \hat{\sigma}_{-y'+t'} A) = \tilde{Q}(x, y', \hat{\sigma}_{-y'} A) \end{aligned}$$

La fonction  $Q(x, A)$  définie par la valeur constante  $\tilde{Q}(x, y, \hat{\sigma}_{-y} A)$ , pour  $\pi$  presque tout  $x$ , devient une fonction mesurable de la première coordonnée si l'on pose  $Q(x, A) = Q(A)$  sur l'ensemble d'exception.

**PROPOSITION 4.** — Soit  $Q$  une mesure sur  $M$ ,  $\hat{\sigma}_t$  invariante. Si  $\theta$  désigne la bijection bimesurable de  $M \times G \times G$ ,  $\theta(\mu, x, y) = (\hat{\sigma}_y \mu, x, y)$ , l'image par  $\theta$  de la mesure  $Q * \mu$  s'identifie à la mesure produit  $\tilde{Q} \otimes \lambda$  où  $\tilde{Q}$  désigne la mesure (de Palm associée à  $Q$ ) sur  $M \times G$  définie par :

$$\tilde{Q}(A \times B) = \int_B Q(x, A) \pi(dx)$$

Par définition de la fonction  $Q(x, A)$ , on a aisément la suite d'égalités :

$$\int f(\mu, x, y)\mu(dx, dy)Q(d\mu) = \int f(\mu, x, y)\check{Q}(x, y, d\mu)\rho(dx, dy) = \int f(\hat{\sigma}_{-y}\mu, x, y)Q(x, d\mu)\rho(dx, dy)$$

**L'intensité conditionnelle**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$  un espace de probabilité tel que  $\Omega$  soit polonais.  $\theta_t, t \in G$  désigne un groupe de bijections bimesurables de  $\Omega$  laissant  $Q$  invariante et  $\mu$  une mesure aléatoire ponctuelle localement finie sur  $G \times G$ , stationnaire

$$\mu(\theta_t\omega) = \sigma_t[\mu(\omega)]$$

Alors  $\mu$  peut s'écrire sous la forme  $\mu(\omega; dx, dy) = \mu_2(\omega, dy)\mu_y(\omega, dx)$  où  $\mu_2$  est une mesure aléatoire ponctuelle simple localement finie sur  $G$  et  $\mu_y$  une famille mesurable de mesures ponctuelles localement finie sur  $G$  (marque de  $y$ ). Puisque  $\mu$  est stationnaire,  $\mu_2$  est stationnaire et  $\mu_y$  est complètement déterminée par la donnée de  $\mu_0$  (marque de  $0 \in G$ )

$$\mu_y(\omega) = \mu_0(\theta_y\omega)$$

On peut alors écrire la mesure  $\check{Q}$  de Palm sur  $\Omega \times G$  du processus ponctuel marqué [ $\beta$  Neveu St Flour]

$$\check{Q}(d\omega, dx) = \check{Q}_2(d\omega) * \mu_0(dx)$$

où  $\check{Q}_2$  est la mesure de Palm du processus ponctuel  $\mu_2$ .

La mesure  $\pi$  sur  $G$  est alors identifiée à l'intensité conditionnelle de  $\mu_0$  :

$$E_{\check{Q}_2}[\mu_0(\cdot)] = \pi(\cdot)$$

**PROPOSITION 5.** — *Soit  $Q$  une mesure sur  $M$ ,  $\hat{\sigma}_t$  invariante. La mesure  $\pi$  sur  $G$  (définie dans la proposition 2) est finie si, pour tout compact  $K$  de  $G$ , et seulement s'il existe un compact de  $G$  de mesure de Haar positive*

$$E[\mu(G \times K)] < \infty$$

Ceci résulte de l'égalité  $\rho = \pi \otimes \lambda$ . Si  $\lambda$  désigne la projection de  $\rho$  sur le second espace facteur alors  $\pi$  est de masse totale égale à 1.

Lorsque  $\rho(G \times K) < \infty$  pour tout compact  $K$  de  $G$ , les lemmes 1 et 2 en place de 3 donnent l'existence de  $\pi$  comme probabilité sur  $G$ .

## II. COUPLE DE DEUX PROCESSUS PONCTUELS STATIONNAIRES

Une étude analogue à celle du paragraphe I, dans le cas d'une probabilité  $P$  sur  $M$  invariante par  $\hat{\tau}_t$ , conduit à des résultats que l'on peut également trouver de la manière qui suit.

Soit  $P$  une probabilité sur  $M$ ,  $\hat{\tau}_t$  invariante. Désignons par  $\mathbb{H}$  la bijection de  $M \times G \times G : \mathbb{H}(\mu, x, y) = (\hat{\tau}_y \mu, x - y, y)$ .

Alors l'égalité  $\mathbb{H} \circ (\hat{\varphi}, \varphi) = (\hat{\varphi}, 1_{G \times G}) \circ \theta$  permet d'écrire pour toute fonction  $f$  non négative  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$  mesurable :

$$\begin{aligned} \int f(\mu, x, y) \mu(dx, dy) P(d\mu) &= \int f(\hat{\varphi} \mu, x + y, y) \mu(dx, dy) Q(d\mu) \\ &= \int f(\hat{\varphi}_0 \hat{\sigma}_{-y} \mu, x + y, y) Q(x, d\mu) \rho(dx, dy) \\ &= \int f(\hat{\tau}_{-y} \circ \hat{\varphi} \mu, x + y, y) Q(x, d\mu) \rho(dx, dy) \end{aligned}$$

où  $Q$  désigne la mesure dont  $P$  est l'image par  $\hat{\varphi}$ .

Notons pour tout  $x$  fixé  $P_2(x, \cdot)$  la mesure image par  $\hat{\varphi}$  de  $Q(x, \cdot)$  alors l'égalité précédente devient

$$\int f(\mu, x, y) \mu(dx, dy) P(d\mu) = \int f(\hat{\tau}_{-y} \mu, x + y, y) P_2(x, d\mu) \rho(dx, dy)$$

Si  $m$  désigne la projection de  $P * \mu$  sur  $G \times G$ , il est aisé d'écrire :

$$\hat{\varphi}(\rho) = m \quad \text{soit} \quad m(A \times B) = \int_B \pi(A - y) \lambda(dy)$$

où  $\rho$  est la projection de  $Q$  sur  $G \times G$  et  $\rho = \pi \otimes \lambda$ .

On peut alors énoncer la proposition suivante :

**PROPOSITION 6.** — *Soit  $P$  une probabilité sur  $M$ ,  $\hat{\tau}_t$  invariante. Il existe sur  $G \times \mathcal{M}$  une probabilité de transition  $P_2(x, A)$  et une mesure  $\pi$   $\sigma$ -finie sur  $G$ , telles que l'image par  $\mathbb{H} : (\mu, x, y) \rightarrow (\tau_y \mu, x - y, y)$  de la mesure  $P * \mu$  s'écrive :*

$$\hat{\mathbb{H}}(P * \mu) = \check{P}_2 \otimes \lambda \quad \check{P}_2(A \times B) = \int_B P_2(x, A) \pi(dx) \quad A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{G}$$

$P_2(x, A)$  est la fonction  $P^{00}$  [dans Harris 4].

*Remarque.* — Il existe sur  $M \times G$  une mesure unique  $\check{P}_1$  telle que  $\check{P}_1 \otimes \lambda$  soit l'image de  $P * \mu$  par la composition  $\hat{S} \circ \hat{\Phi}$  où

$$\Phi(\mu, x, y) = (\hat{\tau}_x \mu, x, y - x) \quad \text{et} \quad S(\mu, x, y) = (\hat{s} \mu, s(x, y))$$

avec  $s(x, y) = (y, x)$

La mesure  $\check{P}_1$  est l'image par l'application  $(\mu, x) \rightarrow (\hat{\tau}_x \circ \hat{s} \mu, -x)$  de la mesure  $\check{P}_2$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité,  $\Omega$  polonais,  $\theta_t$  un groupe de bijection de  $\Omega$  laissant  $P$  invariante. Une mesure ponctuelle  $\mu$  sur  $G \times G$  localement finie s'écrit :

$$\mu(\omega; dx, dy) = \mu_2(\omega, dy) \hat{\tau}_y \mu_1(\theta_{-y} \omega, dx)$$

où  $\mu_2$  est une mesure ponctuelle simple sur  $G$  et  $\mu_1$  une mesure ponctuelle localement finie. Lorsque  $\mu_1$  est  $\theta_t$  invariante, on dit que  $\mu$  est un couple de processus ponctuels.

1) La mesure  $\pi$  sur  $G$  est l'intensité conditionnelle de  $\mu_1$  [Neveu 2, 3]

$$\pi(\cdot) = E_{\check{P}_2}[\mu_1(\cdot)]$$

On suppose que  $G = \mathbb{R}$  (ou que  $G$  n'est pas compact).

2) La projection  $\alpha$  de  $\mu$  sur le premier espace facteur est intégrable soit  $E(\alpha(01)) < \infty$ , si et seulement si la mesure  $\pi$  est finie. Cette opération coïncide avec la superposition des processus secondaires.

Si  $\alpha$  est la projection de  $\mu$  sur le premier espace facteur

$$f \geq 0 \quad \mathcal{G}\text{-mesurable} \quad \int f(x) \alpha(dx) = \int \tilde{f}(x, y) \mu(dx dy)$$

avec  $\tilde{f} = f \circ p \quad p(x, y) = x.$

$$E \int f(x) \alpha(dx) = \int \tilde{f}(x + y, y) \lambda(dy) \pi(dx) = \int f(x + y) \lambda(dy) \pi(dx)$$

$E[\alpha(f)] = \lambda \circledast \pi(f)$  où  $\circledast$  désigne la convolution.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HANEN, Mesures aléatoires stationnaires et mesure de Palm. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, n° 3, t. **IX**, p. 311.
- [2] NEVEU, Sur les mesures de Palm de deux processus ponctuels stationnaires. *Z. f. W.*, t. **34**, 1976, p. 199-203.
- [3] NEVEU, Processus ponctuels stationnaires. École de Saint-Flour. *Lect. Notes Springer*, t. **598**, 1976, p. 249-447.
- [4] HARRIS, Random measures and notions of point processes. *Z. f. W.*, t. **18**, 1971, p. 85-115.

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1977).