

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALAIN HILLION

Quelques inégalités sur les régions de confiance

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, n° 4 (1977), p. 371-384

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_4_371_0

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Quelques inégalités sur les régions de confiance

par

Alain HILLION

Université de Bretagne Occidentale, 206, rue de Verdun, 29200 Brest

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ une structure statistique. g est un paramètre de la structure à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) sur lequel est définie une mesure positive σ -finie m . S est une région de confiance pour le paramètre g , appartenant à \mathcal{E} , de coefficient de confiance α , vérifiant donc $\forall \theta \in \Theta$:

$$[x \in \mathcal{X}, g(\theta) \in S(x)] \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad P_\theta[g(\theta) \in S(x)] \geq \alpha \quad (1)$$

On se propose de trouver une borne inférieure pour l'espérance de la mesure de S , c'est-à-dire une quantité $C(\theta, \alpha)$ (ne dépendant que de la structure, du paramètre et de α) telle que pour toute région de confiance S , appartenant à \mathcal{E} , vérifiant (1), on ait :

$$E_\theta(m(S)) \geq C(\theta, \alpha) \quad (2)$$

Dans la première partie, nous calculons une borne inférieure $C(\theta, \alpha)$. Nous étudions des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit atteinte, puis généralisons un résultat analogue (déjà publié [4]) sur la borne inférieure du diamètre moyen des régions de confiance.

Dans la deuxième partie, nous étudions, dans le cas de l'échantillon, des bornes inférieures asymptotiques de la mesure moyenne des régions de confiance.

RAPPELS ET NOTATIONS

. Si f est une fonction réelle, on désignera par f^+ la fonction définie par $f^+(x) = \sup(f(x), 0)$.

. Si P et Q sont deux probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, absolument continues

par rapport à μ , mesure positive σ -finie et de densités respectives p et q , on note :

$P \wedge Q$ la mesure de densité (par rapport à μ) $\inf(p, q)$

$$|P \wedge Q| = (P \wedge Q)(\mathcal{X}) = \int_{\mathcal{X}} \inf(p, q) d\mu = 1 - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}} |p - q| d\mu$$

On a $|P \wedge Q| = 1 - dv(P, Q)$ (dv désigne la distance en variation).

. Le lemme suivant nous sera utile (cf. [7], ou [9], p. 353 pour un résultat analogue).

LEMME. — Pour tout couple de probabilités (P, Q) définies sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et tout couple (B_1, B_2) d'éléments de \mathcal{B} , on a

$$P(B_1 \cap B_2) \geq |P \wedge Q| - 2 + P(B_1) + Q(B_2)$$

Preuve. — On a

$$P(B_1 \cap B_2) \geq (P \wedge Q)(B_1 \cap B_2)$$

et

$$\begin{aligned} & (P \wedge Q)(B_1 \cap B_2) - [|P \wedge Q| - P(\mathcal{X} - B_1) - Q(\mathcal{X} - B_2)] \\ &= \{P(\mathcal{X} - B_1) - (P \wedge Q)(\mathcal{X} - B_1)\} + \{Q(\mathcal{X} - B_2) - (P \wedge Q)(\mathcal{X} - B_2)\} \\ &+ \{(P \wedge Q)((\mathcal{X} - B_1) \cap (\mathcal{X} - B_2))\} \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité.

PREMIÈRE PARTIE

1. CALCUL DE $C(\theta, \alpha)$

On établit, en utilisant le théorème de Fubini (cf. [6], ou [9], p. 511)

$$E_{\theta}[m(S)] = \int_{\mathcal{E}} P_{\theta}[u \in S] dm(u) \quad (3)$$

Si $g(\theta) \in \mathcal{E}$ (Hyp. M_1), $E_{\theta}[m(S)] \geq \int_{g(\theta)} P_{\theta}[u \in S] dm(u)$

. Soit alors $\varphi \in g^{-1}(u)$, on a

$$P_{\theta}[u \in S] = P_{\theta}[g(\varphi) \in S] \geq P_{\theta}[g(\theta) \in S, g(\varphi) \in S] \quad (4)$$

Appliquons le lemme préliminaire (où $P_{\theta} = P$, $P_{\varphi} = Q$, $[g(\theta) \in S] = B_1$, $[g(\varphi) \in S] = B_2$). On aura

$$P_{\theta}[g(\varphi) \in S, g(\theta) \in S] \geq |P_{\theta} \wedge P_{\varphi}| - 2 + P_{\theta}[g(\theta) \in S] + P_{\varphi}[g(\varphi) \in S] \quad (5)$$

. Comme S est une région de confiance de coefficient α , on aura

$$P_\theta[g(\varphi) \in S, g(\theta) \in S] \geq |P_\theta \wedge P_\varphi| - 2(1 - \alpha)$$

(On choisira $\alpha > \frac{1}{2}$ sinon le second membre est toujours négatif).

. On a donc

$$P_\theta[u \in S] \geq \sup_{\varphi \in g^{-1}(u)} \{ |P_\theta \wedge P_\varphi| - 2(1 - \alpha) \} = h_\theta(u) \tag{6}$$

Si on suppose h_θ \mathcal{E} -mesurable (Hyp. H₂), on aura

$$P_\theta[u \in S] \geq \sup(0, h_\theta(u)) = [h_\theta(u)]^+$$

et donc

$$E_\theta[m(S)] \geq \int_{g(\theta)} [h_\theta(u)]^+ dm(u)$$

d'où le théorème.

THÉORÈME 1. — Si on suppose que $g(\Theta) \in \mathcal{E}$ (Hyp. H₁) et que

$$h_\theta(u) = \sup_{\varphi \in g^{-1}(u)} \{ |P_\theta \wedge P_\varphi| - 2(1 - \alpha) \}$$

est \mathcal{E} -mesurable (Hyp. H₂), on aura pour toute région de confiance S pour le paramètre g, de coefficient de confiance α ($\alpha > \frac{1}{2}$)

$$E_\theta[m(S)] \geq \int_{g(\Theta)} [h_\theta(u)]^+ dm(u) = C(\theta, \alpha) \tag{7}$$

2. ÉTUDE DE L'ÉGALITÉ $E_{\theta_0}[m(S)] = C(\theta_0, \alpha)$

(On se place dans le cas où E est un espace topologique, \mathcal{E} sa tribu borélienne, la mesure m « charge » tout ouvert, et $g(\theta) = \theta \forall \theta \in \Theta = E$).

. On impose, en outre, les deux conditions de continuité (Hyp. C₁) : les deux fonctions réelles définies sur E par

$$a(\varphi) = |P_{\theta_0} \wedge P_\varphi| \quad \text{et} \quad b(\varphi) = P_{\theta_0}[\varphi \in S]$$

sont continues.

. Supposons donc

$$E_{\theta_0}[m(S)] = C(\theta_0, \alpha). \tag{8}$$

On aura, compte tenu de (3) et (7)

$$\int_E P_{\theta_0}[\varphi \in S] dm(\varphi) = \int_E \{ |P_{\theta_0} \wedge P_\varphi| - 2(1 - \alpha) \}^+ dm(\varphi)$$

et, comme les deux fonctions intégrées sont continues et que m charge tout ouvert, l'inégalité (6) devient l'égalité

$$P_{\theta_0}[\varphi \in S] = \{ | P_{\theta_0} \wedge P_{\varphi} | - 2(1 - \alpha) \}^+ \quad \forall \varphi \in E \quad (9)$$

En particulier, si on fait $\varphi = \theta_0$, on a

$$\{ 2\alpha - 1 \}^+ = 2\alpha - 1 = P_{\theta_0}[\theta_0 \in S] \geq \alpha \quad \text{donc} \quad \alpha = 1.$$

La condition (9) (qui est équivalente à (8)) est donc équivalente aux conditions.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\varphi}[\varphi \in S] = 1 \quad \forall \varphi \in E \\ P_{\theta_0}[\varphi \in S] = | P_{\theta_0} \wedge P_{\varphi} | \quad \forall \varphi \in E \end{array} \right. \quad (10. a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\varphi}[\varphi \in S] = 1 \quad \forall \varphi \in E \\ P_{\theta_0}[\varphi \in S] = | P_{\theta_0} \wedge P_{\varphi} | \quad \forall \varphi \in E \end{array} \right. \quad (10. b)$$

. Comme

$$P_{\varphi}[\varphi \in S] = 1 \quad P_{\varphi}[\varphi \notin S] = 0$$

et donc

$$| P_{\theta_0} \wedge P_{\varphi} | = (P_{\theta_0} \wedge P_{\varphi})(S).$$

Les conditions (10) sont donc équivalentes à

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\varphi}[\varphi \in S] = 1 \quad \forall \varphi \in E \\ P_{\theta_0}(A) \leq P_{\varphi}(A) \quad \forall A \subset [\varphi \in S], \forall \varphi \in E \end{array} \right. \quad (10. a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\varphi}[\varphi \in S] = 1 \quad \forall \varphi \in E \\ P_{\theta_0}(A) \leq P_{\varphi}(A) \quad \forall A \subset [\varphi \in S], \forall \varphi \in E \end{array} \right. \quad (10. c)$$

. Utilisant la décomposition de Lebesgue de P_{φ} par rapport à P_{θ_0} , on peut écrire $P_{\varphi} = Q\varphi + \mu\varphi$ où $Q\varphi \ll P_{\theta_0} \left(\frac{dQ\varphi}{dP_{\theta_0}} = Z\varphi \right)$ et $\mu\varphi \perp P_{\theta_0}$; il existe donc $\mathcal{X}\varphi \in \mathcal{B}$ tel que $P_{\theta_0}(\mathcal{X}\varphi) = 1$ et $\mu\varphi(\mathcal{X}\varphi) = 0$.

. Posons alors $A\varphi = [\varphi \in S]$ et

$$A^1\varphi = \mathcal{X}\varphi \cap A\varphi \quad A^2\varphi = (\mathcal{X} - \mathcal{X}\varphi) \cap A\varphi$$

Comme $P_{\theta_0}(A^2\varphi) = 0$, la condition (10.c) est équivalente à

$$Z\varphi \geq 1 \quad P_{\theta_0} - s \quad \text{sur} \quad A^1\varphi. \quad (11)$$

Comme $P\varphi(A\varphi) = 1$, on a

$$1 = P\varphi(A\varphi) = \int_{A^1\varphi} Z\varphi dP_{\theta_0} + \mu\varphi(A^2\varphi) \leq \int_{\mathcal{X}\varphi} Z\varphi dP_{\theta_0} + \mu\varphi(\mathcal{X} - \mathcal{X}\varphi) = 1$$

ce qui est équivalent à

$$Z\varphi = 0 \quad P_{\theta_0} - s \quad \text{sur} \quad \mathcal{X}\varphi - A^1\varphi \quad (12)$$

et

$$\mu\varphi[(\mathcal{X} - \mathcal{X}\varphi) - A^2\varphi] = 0. \quad (13)$$

. De (11) et (12), on déduit que

$$P_{\theta_0} - s \quad Z\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad Z\varphi \geq 1 \quad \text{sur} \quad \mathcal{X}\varphi. \quad (14)$$

. Si la condition (14) est réalisée, on a $E_{\theta_0}[m(S)] = C(\theta_0, 1)$ si et seulement si

$$Z\varphi \geq 1 \text{ P}_{\theta_0} - s \text{ sur } A^1\varphi \quad \text{et} \quad \mu\varphi[(\mathcal{X} - \mathcal{X}\varphi) - A^2\varphi] = 0$$

d'où le théorème

THÉORÈME 2. — Notons

$$P_\varphi = Q\varphi + \mu\varphi \quad Q\varphi \ll P_{\theta_0} \quad \left(\frac{dQ}{dP_{\theta_0}} = Z\varphi \right) \quad \text{et} \quad \mu\varphi \perp P_{\theta_0}.$$

$\mathcal{X}\varphi$ est tel que $P_{\theta_0}(\mathcal{X}\varphi) = 1$ et $\mu\varphi(\mathcal{X}\varphi) = 0$.

. Sous les hypothèses de continuité C_1 , pour qu'il existe S telle que $E_{\theta_0}[m(S)] = C(\theta_0, \alpha)$, il est nécessaire et suffisant que :

i) $\alpha = 1$.

ii) Pour tout φ de E , on a $Z\varphi = 0$ ou $Z\varphi \geq 1$, $P_{\theta_0} - s$ sur $\mathcal{X}\varphi$.

. On peut alors définir S de la façon suivante :

$$[\varphi \in S] = [x \in A\varphi] \quad \text{où} \quad A\varphi = \{ Z\varphi \geq 1 \} \cap \mathcal{X}\varphi \cup (\mathcal{X} - \mathcal{X}\varphi).$$

REMARQUE 1. — Pour que $E_\theta[m(S)] = C(\theta, 1) \forall \theta \in E$, il est nécessaire et suffisant que

$$P_\theta[\varphi \in S] = | P_\theta \wedge P_\varphi | \quad \forall \varphi, \theta \in E. \tag{15}$$

EXEMPLE 1. — On peut illustrer le théorème 2, par l'exemple suivant (où la condition (15) est réalisée).

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (R, \mathcal{B}(R))$. P_θ est la loi uniforme sur $[\theta, \theta + 1]$ ($\Theta = E = R$, m est la mesure de Lebesgue sur R).

. On vérifie que

$$| P_\theta \wedge P_\varphi | = \begin{cases} 1 - |\theta - \varphi| & \text{si } |\theta - \varphi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\theta - \varphi| > 1. \end{cases}$$

. Soit alors $S(x) = [x - 1, x]$, $P_\theta[\theta \in S] = P_\theta[x \in [\theta, \theta + 1]] = 1$ donc $m(S) = 1$ soit $E_\theta(m(S)) = 1$ et

$$C(\theta, 1) = \int_R \sup (| P_\theta \wedge P_\varphi |, 0) d\varphi = 2 \int_0^1 (1 - t) dt = 1 = E_\theta(m(S))$$

pour tout θ .

3. DIAMÈTRES DE RÉGIONS DE CONFIANCE

(On se place dans le cas où E est un espace métrique, dont la distance est notée d).

Si E est un espace métrique et que S soit une région de confiance vérifiant (1), dont le diamètre (noté $\text{diam } S$) est supposé \mathcal{B} -mesurable (Hyp. H₃), on peut chercher une borne inférieure pour $E_\theta[q(\text{diam } S)]$.

q est une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , croissante (par exemple si $q(t) = t^m$, on évalue une borne inférieure des moments du diamètre).

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — Notons $C_{q,\theta}(t) = \{ \varphi \in \Theta \text{ tels que } q[d(g(\varphi), g(\theta))] \geq t \}$ et

$$f_{q,\theta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } C_{q,\theta}(t) \text{ est vide} \\ \sup_{\varphi \in C_{q,\theta}(t)} |P_\theta \wedge P_\varphi| - 2(1 - \alpha) & \text{si } C_{q,\theta}(t) \text{ est non vide} \end{cases}$$

Si $f_{q,\theta}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurable (Hyp. H₄), on a pour toute région de confiance S pour le paramètre g , de coefficient de confiance $\alpha \left(\alpha > \frac{1}{2} \right)$, de diamètre \mathcal{B} -mesurable (Hyp. H₃)

$$E_\theta[q(\text{diam } S)] \geq \int_0^{+\infty} [f_{q,\theta}(t)]^+ dt = Kq(\theta, \alpha) \tag{16}$$

La démonstration analogue à celle du théorème 1 est fondée sur le fait que $P_\theta[q(\text{diam } S) \geq q[d(g(\theta), g(\varphi))]] \geq |P_\theta \wedge P_\varphi| - 2(1 - \alpha)$. Nous renvoyons pour le détail à [4] (où le cas $q(t) = t$ est traité complètement).

REMARQUE 2. — Si $E = \mathbb{R}^k$, m mesure de Lebesgue, on a toujours $m(S) \leq [\text{diam } S]^k$ et donc, en fait, $E_\theta[(\text{diam } S)^k] \geq C(\theta, \alpha)$.

Le gain peut être appréciable : si $\Theta = \mathbb{R}$ et que $|P_{\theta_0} \wedge P_\varphi|$ soit une fonction décroissante de $|\varphi - \theta_0|$, on a $C(\theta_0, \alpha) = 2K(\theta_0, \alpha)$.

(On en déduit donc que dans ce cas la borne $K(\theta, \alpha)$ ne peut être atteinte).

4. APPLICATION AU CAS SÉQUENTIEL

$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ est une structure statistique, g un paramètre de la structure à valeurs dans (E, \mathcal{E}, m) espace mesuré.

On considère une suite croissante \mathcal{B}_n de sous-tribus de \mathcal{B} .

On note $P_\theta^{(n)}$ la restriction de P_θ à l'espace probabilisable $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_n)$.

. Une région de confiance séquentielle S_T pour le paramètre g est définie par la donnée

. d'une suite S_n de régions de confiance, appartenant à \mathcal{E} , \mathcal{B}_n -mesurables vérifiant donc

$$[x \in \mathcal{X}, g(\theta) \in S_n] \in \mathcal{B}_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \theta \in \Theta \tag{17}$$

. d'un temps d'arrêt T (relativement à la famille \mathcal{B}_n), fermé vérifiant donc $[T = n] \in \mathcal{B}_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P_\theta[T < +\infty] = 1 \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (18)$

. On note \mathcal{B}_T la tribu des événements antérieurs à T (\mathcal{B}_T est donc l'ensemble des B de \mathcal{B} tels que $B \cap [T = n] \in \mathcal{B}_n \forall n$) et $P_\theta^{(T)}$ la restriction de P_θ à $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_T)$.

. S_T est supposée de coefficient de confiance $\alpha \left(\alpha > \frac{1}{2} \right)$, vérifiant donc

$$P_\theta[g(\theta) \in S_T] \geq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta.$$

. Comme $[g(\theta) \in S_T]$ appartient à \mathcal{B}_T , on obtient immédiatement le théorème suivant (en appliquant le théorème 1 à la structure $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_T, P_\theta^{(T)})_{\theta \in \Theta}$).

THÉORÈME 4. — Si on suppose que $g(\Theta) \in \mathcal{E}$ (Hyp. H_1) et que

$$h_\theta^{(T)}(u) = \sup_{\varphi \in g^{-1}(u)} \{ | P_\theta^{(T)} \wedge P_\varphi^{(T)} | - 2(1 - \alpha) \}$$

est \mathcal{E} -mesurable (Hyp. H_5), on aura pour toute région de confiance S_T pour le paramètre g , fondée sur la règle d'arrêt T , de coefficient $\alpha \left(\alpha > \frac{1}{2} \right)$

$$E_\theta[m(S_T)] \geq \int_{g(\theta)} [h_\theta^{(T)}(u)]^+ dm(u) = C^{(T)}(\theta, \alpha) \quad (19)$$

REMARQUE 3. — Comme T est fermée, on a

$$| P_\varphi^{(T)} \wedge P_\theta^{(T)} | = \sum_{n=1}^{+\infty} (P_\varphi^{(n)} \wedge P_\theta^{(n)})(T = n)$$

DEUXIÈME PARTIE

On s'intéresse ici au cas d'un échantillon de variables aléatoires X_i (indépendantes, de même loi P_θ , $\theta \in \mathbb{R}$, à valeurs dans un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$).

On désigne par $P_\theta^{(n)}$ la loi du n -uplet (X_1, \dots, X_n) et

$$C^{(n)}(\theta_0, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} \{ | P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_\varphi^{(n)} | - 2(1 - \alpha) \}^+ d\varphi$$

(borne inférieure de la mesure de Lebesgue des régions de confiance pour le paramètre Θ , de coefficient α , fondées sur l'échantillon de taille n).

On se propose de trouver des bornes inférieures asymptotiques pour $C^{(n)}(\theta_0, \alpha)$.

Quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $\varphi \neq \theta_0$, $|P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\varphi}^{(n)}| \rightarrow 0$, mais

$$|P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\theta_0}^{(n)}| = 1.$$

$|P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\varphi}^{(n)}|$ ne sera donc supérieur à $2(1 - \alpha)$ qu'au voisinage de θ_0 . Les bornes inférieures asymptotiques vont donc dépendre de la vitesse de séparation de $P_{\theta_0}^{(n)}$ et $P_{\varphi}^{(n)}$ pour φ voisin de θ_0 (cf. [3], [2] pour des résultats sur la séparation asymptotique).

Le théorème 5 (général) donne une approximation asymptotique qui peut être trop grossière dans des cas plus réguliers (échantillon obéissant à des conditions de type Cramer-Rao, cas étudié dans le théorème 6).

1. PREMIER THÉORÈME

THÉORÈME 5. — Si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - |P_{\theta_0} \wedge P_{\theta_0 + t}|}{|t|^m} = J(\theta_0) > 0 \text{ (Hyp. R}_1\text{)},$$

on a pour toute suite S_n de boréliens de confiance pour le paramètre θ , de coefficient α , fondés sur l'échantillon de taille n :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[n^m E_{\theta_0} [m(S_n)] \right] \geq \frac{C}{[J(\theta_0)]^{\frac{1}{m}}} \tag{20}$$

. Posant

$$\beta = 2(1 - \alpha), \text{ on a } C = 2(-\text{Log } \beta)^{\frac{1}{m}} \int_0^1 \left\{ e^{\text{Log } \beta u^m} - \beta \right\} du$$

Preuve. — On va utiliser l'inégalité

$$|P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\theta_0+t}^{(n)}| \geq |P_{\theta_0} \wedge P_{\theta_0+t}|^n \tag{21}$$

L'hypothèse R_1 permet d'écrire

$$|P_{\theta_0} \wedge P_{\theta_0+t}| \geq [1 - |t|^m(J(\theta_0) + \varepsilon)] \text{ dès que } |t| < \delta \tag{22}$$

. Soit alors t_n tel que $[1 - t_n^m(J(\theta_0) + \varepsilon)]^n = 2(1 - \alpha) = \beta$ c'est-à-dire

$$\left(t_n = [J(\theta_0) + \varepsilon]^{-\frac{1}{m}} \left(1 - \beta^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{m}} \right),$$

on a :

$$\begin{aligned} C^{(n)}(\theta_0, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ |P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\theta_0+t}^{(n)}| - 2(1 - \alpha) \right\}^+ dt \\ &\geq \int_{-t_n}^{t_n} \left\{ |P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\theta_0+t}^{(n)}| - 2(1 - \alpha) \right\}^+ dt \end{aligned}$$

Comme $t_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, on aura $|t_n| < \delta$ pour n assez grand et donc d'après (21) et (22)

$$C^{(n)}(\theta_0, \alpha) \geq 2 \int_0^{t_n} \{ [1 - t^m(J(\theta_0) + \varepsilon)]^n - \beta \} dt = 2I_n.$$

$$I_n = [J(\theta_0) + \varepsilon]^{-\frac{1}{m}} \left(1 - \beta^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} \int_0^1 \{ [1 - u^m \left(1 - \beta^{\frac{1}{n}}\right)]^n - \beta \} du$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à

$$\int_0^1 \{ [1 - u^m \left(1 - \beta^{\frac{1}{n}}\right)]^n - \beta \} du$$

on trouve :

$$I_n \sim \frac{1}{[J(\theta_0) + \varepsilon]^{\frac{1}{m}}} \frac{(-\text{Log } \beta)^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{1}{m}}} \int_0^1 \{ e^{\text{Log } \beta u^m} - \beta \} du$$

ce qui prouve le théorème.

REMARQUE 4. — On a en fait trouvé une borne inférieure asymptotique pour $C^{(n)}(\theta_0, \alpha)$. Deux questions se posent alors : est-elle la meilleure possible, sous la condition générale (R₁) ? Existe-t-il des régions de confiance telles que $E_{\theta_0}[m(S_n)]$ soit de l'ordre de $C^{(n)}(\theta_0, \alpha)$ (en $n^{-\frac{1}{m}}$) ?

La réponse est affirmative pour les deux questions ($0 < m \leq 1$) comme le prouve l'exemple suivant :

EXEMPLE 2. — Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

. Y une variable aléatoire réelle de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) $my^{m-1}1]0, 1[(y)$.

P_θ est la loi de $Y + \theta$.

. On vérifie alors que

$$|P_{\theta_0} \wedge P_{\theta_0+t}| = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \geq 1 \\ 1 - |t|^m & \text{si } |t| \leq 1 \end{cases}$$

(La condition R₁ est donc réalisée avec $J(\theta_0) = 1$).

. On a de plus

$$|P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\theta_0+t}^{(n)}| = [1 - |t|^m]^n \quad \text{si } |t| \leq 1$$

(L'égalité est réalisée dans (21)) et donc

$$C^{(n)}(\theta_0, \alpha) = 2 \int_0^{t_n} [1 - |t|^m]^n \sim \frac{C}{n^m}$$

. On peut alors produire des régions de confiance dont la mesure moyenne est d'ordre $\frac{1}{n^m}$ (cf. par exemple [5], p. 132).

Si on pose $W_n = \inf_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $S_n = [W_n - r_n, W_n]$

$$P_\theta^{(n)}[\theta \in S_n] = P_\theta^{(n)}[\theta \leq W_n \leq \theta + r_n] = 1 - [1 - r_n^m]^n = \alpha$$

et donc

$$E_{\theta_0}[m(S_n)] = r_n = \left\{ 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}} \right\}^{\frac{1}{m}} \sim \frac{(-\text{Log}(1 - \alpha))^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{n^m}}$$

REMARQUE 5. — La condition R_1 est vérifiée (avec $m = 1$) si $\Theta = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+$ et P_θ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $\frac{f(x)}{b(\theta)} 1] \theta, +\infty[(x)(f \text{ continue})$.

$$\text{Alors } J(\theta) = \frac{f(\theta)}{b(\theta)}.$$

. La condition R_1 est aussi vérifiée (avec $m = 1$) dans le cas où P_θ est absolument continue par rapport à une mesure μ , de densité « régulière » $f(x, \theta)$.

On aura

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) \right| d\mu$$

En fait, si f est suffisamment régulière, la borne d'ordre $\frac{1}{n}$ est trop grossière, le théorème 6 prouvera que les mesures moyennes des régions de confiance sont au moins d'ordre $\frac{1}{n^2}$.

2. DEUXIÈME THÉORÈME

On suppose qu'il existe μ mesure positive σ -finie telle que $P_\theta \ll \mu$.

On note $\frac{dP_\theta}{d\mu} = f(x, \theta)$ et on suppose que

$$E = \{x : f(x, \theta) > 0\} \text{ est indépendant de } \theta \text{ (Hyp. } R_2).$$

. On a

$$|P_\varphi^{(n)} \wedge P_{\theta_0}^{(n)}| = P_{\theta_0}^{(n)}(H_n) + P_\varphi^{(n)}(\mathcal{X}^{(n)} - H_n)$$

où

$$H^{(n)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n$$

tels que

$$f(x_1, \varphi) \dots f(x_n, \varphi) \geq f(x_1, \theta_0) \dots f(x_n, \theta_0)$$

soit en posant

$$Z_\varphi^{(i)} = \text{Log} \frac{f(x_i, \varphi)}{f(x_i, \theta_0)} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{i=1}^n Z_\varphi^{(i)}$$

$$| P_\varphi^{(n)} \wedge P_{\theta_0}^{(n)} | = P_\varphi^{(n)}[S_n < 0] + P_{\theta_0}^{(n)}[S_n \geq 0] \tag{23}$$

. On va approcher $P_\varphi^{(n)}[S_n < 0]$ et $P_{\theta_0}^{(n)}[S_n \geq 0]$ en utilisant la généralisation suivante du théorème de Berry-Essen (dont la démonstration suit pas à pas celle donnée dans [I], p. 542) :

$X_k^{(n)} \ 1 \leq k \leq n$ sont n variables aléatoires, réelles, indépendantes, de même loi définies sur un espace probabilisé (Ω_n, A_n, P_n) .

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k^{(n)} \quad m_n = E(X_1^{(n)}) \quad \sigma(X_1^{(n)}) = \sigma_n > 0$$

$$E[| X_1 - m_n |^3] = \rho_n < + \infty.$$

$\mathcal{N}(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

$$\left(\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x n(v)dv \right)$$

alors

$$\left| P[S_n < y] - \mathcal{N}\left(\frac{y - nm_n}{\frac{1}{n^2}\sigma_n}\right) \right| \leq \frac{3\rho_n}{n^2\sigma_n^3} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N} \tag{24}$$

. Si on pose

$$\rho_\varphi(Z) = E_\varphi[| Z - E_\varphi(Z) |^3]$$

et

$$\rho_{\theta_0}(Z) = E_{\theta_0}[| Z - E_{\theta_0}(Z) |^3]$$

on aura en combinant (23) et (24) (appliquée à $P_\varphi^{(n)}$ et $P_{\theta_0}^{(n)}$).

$$\left| | P_\varphi^{(n)} \wedge P_{\theta_0}^{(n)} | - \left(1 - \int_{-\frac{1}{n^2}\frac{E_\varphi(Z)}{\sigma_\varphi(Z)}}^{-\frac{1}{n^2}\frac{E_{\theta_0}(Z)}{\sigma_{\theta_0}(Z)}} n(v)dv \right) \right| \leq 3n^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\rho_\varphi(Z)}{\sigma_\varphi^3(Z)} + \frac{\rho_{\theta_0}(Z)}{\sigma_{\theta_0}^3(Z)} \right] \tag{25}$$

pour tous φ, θ, n .

. On suppose réalisées les conditions de régularité (Hyp. R₃) (dérivations successives sous le signe somme jusqu'à un ordre suffisamment élevé...) conduisant aux développements limités suivants au voisinage de θ_0 .

On désigne par S le score $\frac{\partial}{\partial \theta} (\text{Log } f(x, \theta))_{\theta=\theta_0}$ et par $I(\theta_0)$ la quantité d'information $E_{\theta_0}(S^2) = \text{var}_{\theta_0}(S) = I(\theta_0)$.

On suppose en particulier que $I(\theta_0) > 0$ et $E_{\theta_0}[|S|^3] < +\infty$. On a alors en posant $\varphi = \theta_0 + t$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_\varphi(Z)}{\sigma_\varphi^3(Z)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_{\theta_0}(Z)}{\sigma_{\theta_0}^3(Z)} = \frac{E_{\theta_0}(|S|^3)}{[I(\theta_0)]^{\frac{3}{2}}} \quad (26)$$

$$\frac{E_\varphi(Z)}{\sigma_\varphi(Z)} = \frac{|t|}{2} [I(\theta_0)]^{\frac{1}{2}} + \frac{t^2}{24} [I(\theta_0)]^{-\frac{1}{2}} [3I'(\theta_0) - E_{\theta_0}(S^3)] + o(t^2) \quad (27)$$

$$\frac{E_{\theta_0}(Z)}{\sigma_{\theta_0}(Z)} = -\frac{|t|}{2} [I(\theta_0)]^{\frac{1}{2}} - \frac{t^2}{24} [I(\theta_0)]^{-\frac{1}{2}} [E_{\theta_0}(S^3) + 3I'(\theta_0)] + o(t^2) \quad (28)$$

. On aura donc

$$3 \left[\frac{\rho_\varphi(Z)}{\sigma_\varphi^3(Z)} + \frac{\rho_{\theta_0}(Z)}{\sigma_{\theta_0}^3(Z)} \right] \leq K \quad \text{si} \quad |t| < \delta_1 \quad (29)$$

et comme $|n(u)| \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\forall u)$,

$$\left| \int_0^{-n^{\frac{1}{2}} \frac{E_{\theta_0}(Z)}{\sigma_{\theta_0}(Z)}} n(v) dv - \int_0^{n^{\frac{1}{2}} \frac{|t|}{2} [I(\theta_0)]^{\frac{1}{2}}} n(v) dv \right| \leq n^{\frac{1}{2}} K' |t|^2 \quad \text{dès que} \quad |t| < \delta_2 \quad (30)$$

et une inégalité du même type si on remplace $\frac{E_{\theta_0}(Z)}{\sigma_{\theta_0}(Z)}$ par $\frac{E_\varphi(Z)}{\sigma_\varphi(Z)}$. On obtient donc, en combinant (25) (29) et (30)

$$\left| \left| P_{\theta_0+t}^{(n)} \wedge P_{\theta_0}^{(n)} \right| - \left(1 - 2 \int_0^{n^{\frac{1}{2}} \frac{|t|}{2} [I(\theta_0)]^{\frac{1}{2}}} n(v) dv \right) \right| \leq n^{-\frac{1}{2}} K + n^{\frac{1}{2}} K' |t|^2 \quad (31)$$

dès que $|t| < \delta$ pour tout n .

. C'est l'inégalité (31) qui conduit au théorème suivant.

THÉORÈME 6. — *Si la loi P_θ vérifie les conditions de régularité (Hyp. R_2 et R_3), on a pour toute suite S_n de boréliens de confiance pour le paramètre θ , de coefficient α , fondées sur l'échantillon de taille n*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left[n^{\frac{1}{2}} E_{\theta_0}[m(S_n)] \right] \geq \frac{C}{[I(\theta_0)]^{\frac{1}{2}}} \quad (32)$$

On a

$$. C = 8(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\Phi^{-1} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right)^2 \right\} \right]$$

. $I(\theta_0)$ est la quantité d'information

$$. \Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Preuve. — On a

$$C^{(n)}(\theta_0, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} [| P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\varphi}^{(n)} | - 2(1 - \alpha)]^+ d\varphi$$

$$= n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left[\left| P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\theta_0 + \frac{u}{n^{\frac{1}{2}}}}^{(n)} \right| - 2(1 - \alpha) \right] du$$

Soit alors u_0 tel que

$$1 - 2 \int_0^{u_0} n(v) dv = 2(1 - \alpha)$$

c'est-à-dire

$$u_0 = 2[I(\theta_0)]^{-\frac{1}{2}} \Phi^{-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

On a donc

$$C^{(n)}(\theta_0, \alpha) \geq n^{-\frac{1}{2}} \int_{0-u}^{u_0} \left[\left| P_{\theta_0}^{(n)} \wedge P_{\theta_0 + \frac{u}{n}}^{(n)} \right| - 2(1 - \alpha) \right]^+ du$$

Comme pour n assez grand $|u_0| < n^{\frac{1}{2}}\delta$, on peut appliquer (31) (avec $t = n^{-\frac{1}{2}}u$) et donc

$$C^{(n)}(\theta_0, \alpha) \geq 2n^{-\frac{1}{2}} \left[\int_0^{u_0} du \left\{ 2\alpha - 1 - 2 \int_0^{\frac{u}{2}} n(v) dv - n^{-\frac{1}{2}}(K + K'u^2) \right\} \right]$$

$$= 2n^{-\frac{1}{2}} \left[\int_0^{u_0} 2 \int_{\frac{u}{2}}^{\frac{u}{2}} n(v) dv \right] - n^{-1}K'' = 4n^{-\frac{1}{2}}I - n^{-1}K''$$

d'où le théorème puisque

$$I = 2 \cdot (2\pi)^{-\frac{1}{2}} [I(\theta_0)]^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\Phi^{-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \right)^2 \right\} \right]$$

REMARQUE 6. — Il n'est pas possible de trouver, sous les conditions générales R_1 et R_2 , de meilleure borne inférieure asymptotique pour $C^{(n)}(\theta_0, \alpha)$.

En effet, si $P_{\theta} = \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ (où σ^2 est connue), on a exactement $C^{(n)}(\theta_0, \alpha) = n^{\frac{1}{2}}\sigma C$ et $I(\theta_0) = \sigma^{-2}$.

REMARQUE 7. — Wilks ([8], p. 375) a produit dans des cas réguliers des intervalles de confiance S_n tels que

$$n^{\frac{1}{2}}m(S_n) \xrightarrow{P_{\theta_0}} \frac{2\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{[I(\theta_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

(c'est-à-dire de l'ordre de la borne inférieure proposée) et prouvé que pour toute suite S'_n , d'une classe particulière d'intervalles de confiance de coefficient α ,

$$\left[\frac{m(S'_n)}{m(S_n)} \right]^2 \xrightarrow{P_{\theta_0}} k \leq 1$$

REMARQUE 8. — Les démonstrations des théorèmes 5 et 6 sont fondées sur les inégalités (22) ou (31). Elles s'appliquent au cas où, les variables aléatoires X_1, \dots, X_n n'étant plus ni indépendantes ni équidistribuées, leurs lois conjointes $P_{\theta}^{(n)}$ vérifient encore des inégalités de ce type.

RÉFÉRENCES

- [1] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, Wiley, 1971.
- [2] J. GEFFROY, *Inégalités pour le niveau de signification et la puissance de certains tests reposant sur des données quelconques*. CRAS 282, série A, 1976, p. 1299-1301.
- [3] J. GEFFROY et R. MOCHE, *Sur la séparation asymptotique uniforme des produits de lois de probabilité*. CRAS 278, série A, 1974, p. 969-971.
- [4] A. HILLION, *Diamètres de régions de confiance*. CRAS 282, série A, 1976, p. 1167-1170.
- [5] M. G. KENDALL et A. STUART, *The advanced theory of statistics*, vol. 2, Griffin, 1960.
- [6] J. W. PRATT, Length of confidence intervals. *J. Amer. Statist. Assoc.*, t. 56, 1961, p. 260-272.
- [7] R. SINGH, Existence of bounded length confidence intervals. *Ann. Math. Statist.*, t. 34, 1963, p. 1474-1485.
- [8] S. WILKS, *Mathematical Statistics*, Wiley, 1963.
- [9] S. ZACKS, *The theory of statistical inference*, Wiley, 1971.

(Manuscrit reçu le 9 juin 1977).