ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. COCOZZA
C. KIPNIS

Existence de processus Markoviens pour des systèmes infinis de particules

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 3 (1977), p. 239-257
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_3_239_0>

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIII, n° 3, 1977, p. 239-257. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Existence de processus Markoviens pour des systèmes infinis de particules

par

C. COCOZZA (*)

et

C. KIPNIS

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique,
Route de Saclay, 91120 Palaiseau, France
« Laboratoire de Recherche associé au C. N. R. S. »

EXISTENCE OF MARKOV PROCESSES FOR INFINITE PARTICLES SYSTEMS

Following the methods of Stroock and Varadhan [*3*] for diffusions, we study the existence of a Markov process for an infinite particles system by solving a martingale problem. First we give an equivalent form of the martingale problem which is more suitable in our context. Then we prove the existence of the solutions of the martingale problem by the same way as Stroock and Varadhan do in [*3*]. The hard point is to prove the uniqueness of the solutions. We exhibit fundamental martingales and we note that there exists a unique solution of the martingale problem if and only if there exists a representation theorem of martingales with respect to these fundamental ones. We approach the infinite particles system by finite ones for which such a representation theorem is well known and so we prove unicity of the solutions under Holley's conditions [*6*].

INTRODUCTION

Dans son article de 1969 [*10*], F. Spitzer a commencé l'étude des systèmes infinis de particules. Nous nous intéressons ici à l'un d'entre eux : le sys-

(*) Laboratoire de Probabilités associé au C. N. R. S., n° 224, Université, Paris VI.

tème de changement de spin avec interaction. La description intuitive est la suivante : considérons un réseau cristallin représenté par $\mathbb{Z}^d$, plus généralement un ensemble dénombrable S. Chaque point de ce réseau (ou site) est occupé par une particule qui peut se trouver dans deux états (le « spin » de la particule). Nous noterons par commodité ces deux états 0 et 1. Le système évolue de la façon suivante : à chaque instant t, la particule placée au site x « regarde » la configuration générale du système, soit η, et « décide » de modifier aléatoirement son état avec une vitesse $c(x, \eta)$. La formalisation naturelle de ce problème est alors de chercher un processus de Markov à valeur dans l'espace des configurations possibles, $\{0, 1\}^S$ dont le générateur infinitésimal est défini par

$$Af(\eta) = \sum_x c(x, \eta)[f(\tau_x\eta) - f(\eta)]$$

pour les fonctions f qui ne dépendent que de la configuration en un nombre fini de sites et où les $c(x, .)$ sont des fonctions continues de $\{0, 1\}^S$ dans $\mathbb{R}^+$. Dans cette formule η désigne un élément de $\{0, 1\}^S$ et $\tau_x\eta$ l'élément de $\{0, 1\}^S$ déduit de η par modification au seul site x.

Le premier problème qui se pose est l'existence d'un tel processus. Ainsi qu'il a été remarqué par Griffeath [*5*], cet opérateur n'est pas en général le générateur infinitésimal d'un semi-groupe. C'est néanmoins un opérateur non partout défini, de domaine dense et dissipatif. Une première solution de ce problème a été donnée par Holley [*6*], puis Liggett [*9*] en utilisant le théorème de Trotter-Kato. Ces démonstrations sont purement analytiques. Nous donnons ici une approche entièrement probabiliste basée sur l'étude du problème des martingales et la structure des processus ponctuels étudiée par Chou et Meyer [*1*] et Davis [*2*].

On sait que si η_t est un processus de Markov de générateur infinitésimal A, pour toute fonction f du domaine de A

$$(*) \qquad f(\eta_t) - f(\eta_0) - \int_0^t Af(\eta_s)ds$$

est une martingale, pour toutes les mesures P_η, par rapport aux tribus naturelles du processus. Inversement, Stroock et Varadhan [*3*] ont montré que si on peut trouver une *unique* famille de solutions (P_η) vérifiant $P_\eta(\eta_0 = \eta) = 1$ et faisant de $(*)$ des martingales, et si l'application $\eta \mapsto P_\eta$ est mesurable, alors η_t est un processus de Markov fort. L'existence d'une telle famille est prouvée dans le paragraphe II sous des conditions très peu

restrictives, après réduction du problème des martingales à une forme plus manipulable. Par contre l'unicité est le problème difficile.

Alors que ce travail était déjà achevé, nous avons pris connaissance d'un article [7] dans lequel Holley et Stroock posent, de la même façon qu'ici, le problème des martingales. Ils traitent le problème de l'unicité par deux méthodes : l'une analytique, l'autre probabiliste en utilisant un changement de temps et retrouvent dans les deux cas les conditions de Liggett [9]. Ici notre démonstration est tout à fait différente : par une technique de filtrage, nous approchons, en un certain sens, le système infini de particules par un système fini, pour lequel nous connaissons un théorème de représentation de martingales. Malheureusement, nous retrouvons ainsi les conditions de Holley [6] mais non celles de Liggett [9].

NOTATIONS

Dans l'espace des mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}_+$ muni de la topologie de la convergence vague, considérons le sous-espace fermé, soit $\mathfrak{M}$, formé par les sommes localement finies de masses unités. L'élément le plus général de $\mathfrak{M}$ s'écrit

$$m = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_{t_n}$$

pour une suite $(t_n, n \in \mathbb{N}^*)$ dans $[0, +\infty]$ croissant vers $+\infty$, unique, du moins si l'on convient que $\varepsilon_\infty = 0$ pour tenir compte du cas où la mesure m est finie.

Formons alors l'espace $\Omega = [\{0, 1\} \times \mathfrak{M}]^S$ où S est un ensemble dénombrable donné et notons $\xi^x : \Omega \to \{0, 1\}$ et $N^x : \Omega \to \mathfrak{M}$ les applications coordonnées $(x \in S)$. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in S$, soit $(T_n^x(\omega), n \in \mathbb{N}^*)$ l'unique suite croissante dans $[0, +\infty]$ telle que :

$$N^x(\omega) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_{T_n^x(\omega)} .$$

Nous définissons encore :

$$N_t^x(\omega) = N^x(\omega\,; [0, t]) = \sum_{n \geq 1} 1_{(T_n^x(\omega) \leq t)} \in \mathbb{N}$$

et

$$\eta_t^x(\omega) = \xi^x(\omega) + N_t^x(\omega) \pmod 2 \text{ dans } \{0, 1\},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega$ et $x \in S$. Enfin η_t désignera l'application de Ω dans le compact $E = \{0, 1\}^S$ donnée par $\eta_t(\omega) = (\eta_t^x(\omega), x \in S)$.

Si B est une partie de S, désignons par $\mathfrak{F}_t^B (t \in \mathbb{R}_+)$ (respectivement $\mathfrak{F}^B$) la tribu de parties de Ω engendrée par ξ^x et N_s^x pour $x \in B$ et $s \leq t$, (respectivement $s < \infty$). Nous écrirons $\mathfrak{F}_t$, (respectivement $\mathfrak{F}$) au lieu de $\mathfrak{F}_t^B$ (respectivement $\mathfrak{F}^B$) si $B = S$.

C(E) est l'ensemble des fonctions continues sur E, à valeurs réelles muni de la norme sup et $\mathfrak{D}$ le sous-espace de C(E) formé par les fonctions qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées.

On suppose désormais que $\{ c(x, .), x \in S \}$ est une famille d'applications continues de E dans $\mathbb{R}_+$.

Pour montrer l'existence d'une solution, nous prouvons que ce problème est équivalent au suivant (Th. I.2) trouver une probabilité $\mathbb{P}_\eta$ t. q.

1) $\mathbb{P}_\eta(\eta_0 = \eta) = 1$

2) Les $\tilde{N}_t^x = N_t^x - \int_0^t c(x, \eta_s) ds$ forment une famille de martingales centrées deux à deux orthogonales.

La construction d'une solution $\mathbb{P}_\eta$ est l'objet de la Prop. II.1.

Nous montrons ensuite que prouver l'unicité de la solution équivaut à démontrer que toute martingale de la forme $E^{\mathscr{F}_t}(G)$ orthogonale aux $\tilde{N}_t^x$ est constante. En s'appuyant sur les travaux de Chou et Meyer [*1*], Davis [*2*], Jacod [*8*] nous donnons une formule de représentation des martingales $E^{\mathscr{F}_t^{B_n}}(G)$ lorsque B_n est une suite croissante de sous-ensembles finis de S (Lemme III.3) et G une variable aléatoire bornée. On montre alors (Th. III.5) que la condition

$$\sup_{s \geq 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{x_i \in B_n} | c(x_i, \eta_s) - E^{\mathscr{F}_s^{B_n}} c(x_i, \eta_s) | \right\|_2 < \infty$$

garantit l'unicité.

I. LE PROBLÈME DES MARTINGALES

Toutes les martingales dont il sera question désormais seront relatives à la famille de tribus $\mathfrak{F}_t$.

Étant donné $\eta \in E$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ sera appelé une solution du (η, c)-problème des martingales si sur cet espace de probabilité $\eta_0 = \eta$ p. s., pour tout $x \in S$, $N_0^x = 0$ p. s. et $f(\eta_t) - \int_0^t Af(\eta_s) ds$ est une martingale pour toute fonction $f \in \mathfrak{D}$.

Étant donné deux processus U et V, on note $U \equiv V$, la relation d'équivalence « $U - V$ est une martingale ».

LEMME I.1. — Si P est solution du (η, c)-problème des martingales, alors :

1) pour tout $x \in S$, $\tilde{\eta}_t^x = \eta_t^x - \int_0^t c(x, \eta_s)(1 - 2\eta_s^x)ds$ est une martingale ;

2) quels que soient x et y dans S :

$$\tilde{\eta}_t^x \tilde{\eta}_t^y \equiv \eta_t^x \eta_t^y - \int_0^t [c(x, \eta_s)(1 - 2\eta_s^x)\eta_s^y + c(y, \eta_s)(1 - 2\eta_s^y)\eta_s^x]ds .$$

Démonstration. — 1) Pour la fonction $f : \eta \mapsto \eta^x$, $f(\eta_t) - \int_0^t Af(\eta_s)ds$ s'écrit $\eta_t^x - \int_0^t c(x, \eta_s)(1 - 2\eta_s^x)ds$.

2) Appelons V_t^x, le processus continu à variations bornées

$$\int_0^t c(x, \eta_s)(1 - 2\eta_s^x)ds .$$

La relation

$$\tilde{\eta}_t^x V_t^y - \int_0^t \tilde{\eta}_s^x dV_s^y = \int_0^t V_s^y d\tilde{\eta}_s^x$$

entraîne

$$\eta_t^x V_t^y - V_t^x V_t^y - \int_0^t \eta_s^x dV_s^y + \int_0^t V_s^x dV_s^y \equiv 0 ,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\eta_t^x V_t^y - \int_0^t \eta_s^x dV_s^y - \int_0^t V_s^y dV_s^x \equiv 0 . \tag{1}$$

D'autre part, la même technique que ci-dessus donne :

$$\tilde{\eta}_t^x \tilde{\eta}_t^y = \eta_t^x \tilde{\eta}_t^y - V_t^x \tilde{\eta}_t^y \equiv \eta_t^x \tilde{\eta}_t^y - \int_0^t \tilde{\eta}_s^y dV_s^x . \tag{2}$$

La formule cherchée s'obtient en faisant la somme des relations (1) et (2).

Rappelons que deux martingales M et N de carrés intégrables sont dites orthogonales si MN est une martingale. Lorsque M et N sont sommes de sauts compensés $M_t N_t - \sum_{s \le t} \Delta M_s \Delta N_s$ est une martingale ([4]) ; M et N sont donc orthogonales si et seulement si elles n'ont aucun saut commun.

THÉORÈME I.2. — Une probabilité P sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ est solution du (η, c)-problème des martingales si elle vérifie les conditions suivantes :

a) $\eta_0 = \eta$ P-presque sûrement ;

b) $\tilde{N}_t^x = N_t^x - \int_0^t c(x, \eta_s)ds$ est une P-martingale centrée, de processus croissant $\int_0^t c(x, \eta_s)ds$; pour tout $x \in S$;

c) Pour $x \neq y$, $\tilde{N}_t^x \tilde{N}_t^y$ est une P-martingale.

Remarques. — Nous avons vu ce que *c*) signifie que N_t^x et N_t^y n'ont aucun saut commun (P p. s.).

— Il est équivalent de dire que le processus croissant de la martingale $\tilde{N}_t^x$ est $\int_0^t c(x, \eta_s)ds$ ou que N_t^x n'a p. s. que des sauts d'amplitude un (i. e. $N_t - N_{t-} = 0$ ou 1). En effet, les relations :

$$(\tilde{N}_t^x)^2 - \int_0^t c(x, \eta_s)ds \equiv (\tilde{N}_t^x)^2 - N_t^x = (\tilde{N}_t^x)^2 - \sum_{s \leq t} N^x(\{s\})$$

et

$$(\tilde{N}_t^x)^2 - \sum_{s \leq t} [N^x(\{s\})]^2 \equiv 0$$

entraînent :

$$(\tilde{N}_t^x)^2 - \int_0^t c(x, \eta_s)ds \equiv \sum_{s \leq t} [[N^x(\{s\})]^2 - N^x(\{s\})] ;$$

le processus $\sum_{s \leq t} [[N^x(\{s\})]^2 - N^x(\{s\})]$ qui est positif, et nul à l'instant 0, ne peut être une martingale sans que (P p. s.) $N^x(\{s\}) = [N^x(\{s\})]^2$ pour tout s.

Démonstration du théorème. — Supposons que P soit solution du (η, c)-problème des martingales. Le lemme I.1 montre que $\tilde{\eta}_t^x$ est une martingale de processus croissant $\int_0^t c(x, \eta_s)ds$ car, pour $x = y$, la relation 2) du lemme I.1 s'écrit :

$$(\tilde{\eta}_t^x)^2 - \int_0^t c(x, \eta_s)ds \equiv (\eta_t^x)^2 - 2\int_0^t c(x, \eta_s)(1 - 2\eta_s^x)ds - \int_0^t c(x, \eta_s)ds = \tilde{\eta}_t^x .$$

Il suffit alors de remarquer que $\tilde{N}_t^x = \int_0^t (1 - 2\eta_{s-}^x)d\tilde{\eta}_s^x$ pour conclure que $\tilde{N}_t^x$ est une martingale de processus croissant $\int_0^t c(x, \eta_s)ds$.

Prenons enfin pour fonction $f : \eta \mapsto \eta^x \eta^y \ (x \neq y)$; $f(\eta_t) - \int_0^t Af(\eta_s)ds$ devient $\eta_t^x \eta_t^y - \int_0^t c(x, \eta_s)(1 - 2\eta_s^x)\eta_s^y ds - \int_0^t c(y, \eta_s)(1 - 2\eta_s^y)\eta_s^x ds$, et le lemme I.1 entraîne que $\tilde{\eta}_t^x$ et $\tilde{\eta}_t^y$ sont des martingales orthogonales, il en est donc de même pour $\tilde{N}_t^x$ et $\tilde{N}_t^y$.

Pour établir la partie réciproque du théorème, il suffit de remarquer que pour toute fonction $f \in \mathfrak{D}$

$$f(\eta_t) - f(\eta_0) - \int_0^t Af(\eta_s)ds = \sum_x \int_0^t [f(\tau_x \eta_{s-}) - f(\eta_{s-})]d\tilde{N}_s^x$$

(la somme de droite étant, en fait, une somme finie).

THÉORÈME I.3. — Si pour tout $\eta \in E$, il y a existence et unicité au (η, c)-problème des martingales et si quels que soient le borélien B de E et le réel $t > 0$, l'application $\eta \mapsto P_\eta [\eta_t \in B]$ est borélienne, alors il existe un unique processus de Markov de générateur A. De plus ce processus est fortement markovien.

La démonstration de ce théorème se calque exactement sur celle de Stroock et Varadhan, exposée dans [*3*].

II. EXISTENCE D'UNE SOLUTION AU PROBLÈME DES MARTINGALES

Nous allons construire une solution du (η, c)-problème des martingales par le biais d'une approximation semblable à celle utilisée dans [*3*].

Fixons-nous un état initial $\eta \in E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par $[s]_n$ la partie entière de $2^n s$ et posons $c_n(x, \eta)_s = c\left(x, \eta_{\frac{[s]_n}{2^n}}\right)$.

PROPOSITION II.1. — Il existe une probabilité P_n sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ qui vérifie :

1) $P_n[\eta_0 = \eta] = 1$;

2) pour tout $x \in S$, $N_t^x - \int_0^t c_n(x, \eta)_s ds$ est une P_n-martingale centrée de processus croissant $\int_0^t c_n(x, \eta)_s ds$ et les martingales correspondant à deux points distincts sont orthogonales.

Démonstration. — Afin de ne pas compliquer inutilement les notations, nous allons détailler la démonstration dans le cas $n = 0$; la démonstration générale est identique.

Désignons par $\mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^*)$ (resp. $\mathfrak{M}\,]0, 1]$ ou $\mathfrak{M}^1$) les mesures de Radon ponctuelles sur $\mathbb{R}_+$ de support contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $]0, 1]$). Considérons l'application $(\eta, (m^x)) \mapsto (\eta_k, (m_k^x))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{0, 1\}^S \times (\mathfrak{M}^1)^S$ dans

$$(\{0, 1\}^S \times (\mathfrak{M}^1)^S)^{\mathbb{N}}$$

définie pour tout x de S par

$$\begin{cases} \eta_k^x = \eta^x + m^x]0, k] \pmod 2 \\ m_k^x(.) = m^x[\theta_k(. \cap]0, 1])] \end{cases}$$

où θ_k désigne la translation de k, sur $\mathbb{R}$. Cette application réalise une bijection sur le sous-ensemble Ω_0 de $(\{0, 1\}^S \times (\mathfrak{M}^1)^S)^{\mathbb{N}}$ tel que pour tous x dans S et k dans $\mathbb{N}$

$$\eta_{k+1}^x = \eta_k^x + m_k^x]0, 1] \pmod 2.$$

Nous désignons désormais par $\pi_{k(.)}$ la probabilité sur $(\mathfrak{M}^1)^S$ qui fait des coordonnées (pour l'élévation à la puissance S) des processus ponctuels de Poisson sur $]0, 1]$ indépendants de paramètre $k(x)$. Soit $\mathbb{P}_\eta$ la probabilité sur $[\{0, 1\}^S \times (\mathfrak{M}^1)^S]^{\mathbb{N}}$ telle que la suite des applications coordonnées forme une chaîne de Markov de mesure initiale $\varepsilon_\eta \otimes \pi_{c(.,\eta)}$ et de probabilité de transition $p((\eta, m), .) = \varepsilon_{\bar\eta} \otimes \pi_{c(.,\eta)}$ où $\bar\eta = \eta + m]0, 1] \pmod 2$. Elle est portée par Ω_0. Considérons maintenant sur $(\mathfrak{M}^1)^S$ les tribus

$$\Phi_t = \sigma\{m_x]0, s]\,;\, s \leq t,\, x \in S\}$$

(pour $0 \leq t \leq 1$). On voit que les tribus Φ_0 sont grossières. On sait que pour la mesure $\pi_{k(.)}$ les expressions $m_x]0, t] - k(x).t$ sont des martingales centrées deux à deux orthogonales par rapport aux Φ_t pour $t \in [0, 1]$. Pour voir cela il suffit de remarquer que nous avons un isomorphisme entre $(\mathfrak{M}^1, \Phi_t, \pi_{k(.)})$ et $\mathfrak{M}[0, 1]$, muni des tribus $\sigma\{m_x[0, s], s \leq t\}$ et de la probabilité $\pi_{k(.)}$ puisque $\pi_{k(.)}$ p. s. $m_x\{0\} = 0$ pour tout x.

Considérons sur l'espace Ω_0 les tribus $\mathscr{G}_t$ définies comme les traces sur Ω_0 des tribus produits

$$(B_{\{0,1\}^S})^{\mathbb{N}} \underbrace{\otimes \Phi_1 \otimes \ldots \otimes \Phi_1}_{[t]\text{-fois}} \otimes \Phi_{t-[t]} \otimes \Phi_0 \otimes \ldots$$

Nous affirmons alors que

$$M_t^x = \sum_{k=0}^{[t]} m_k^x(\theta_{-k}]0, t]) - c(x, \eta_k) + m_{[t]}^x(\theta_{-[t]}(]0, t])) - t - [t])c(x, \eta_{[t]})$$

est une $\mathscr{G}_t$ martingale. Ceci repose sur l'application répétée du résultat

suivant : soient (H_1, A_1) et (H_2, A_2) deux espaces mesurés, B_2 une sous-tribu de A_2, $P(h_1, dh_2)$ une probabilité de transition de H_1 sur H_2, et μ une probabilité sur H_1. Si pour μ presque tout h_1 l'espérance conditionnelle d'une v. a. sur H_2, $X(h_1, .)$, pour la sous-tribu B_2 et la probabilité $P(h_1, .)$ est $Y(h_1, .)$ alors

$$E_{\mathbb{P}}^{B_2 \otimes A_1}(X) = Y$$

où $\mathbb{P}(dh_1, dh_2) = \mu(dh_1)P(h_1, dh_2)$.

En effet, si $0 < t < t + s$, alors

$$E(M_{t+s} \mid \mathscr{G}_t) = E^{\mathscr{G}_t}(E^{\mathscr{G}_{[t]+1}} \ldots E^{\mathscr{G}_{[t+s]}}(M_{t+s})).$$

Or dans la formule définissant M_{t+s} seul le dernier terme n'est pas $\mathscr{G}_{[t+s]}$-mesurable, mais il est d'espérance conditionnelle nulle d'après le résultat cité ci-dessus. En itérant ce calcul, en utilisant le fait que les accroissements sont des Φ_t-martingales pour les probabilités de transition, on trouve finalement que

$$E(M_{t+s} \mid \mathscr{G}_t) = M_t \qquad P_\eta \text{ p. s.}$$

En transportant par l'isomorphisme la probabilité sur $\{0, 1\}^S \times \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+^*)$ on a donc prouvé que les $m^x]0, t] - \int_0^t c_1(x, \eta_s)ds$ étaient une $\mathbb{P}_\eta$-martingale par rapport aux tribus $\sigma\{m^x]0, s]\ s \leq t\}$. $\mathbb{P}_\eta$ peut alors être considérée comme une probabilité sur $(\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}_+))^S$ concentrée sur le sous-ensemble des m vérifiant $m^x\{0\} = 0$ pour tout x de S. Dans ces conditions les tribus $\mathscr{G}_t = \sigma\{m^x]0, s], s \leq t\}$ sont $\mathbb{P}_\eta$ p. s. égales aux $\mathfrak{F}_t = \sigma\{m^x[0, s]\,;\, s \leq t\}$.

cqfd

PROPOSITION II.2. — La suite P_n est étroitement relativement compacte.

Démonstration. — Pour appliquer le théorème de Prohorov cherchons, pour tout $\varepsilon > 0$, un compact K_ε tel que toutes les probabilités P_n soient portées par K_ε à ε près. Nous cherchons K_ε sous la forme

$$\bigcap_x \bigcap_q \overline{\{N_q^x \leq c_q^x\}}$$

où c_q^x est une famille de constantes à déterminer. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$P_n(N_q^x > c_q^x) \leq \frac{1}{c_q^x} E_{P_n}(N_q^x) = \frac{1}{c_q^x} E_{P_n}\left[\int_0^q c_n(x, \eta)_s ds\right] \leq \frac{q \sup_\eta c(x, \eta)}{c_q^x}.$$

Il suffit donc de choisir c_q^x de telle sorte que $\sum_x \sum_q \frac{q \sup_\eta c(x, \eta)}{c_q^x} < \varepsilon$.

Nous pouvons extraire de $(P_n, n \in \mathbb{N})$ une sous-suite (encore notée $(P_n, n \in \mathbb{N}^*)$ qui converge étroitement vers une probabilité P sur $(\Omega, \mathfrak{F})$.

LEMME II.3. — 1) $P[\eta_0 = \eta] = 1$ et pour tout $x \in S$ $P(N_0^x = 0) = 1$.

2) Pour tout $x \in S$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$ $P(T_q^x = T_{q+1}^x < +\infty) = 0$.

3) Étant donnés $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$ et $(x_1, \ldots, x_k) \in S^k$, posons

$$A_{t_1,\ldots,t_k}^{x_1,\ldots,x_k} = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{p} \{ T_p^{x_i} = t_i \}.$$

Soit f une fonction réelle définie sur Ω, bornée, sauf peut-être sur $\{ T_q^x = T_{q+1}^x < +\infty \}$ (pour un $x \in S$ et un $q \in \mathbb{N}^*$), et continue sur le complémentaire de $A_{t_1,\ldots,t_k}^{x_1,\ldots,x_k}$, alors $\int f dP_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f dP$.

Démonstration. — 1) Soit φ_ε une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, comprise entre 0 et 1, à support dans $[0, \varepsilon]$ et vérifiant $\varphi_\varepsilon(0) = 1$. L'application $\omega \to N^x(\omega, \varphi_\varepsilon)$ étant continue, l'ensemble $\left\{ \omega ; N^x(\omega, \varphi_\varepsilon) > \frac{1}{2} \right\}$ est un ouvert de Ω et il vient :

$$P(N_0^x > 0) \leq P\left(\omega ; N^x(\omega, \varphi_\varepsilon) > \frac{1}{2} \right) \leq \liminf_n P_n\left(\omega ; N^x(\omega, \varphi_\varepsilon) > \frac{1}{2} \right).$$

D'autre part, la définition de P_n donne :

$$\begin{aligned} P_n\left(N^x(\omega, \varphi_\varepsilon) > \frac{1}{2} \right) \leq P_n(N_\varepsilon^x > 0) &= P_n(N_\varepsilon^x \geq 1) \leq E_{P_n}(N_\varepsilon^x) \\ &= E_{P_n}\left(\int_0^\varepsilon c_n(x, \eta)_s ds \right) \leq \varepsilon \sup_\eta c(x, \eta). \end{aligned}$$

Il en résulte que $P(N_0^x > 0) \leq \varepsilon \sup_\eta c(x, \eta)$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui montre que $P(N_0^x > 0) = 0$.

L'application $\omega \mapsto \xi^x(\omega)$ étant continue, l'ensemble $\{ \xi^x \neq \eta^x \}$ est un ouvert de Ω de probabilité nulle pour toutes les P_n, donc de P probabilité nulle. Il en résulte que $P[\eta_0 \neq \eta] = 0$ car :

$$P[\eta_0 \neq \eta] \leq P\left[\sum_x (\eta_0^x \neq \eta^x) \right] \leq \sum_x P[(\xi^x \neq \eta^x) \cup (N_0^x = 0)].$$

2) Le théorème d'arrêt appliqué à la P_n-martingale $N_t^x - \int_0^t c_n(x, \eta)_s ds$ et aux temps d'arrêt T_q^x et $(T_q^x + \varepsilon) \wedge T_{q+1}^x$ donne :

$$P_n[T_{q+1}^x < T_q^x + \varepsilon] = E_{P_n}\left[\int_{T_q^x}^{(T_q^x + \varepsilon) \wedge T_{q+1}^x} c_n(x, \eta)_s ds \right] \leq \varepsilon \sup_\eta c(x, \eta).$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{T}_q^x = \mathrm{T}_{q+1}^x < +\infty) &\leq \mathrm{P}(\mathrm{T}_{q+1}^x < \mathrm{T}_q^x + \varepsilon) \\ &\leq \liminf_n \mathrm{P}_n(\mathrm{T}_{q+1}^x < \mathrm{T}_q^x + \varepsilon) \leq \varepsilon \sup_\eta c(x, \eta),\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

3) Étant donné $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon_{p,i} = \dfrac{\varepsilon}{k2^{p+2} \sup_\eta c(x_i, \eta)}$

et

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{2 \sup_\eta c(x, \eta)}.$$

L'ensemble $\mathrm{F}_\varepsilon = \left[\bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_p (t_i - \varepsilon_{p,i} < \mathrm{T}_p^{x_i} + \varepsilon_{p,i})^c\right] \cap (\mathrm{T}_{q+1}^x < \mathrm{T}_q^x + \varepsilon_x)^c$ est un fermé de Ω inclus dans le complémentaire de $\mathrm{A}_{t_1,\ldots,t_k}^{x_1,\ldots,x_k} \cup (\mathrm{T}_q^x = \mathrm{T}_{q+1}^x < +\infty)$ et de P_n-probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$, pour tout n. En effet, nous pouvons écrire :

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{T}_{q+1}^x < \mathrm{T}_q^x + \varepsilon_x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ (d'après 2))}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n(t_i - \varepsilon_{p,i} < \mathrm{T}_p^{x_i} < t_i + \varepsilon_{p,i}) &\leq \mathrm{P}_n(\mathrm{N}_{t_i+\varepsilon_{p,i}}^{x_i} \geq 1) \leq \mathrm{E}_{\mathrm{P}_n}(\mathrm{N}_{t_i+\varepsilon_{p,i}}^{x_i} - \mathrm{N}_{t_i-\varepsilon_{p,i}}^{x_i}) \\ &= \mathrm{E}_{\mathrm{P}_n}\left(\int_{t_i-\varepsilon_{p,i}}^{t_i+\varepsilon_{p,i}} c_n(x_i, \eta)_s ds\right) \leq \frac{\varepsilon}{k2^{p+1}}.\end{aligned}$$

F_ε est donc également de P-probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$.

Si f est une fonction réelle, bornée par M sauf sur $\{\mathrm{T}_{q+1}^x = \mathrm{T}_q^x < +\infty\}$, continue sur le complémentaire de $\mathrm{A}_{t_1,\ldots,t_k}^{x_1,\ldots,x_k}$, il existe une fonction F_ε continue sur Ω, bornée par M et égale à f sur F_ε. Les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}&\left|\int f d\mathrm{P}_n - \int f d\mathrm{P}\right| \\ &\leq \left|\int f d\mathrm{P}_n - \int f_\varepsilon d\mathrm{P}_n\right| + \left|\int f_\varepsilon d\mathrm{P}_n - \int f_\varepsilon d\mathrm{P}\right| + \left|\int f_\varepsilon d\mathrm{P} - \int f d\mathrm{P}\right| \\ &\leq 2\mathrm{M}\mathrm{P}_n(\mathrm{F}_\varepsilon^c) + \left|\int f_\varepsilon d\mathrm{P}_n - \int f_\varepsilon d\mathrm{P}\right| + 2\mathrm{M}\mathrm{P}(\mathrm{F}_\varepsilon^c) \leq 4\mathrm{M}\varepsilon + \left|\int f_\varepsilon d\mathrm{P}_n - \int f_\varepsilon d\mathrm{P}\right|,\end{aligned}$$

vraies pour tout n, montrent que :

$$\limsup_n \left|\int f d\mathrm{P}_n - \int f d\mathrm{P}\right| = 0.$$

THÉORÈME II.4. — P est solution du (η, c)-problème des martingales.

Démonstration. — Nous avons vu que la condition *a*) du théorème I.2 est vérifiée. Pour établir la condition *b*) il suffit de montrer que pour tout $p \geq 1$, $N^x_{t \wedge T^x_p} - \int_0^{t \wedge T^x_p} c(x, \eta_s)ds$ est une P-martingale de processus croissant $\int_0^{t \wedge T^x_p} c(x, \eta_s)ds$ (car le processus $\int_0^{t \wedge T^x_p} c(x, \eta_s)ds$ est uniformément borné sur $[0, T]$, $T > 0$, ([*4*]). Donnons-nous deux réels t_1 et t_2, $0 \leq t_1 \leq t_2$ et une fonction Φ, $\mathfrak{F}_{t_1}$-mesurable et bornée, de la forme $\Phi = f(N^{x_1}_{s_1}, \ldots, N^{x_n}_{s_n})$ $(s_i \leq t_1)$. La définition de P_n entraîne :

$$E_{P_n}\left[\Phi\left(N^x_{t_1 \wedge T^x_p} - \int_0^{t_1 \wedge T^x_p} c_n(x, \eta)_s ds\right)\right] = E_{P_n}\left[\Phi\left(N^x_{t_2 \wedge T^x_p} - \int_0^{t_2 \wedge T^x_p} c_n(x, \eta)_s ds\right)\right].$$

La fonction Φ (respectivement $N^x_{t_i \wedge T^x_p}$) est bornée sur Ω (respectivement sur le complémentaire de $(T^x_p = T^x_{p+1} < +\infty)$) et continue sur le complémentaire de $A^{x_1,\ldots,x_n}_{s_1,\ldots,s_n}$ (respectivement de A^x_t), donc :

$$E_{P_n}[\Phi N^x_{t \wedge T^x_p}] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} E_P[\Phi N^x_{t \wedge T^x_p}] \qquad (\text{pour } t = t_1, t_2).$$

D'autre part

$$E_{P_n}\left[\Phi \int_0^{t \wedge T^x_p} c(x, \eta_s)ds\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} E_P\left[\Phi \int_0^{t \wedge T^x_p} c(x, \eta_s)ds\right]$$

car $\omega \mapsto \int_0^{t \wedge T^x_p(\omega)} c(x, \eta_s(\omega))ds$ est une fonction continue et bornée. Enfin

$$\left| E_{P_n}\left(\Phi \int_0^{t \wedge T^x_p} c_n(x, \eta)_s ds\right) - E_{P_n}\left(\Phi \int_0^{t \wedge T^x_p} c(x, \eta_s)ds\right)\right|$$
$$\leq \sup_\omega |\Phi(\omega)| \, E_{P_n}\left(\int_0^t |c_n(x, \eta)_s - c(x, \eta_s)| \, ds\right).$$

La fonction $c(x, .)$ est continue sur le compact $\{0, 1\}^S$, donc uniformément continue. Étant donné ε, il existe $(x_1, \ldots, x_N)$ tels que si $\eta = \eta'$ sur $\{x_1, \ldots, x_N\}$ alors $|c(x, \eta) - c(x, \eta')| \leq \frac{\varepsilon}{4}$; par conséquent, en posant $M = \sup_{\substack{\eta \in E \\ i=1,\ldots,N}} c(x_i, \eta)$ nous obtenons :

$$E_{P_n}\left[\int_0^t \left| c\left(x, \eta_{\frac{[s]_n}{2^n}}\right) - c(x, \eta_s)\right| ds\right] \leq \frac{\varepsilon}{2} t + E_{P_n}\left[\frac{2M}{2^n} \sum_{i=1}^N N^{x_i}_t\right]$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} t + \frac{2M}{2^n} NtM.$$

Nous en déduisons que

$$E_{P_n}\left[\Phi \int_0^{t \wedge T_{\bar{p}}^x} c_n(x, \eta)_s ds\right] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} E_P\left[\Phi \int_0^{t \wedge T_{\bar{p}}^x} c(x, \eta_s) ds\right].$$

Nous avons ainsi montré que $N_{t \wedge T_{\bar{p}}^x}^x - \int_0^{t \wedge T_{\bar{p}}^x} c(x, \eta_s) ds$ est une P-martingale. Nous montrerions de même que $(\tilde{N}_{t \wedge T_{\bar{p}}^x})^2 - \int_0^{t \wedge T_{\bar{p}}^x} c(x, \eta_s) ds$ est une P-martingale.

Pour vérifier la condition c) du théorème I.2, les mêmes arguments que précédemment prouvent que la propriété, vraie pour les P_n et les c_n, se conserve à la limite.

On peut remarquer que la probabilité P_η ainsi construite, solution du (η, c)-problème des martingales vérifie : pour tout borélien B de E et pour tout $t \geq 0$, l'application $\eta \mapsto P_\eta[\eta_t \in B]$ est borélienne.

III. UNICITÉ DE LA SOLUTION

Soient P_η et Q_η deux solutions au (η, c)-problème des martingales ; nous pouvons supposer que Q_η est majorée par un multiple de P_η (quitte à remplacer P_η par $\frac{P_\eta + Q_\eta}{2}$, qui est aussi solution), c'est-à-dire que $Q_\eta = G.P_\eta$ où G est une variable aléatoire positive bornée.

LEMME III.1. — Avec les notations ci-dessus, $M_t = E^{\mathscr{F}_t}(G)$ est une P_η-martingale orthogonale à toutes les martingales $\tilde{N}_t^x (x \in S)$.

Démonstration. — Soit $x \in S$. Donnons-nous deux réels s et t, $0 \leq s \leq t$ et une fonction Φ, $\mathfrak{F}_s$-mesurable et bornée, alors :

$$\int \Phi . \tilde{N}_t^x M_t dP_\eta = \int \Phi . \tilde{N}_t^x E^{\mathscr{F}_t}(G) dP_\eta = \int \Phi . \tilde{N}_t^x G dP_\eta$$

car $\Phi . \tilde{N}_t^x$ est $\mathfrak{F}_t$-mesurable. En utilisant le fait que $\tilde{N}_t^x$ est une $G.P_\eta$-martingale, nous obtenons :

$$\int \Phi . \tilde{N}_t^x M_t dP_\eta = \int \Phi . \tilde{N}_s^x G dP_\eta = \int \Phi . \tilde{N}_s^x E^{\mathscr{F}_x}(G) dP_\eta = \int \Phi . \tilde{N}_s^x M_s dP_\eta,$$

ce qui montre que $\tilde{N}_t^x M_t$ est une P_η-martingale.

Considérons donc une solution P au (η, c)-problème des martingales ; pour prouver que cette solution est unique, il suffit de montrer que toute martingale $M_t = E^{\mathscr{F}_t}(G)$, orthogonale à toutes les martingales $\tilde{N}_t^x (x \in S)$

est constante. Nous pouvons supposer désormais que la martingale M_t est centrée, c. à. d. que $M_0 = 0$ puisque $\mathfrak{F}_0$ est $\mathbb{P}_\eta$-triviale.

Remarque. — Nous noterons dans toute cette partie $E^{\mathscr{F}_t}(G)$ une version continue à droite de la martingale $E^{\mathscr{F}_t}(G)$.

1) Le cas fini

Chou et Meyer [*1*], Davis [*2*], Jacod [*8*] ont montré le résultat suivant : étant donné un nombre fini de points de S $(x_i\,;\, i = 1, \ldots, n)$ soit $\mathscr{G}_t$ la tribu des parties de Ω engendrée par ξ^{x_i} et $N_s^{x_i}$ $(i = 1, \ldots, n\,;\, s \leq t)$. Supposons que pour tout i, il existe un processus $k(x_i, t)$ mesurable, $\mathscr{G}_t$-adapté tel que $\tilde{N}_t^{x_i} = N_t^{x_i} - \int_0^t k(x_i, s)ds$ soit une $\mathscr{G}_t$-martingale centrée (de carré intégrable). Alors toute $\mathscr{G}_t$-martingale centrée M, de carré intégrable s'écrit $M = \sum_{i=1}^{n} \Phi^{x_i}\tilde{N}^{x_i}$ où Φ^{x_i} est un processus prévisible, et $\Phi^{x_i}\tilde{N}^{x_i}$ désigne la martingale $\int_0 \Phi_s^{x_i} d\tilde{N}_s^{x_i}$. En particulier toute $\mathscr{G}_t$-martingale continue est nulle

2) Le cas général

Soit B_n une suite croissante de sous-ensembles finis de S dont la réunion est S. Nous notons $\mathfrak{F}_t^n$ la tribu $\mathfrak{F}_t^{B_n}$ engendrée par ξ^x et N_s^x $(x \in B_n,\, s \leqslant t)$. Posons $M_t^n = E^{\mathscr{F}_t^n}(M_t)$; M_t^n est une $\mathfrak{F}_t^n$-martingale.

Lemme III.2. — Pour tout $x \in B_n$,

$$\tilde{N}_t^{x,n} = N_t^x - \int_0^t E^{\mathscr{F}_s^n}[c(x, \eta_s)]ds$$

est une $\mathfrak{F}_t^n$-martingale.

Démonstration. — Par hypothèse $N_t^x - \int_0^t c(x, \eta_s)ds$ est une $\mathfrak{F}_t$-martingale, donc $N_t^x - E^{\mathscr{F}_t^n}\left[\int_0^t c(x, \eta_s)ds\right]$ est une $\mathfrak{F}_t^n$-martingale. Le lemme sera démontré dès que nous aurons vérifié que :

$$E^{\mathscr{F}_t^n}\left[\int_0^t c(x, \eta_u)du\right] - \int_0^t E^{\mathscr{F}_u^n} c(x, \eta_u)du \qquad \text{est une } \mathfrak{F}_t^n\text{-martingale.}$$

Soit $0 \leq s \leq t$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}\left[\mathrm{E}^{\mathcal{F}_t^n}\left[\int_0^t c(x, \eta_u)du\right] - \int_0^t \mathrm{E}^{\mathcal{F}_u^n}c(x, \eta_u)du\right] \\
&\quad = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}\left[\int_0^t c(x, \eta_u)du\right] - \int_0^s \mathrm{E}^{\mathcal{F}_u^n}c(x, \eta_u)du - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}\left[\int_s^t \mathrm{E}^{\mathcal{F}_u^n}c(x, \eta_u)du\right] \\
&\quad = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}\left[\int_0^t c(x, \eta_u)du\right] - \int_0^s \mathrm{E}^{\mathcal{F}_u^n}c(x, \eta_u)du - \int_s^t \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}c(x, \eta_u)du \\
&\quad = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}\left[\int_0^s c(x, \eta_u)du\right] - \int_0^s \mathrm{E}^{\mathcal{F}_u^n}c(x, \eta_u)du\,.
\end{aligned}$$

D'après le paragraphe précédent, M^n s'écrit $\sum_{x \in \mathrm{B}_n} \Phi^{x,n}\tilde{\mathrm{N}}^{x,n}$. Les martingales $(\tilde{\mathrm{N}}^{x,n}\,;\, x \in \mathrm{B}_n)$ sont orthogonales (car sans saut commun) et de processus croissant $\int_0^t \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}c(x, \eta_s)ds$ (car N^x n'a que des sauts d'amplitude un) nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(\mathrm{M}_t^n)^2] &= \sum_{x \in \mathrm{B}_n} \mathrm{E}\left[\int_0^t (\Phi_s^{x,n})^2 \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}(c(x, \eta_s))ds\right] \\
&= \sum_{x_i \in \mathrm{B}_n} \mathrm{E}\left[\int_0^t (\Phi_s^{x_i,n})^2 c(x_i, \eta_s)ds\right].
\end{aligned}$$

LEMME III.3. — Pour tout $x \in \mathrm{B}_n$ et tout $t > 0$:

$$\int_0^t \Phi_s^{x,n}\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}c(x, \eta_s)ds = \int_0^t [\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}[\mathrm{M}_s c(x, \eta_s)] - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}(\mathrm{M}_s)\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}(c(x, \eta_s))]ds$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathrm{B}_n$, par hypothèse :

$$\mathrm{M}_t\tilde{\mathrm{N}}_t^x = \mathrm{M}_t\mathrm{N}_t^x - \mathrm{M}_t \int_0^t c(x, \eta_s)ds$$

est une $\mathfrak{F}_t$-martingale. Or

$$\mathrm{M}_t \int_0^t c(x, \eta_s)ds - \int_0^t \mathrm{M}_s c(x, \eta_s)ds = \int_0^t c(x, \eta_{s-})d\mathrm{M}_s$$

est aussi une $\mathfrak{F}_t$-martingale. Il s'en suit que :

$$\mathrm{M}_t\tilde{\mathrm{N}}_t^x - \int_0^t \mathrm{M}_s c(x, \eta_s)ds$$

est une $\mathfrak{F}_t$-martingale.

Par la même technique que dans le lemme III.2, nous en déduisons que si $x \in B_n$:

$$(1) \qquad E^{\mathcal{F}_t^n}(M_t)\tilde{N}_t^x - \int_0^t E^{\mathcal{F}_s^n}[M_s c(x, \eta_s)]ds \qquad \text{est une } \mathfrak{F}_t^n\text{-martingale.}$$

D'autre part, la relation $M^n = \sum_{y \in B_n} \Phi^{y,n}\tilde{N}^{y,n}$ entraîne que

$$M_t^n \tilde{N}_t^{x,n} - \int_0^t \Phi_s^{x,n} E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s)ds$$

est une $\mathfrak{F}_t^n$-martingale. Mais, pour les mêmes raisons que ci-dessus :

$$M_t^n \int_0^t E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s)ds - \int_0^t M_s^n E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s)ds$$

est également une $\mathfrak{F}_t^n$-martingale. Par différence nous obtenons que :

$$(2) \qquad M_t^n N_t^x - \int_0^t M_s^n E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s)ds - \int_0^t \Phi_s^{x,n} E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s)ds$$

est une $\mathfrak{F}_t^n$-martingale. En comparant les relations (1) et (2) nous voyons que

$$\int_0^t M_s^n E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s)ds + \int_0^t \Phi_s^{x,n} E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s)ds - \int_0^t E^{\mathcal{F}_s^n}[M_s c(x, \eta_s)]ds$$

est une $\mathfrak{F}_t^n$-martingale continue, donc nulle.

COROLLAIRE III.4.

$$E[(M_t^n)^2] = \int_0^t E\left[\sum_{x \in B_n} \Phi_s^{n,x}[c(x, \eta_s) - E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s)][M_s - E^{\mathcal{F}_s^n} M_s]\right]ds.$$

THÉORÈME III.5. — Si pour toute solution P on a :

$$\sup_s \sup_n \left\| \sum_{x \in B_n} | c(x, \eta_s) - E^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s) | \right\|_2 < +\infty,$$

il existe une unique solution au (η, c)-problème des martingales.

Démonstration. — L'inégalité de Schwarz entraîne :

$$(\mathrm{E}[(\mathrm{M}_t^n)^2])^2 \leq \left\{ \int_0^t \mathrm{E}\left[\sum_{x\in \mathrm{B}_n} (\mathrm{M}_s - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}\mathrm{M}_s)^2 \mid c(x, \eta_s) - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s) \mid \right] ds \right\}$$
$$\times \left\{ \int_0^t \mathrm{E}\left[\sum_{x\in \mathrm{B}_n} (\Phi_s^{n,x})^2 \mid c(x, \eta_s) - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s) \mid \right] ds \right\}.$$

Or :

$$\int_0^t \mathrm{E}\left[\sum_{x\in \mathrm{B}_n} (\Phi_s^{n,x})^2 \mid c(x, \eta_s) - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s) \mid \right] ds \leq 2\mathrm{E}[(\mathrm{M}_t^n)^2],$$

d'après les inégalités précédant le lemme III.3. Nous en déduisons, en utilisant à nouveau l'inégalité de Schwarz, que :

$$\mathrm{E}[(\mathrm{M}_t^n)^2]$$
$$\leq 2\left\{ \int_0^t \mathrm{E}[(\mathrm{M}_s - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}\mathrm{M}_s)^4] ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^t \mathrm{E}\left[\left(\sum_{x\in \mathrm{B}_n} \mid c(x, \eta_s) - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s) \mid \right)^2\right] \right\}^{1/2}$$
$$\leq 2\sqrt{t} \left\{ \int_0^t \mathrm{E}[(\mathrm{M}_s - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n}\mathrm{M}_s)^4] ds \right\}^{1/2} \sup_s \sup_n \left\| \sum_{x\in \mathrm{B}_n} \mid c(x, \eta_s) - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s) \mid \right\|_2 .$$

Donc $\mathrm{E}[\mathrm{M}_t^2] = \lim_n \mathrm{E}[(\mathrm{M}_t^n)^2] = 0$. Nous avons montré que P-p. s., $\mathrm{M}_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (car M_t est continue à droite).

COROLLAIRE III.6. — Si pour tout $x \in \mathrm{S}$, $\eta \to c(x, \eta)$ est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}_+$ et si pour toute solution P on a :

$$\sup_s \sup_n \left\| \sum_{x\in \mathrm{B}_n} \mid c(x, \eta_s) - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^n} c(x, \eta_s) \mid \right\|_2 < +\infty$$

pour une suite B_n de sous-ensembles finis de S croissant vers S, alors il existe un processus fortement markovien $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \eta_t, \mathrm{P}_\eta)$ dont le générateur infinitésimal est donné par

$$\mathrm{A}f(\eta) = \sum_x c(x, \eta)[f(\tau_x \eta) - f(\eta)] \qquad \text{pour } f \in \mathfrak{D}.$$

Remarque. — Nous retrouvons ainsi l'existence d'un processus fortement markovien, sous les conditions données par Holley ([*6*]), c'est-à-dire s'il existe une constante $\mathrm{L} > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathrm{S}$, il existe une suite $c_n(x, .)$ d'applications de E dans [0, L] qui converge uniformément vers

$c(x, .)$, $c_n(x, .)$ ne dépendant que des coordonnées dans B_n, et si en outre :

$$\sup_n \sup_\eta \sum_{x \in B_n} | c(x, \eta) - c_n(x, \eta) | < + \infty .$$

Nous ne retrouvons malheureusement pas les conditions de Liggett ([9]). Il semble que nous ne réussissions pas à exploiter correctement le corollaire III.4, comme le montre l'exemple suivant qui ne vérifie pas les conditions du théorème III.5 et que nous pouvons cependant résoudre.

Exemple. — Nous nous plaçons sur $S = \mathbb{Z}^2$ et nous supposons que $c(x, \eta)$ ne dépend que des valeurs de η sur les points ayant même première projection que x.

Pour tout entier $N > 0$, désignons par A_N l'ensemble des points de $\mathbb{Z}^2$ dont la première projection est de module inférieur à N, par $\mathcal{G}_t^N$ la tribu engendrée par les variables aléatoires ξ^x et N_s^x ($s \leq t$, $x \in A_N$). Soit M_t une $\mathfrak{F}_t$-martingale centrée, continue à droite, orthogonale à toutes les martingales $\tilde{N}_t^x$, alors $E^{\mathcal{G}_t^N}(M_t)$ est orthogonale à toutes les martingales $\tilde{N}_t^x$ ($x \in A_N$) (car ce sont aussi des $\mathcal{G}_t^N$-martingales) et converge dans L^2 vers M_t lorsque $N \to +\infty$. Pour montrer que M_t est nulle, il suffit de vérifier que toute $\mathcal{G}_t^N$-martingale centrée orthogonale aux martingales $\tilde{N}_t^x$ ($x \in A_N$) est nulle. Nous sommes donc ramenés à un processus sur A_N ; or sur A_N le processus considéré vérifie les conditions du théorème III.5.

Remerciements

Nous tenons à remercier vivement M. J. Neveu pour son aide précieuse au cours de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. S. Chou et P. A. Meyer, *Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels*, Séminaire de Probabilités, 1973-1974, Springer-Verlag.

[2] M. H. A. Davies, The representation of martingales of jumps processes, *to appear*.

[3] C. Dellacherie, C. Doléans et P. A. Meyer, *Exposés sur les diffusions d'après Stroock et Varadhan*, Séminaire de Probabilités IV, 1968-1969, Springer-Verlag.

[4] C. Doléans et P. A. Meyer, *Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales*, Séminaire de Probabilités IV, 1968-1969, Springer-Verlag.

[5] L. Gray and D. Griffeath, On the uniqueness of certain interacting particle systems, *Z. Wahrscheinlichtkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **35**, 1976, p. 75-86.

[6] R. Holley, A class of interaction in an infinite particles system, *Adv. in Math.*, t. **5**, 1970, p. 291-309.

[7] R. Holley and D. Stroock, A martingale approach to infinite systems of interacting processes, *Ann. of Probability*, t. **4**, 1976, p. 195-228.

[*8*] J. JACOD, Multivariate point processes, predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales, *Z. Wahrscheinlichtkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **31**, 1975, p. 235-253.

[*9*] T. M. LIGGETT, Existence theorems for infinite particle systems, *T. A. M. S.*, March 1972, p. 471-481.

[*10*] F. SPITZER, Interactions of Markov processes, *Adv. in Math.*, t. **5**, 1970, p. 246-290.

(Manuscrit reçu le 2 juin 1977)