ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CLAUDE DELODE

Champs mesurables d'espaces sousliniens

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 2 (1977), p. 181-191

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_2_181_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. XIII, n° 2, 1977, p. 181-191.

Section B : *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Champs mesurables d'espaces sousliniens

par

Claude DELODE

Faculté des Sciences exactes.
Département de Mathématiques, B. P. 523, 64010 Pau - Université

SUMMARY. — In [*1*] we introduced measurable fields of metric spaces. We treat here the case of topological spaces, concentrating our attention specially on souslinian fields.

On a introduit dans [*1*] la notion de champ mesurable d'espaces métriques, notion qui englobe le cas des champs mesurables à valeurs dans un espace polonais.

On traite ici le cas de champs mesurables d'espaces topologiques. Pour les champs sousliniens, on établit que les multisections mesurables ont pour image un sous-champ souslinien et qu'inversement les sous-champs sousliniens sont des images de multisections.

On établit une caractérisation des sous-champs sousliniens d'un champ souslinien comme image de multiapplications mesurables, généralisant ainsi les principaux résultats de [*1*] [*4*] et [*5*].

I. PRÉLIMINAIRES

1.1. DÉFINITION. — *Un champ d'espaces topologiques est la donnée d'un ensemble* T *et d'une famille* $(E_t, \mathcal{O}_t)_{t \in T}$ *d'espaces topologiques.*

Un champ d'espaces topologiques peut être aussi défini par la donnée d'une application surjective entre deux ensembles $p : E \to T$, chaque $E_t = p^{-1}(t)$, $t \in T$ étant muni d'une topologie.

On dit que T est la base, $E = \bigcup_{t \in T} E_t$ l'espace total, p la projection, E_t la fibre au-dessus de t. Une section de p est une inverse à droite s de p c'est-à-dire que

$$p \circ s = I_T .$$

1.2. DÉFINITION. — *Un champ mesurable d'espaces topologiques est la donnée d'un champ d'espaces topologiques* (E, T, p), *d'une tribu* $\mathscr{T}$ *sur* T *et d'une tribu* $\mathscr{E}$ *sur* E *vérifiant les conditions suivantes :*

i) p *est* $\mathscr{E} - \mathscr{T}$ *mesurable : pour tout* $S \in \mathscr{T} p^{-1}(S) \in \mathscr{E}$.

ii) $\mathscr{E}$ *induit sur les fibres la tribu borélienne.*

1.3. DÉFINITION. — *Soient* $p = (E, \mathscr{E}, T, \mathscr{T}, p)$ *et* $q = (F, \mathscr{F}, T, \mathscr{T}, q)$ *deux champs mesurables d'espaces topologiques. Un morphisme* $f : E \to F$ *est une application vérifiant les propriétés suivantes :*

i) f *est fibrée c'est-à-dire* $p = q \circ f$.

ii) *Pour tout* $t \in T$, $f \mid E_t$ *est continue de* E_t *dans* F_t.

iii) f *est* $\mathscr{E} - \mathscr{F}$ *mesurable.*

Rappelons que si E et F sont des champs séparables d'espaces métriques [*1*], on peut remplacer la condition *iii*), par la condition équivalente suivante, *i*) et *ii*) étant vérifiées.

iii') Pour toute section $s : T \to E$ mesurable, $f \circ s : T \to F$ est mesurable (cf. prop. 1.15 [*1*]).

1.4. DÉFINITION. — *Donnons quelques constructions classiques en théorie des espaces fibrés.*

a) Sous-champs : *un sous-champ d'un champ mesurable d'espaces topologiques* $p = (E, \mathscr{E}, T, \mathscr{T}, p)$ *est un champ* $(E', \mathscr{E}', T', \mathscr{T}', p')$ *avec* $E' \subset E$, $T' \subset T$, $\mathscr{T}' = \mathscr{T} \mid T$, $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \mid E$ *et* $p' = p \mid T$, *les topologies étant les topologies induites.*

b) Les champs produit, produit fibré, *se construisent de la même façon qu'en* [*1*] *sous réserve de supposer que l'un des deux champs est à fibre de Lindelöff afin que l'on ait* $\mathscr{B}(E_t \times F_t) = \mathscr{B}(E_t) \otimes \mathscr{B}(F_t)$ *ce qui sera le cas dans tous les champs utilisés ici.*

1.5. EXEMPLES DE CHAMPS TOPOLOGIQUES. — a) *Champ trivial :* si X est un espace topologique et (T, $\mathscr{T}$) un espace mesurable, on pose $E = T \times X$, $\mathscr{E} = \mathscr{T} \otimes \mathscr{B}_X$ et pour p on prend la projection de E sur T.

b) *Champs mesurables d'espaces métriques :* soit (E, T, p) un champ d'espaces topologiques où pour tout $t \in T$, (E_t, d_t) est un espace métrique et soit $\mathscr{T}$ une tribu sur T. On se donne de plus une famille X de sections de p satisfaisant à certains axiomes de compatibilité (cf. [*1*] définition 1.2).

On appelle tube centré en x et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B(x, r) = \{ e \in E \mid d_{p(e)}(e, x(p(e))) < r \} ;$$

si $A \in \mathscr{T}$, un bout de tube de base A est l'ensemble $B(x, r) \cap p^{-1}(A)$.

La tribu engendrée par les bouts de réunions de tube a les propriétés de 1.2 et par conséquent on obtient ainsi un champ mesurable d'espaces topologiques.

Les champs mesurables d'espaces métriques et plus précisément les champs mesurables séparables sont étudiés en détail dans [*1*].

c) Si E et T sont des espaces topologiques, $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_T$ les tribus boréliennes associées et si $p : E \to T$ est une application continue alors $p = (E, \mathscr{B}_E, T, \mathscr{B}_T, p)$ est un champ mesurable topologique.

d) *Champ topologique faible :* on se donne deux champs mesurables séparables d'espaces de Banach (cf. Dixmier-Douady [*2*]) E et F de même base T ; de projection p et q et on note respectivement $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ la tribu des tubes de E et de F.

On suppose qu'il existe une application $b : E \underset{T}{\times} F \to \mathbb{R}$, mesurable pour la restriction $\mathscr{E} \otimes \mathscr{F} \mid E \underset{T}{\times} F$ de la tribu produit $\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}$ telle que pour tout $t \in T$ $b \mid E_t \times F_t$ mette E_t et F_t en dualité séparante.

La tribu $\mathscr{W}$ sur E engendrée par les ensembles

$$W_{l,n} = \{ e \in E : | \langle e - a_l(t), b_k(t) \rangle | < 1, k = 1, \ldots, n, t = p(e) \}$$

où $X_0 = \{ a_l \}$ et $Y_0 = \{ b_k \}$ sont des familles fondamentales de sections mesurables de respectivement E et F, induit sur chaque fibre E_t la tribu borélienne de la topologie faible $\sigma(E_t, F_t)$.

D'autre part, p est mesurable pour la tribu $\mathscr{W}$ puisque si $A \in \mathscr{T}$,

$$p^{-1}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ z \in E / \langle z, \chi_A b_n \rangle \neq 0 \}$$

χ_A étant la fonction caractéristique de A.

Nous obtenons donc un champ mesurable d'espaces topologiques.

Remarquons d'autre part que la tribu faible est une sous-tribu de $\mathscr{E}$.

1.6. DÉFINITION. — *Soit* $p = (E, \mathscr{E}, T, \mathscr{T}, p)$ *un champ mesurable d'espaces topologiques. On appelle multisection mesurable de p une multiapplication mesurable* $\Gamma : T \to E$ *telle que* $p \circ \Gamma = I_T$.

Rappelons qu'une multiapplication Γ entre deux espaces mesurables $(\mathrm{T}, \mathscr{T})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$ est dite mesurable si pour tout $a \in \mathscr{E}$,

$$\Gamma^{-}(\mathrm{A}) = \{ t \in \mathrm{T} ; \Gamma(t) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing \} \in \mathscr{T}$$

ou encore si pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$,

$$\Gamma^{+}(\mathrm{A}) = \{ t \in \mathrm{T} ; \Gamma(t) \subset \mathrm{A} \} = p(\Gamma(\mathrm{T}) \cap \mathrm{A}) \in \mathscr{T}.$$

Remarquons qu'une multisection Γ de p est mesurable si et seulement si pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, $p(\Gamma(\mathrm{T}) \cap \mathrm{A})$ appartient à $\mathscr{T}$ car $p(\Gamma(\mathrm{T}) \cap \mathrm{A}) = \Gamma^{-}(\mathrm{A})$.

Cette définition est plus stricte que celle qui a été introduite dans [*1*] (définition 2.2) pour les champs mesurables séparables d'espaces métriques, qui requiert seulement que $\Gamma^{-}(\mathrm{A}) \in \mathscr{T}$ si A est une intersection finie de tubes ouverts.

Si $\mathscr{T}$ est souslinienne, p étant un champ mesurable polonais et si Γ est à valeurs fermées les deux définitions coïncident.

1.7. Définition. — *Un champ mesurable topologique* $(\mathrm{E}, \mathscr{E}, \mathrm{T}, \mathscr{T}, p)$ *est dit souslinien si toutes ses fibres sont des espaces topologiques séparés et s'il existe un champ polonais* P *de base* $(\mathrm{T}, \mathscr{T})$ *et un morphisme* f *tels que* $f(\mathrm{P}) = \mathrm{E}$.

Un champ souslinien est par construction même, muni d'une famille dénombrable de sections de valeurs dense puisque la famille de sections dense du champ polonais se transforme par le morphisme f en une famille de sections de valeurs dense. D'autre part si l'on désigne par $\mathrm{S}(\mathscr{E})$ l'ensemble des $\mathscr{E}$-sousliniens (cf. [*1*], 3.1) on a le théorème de projection suivant :

1.8. Proposition. — *Si* $(\mathrm{E}, \mathscr{E}, \mathrm{T}, \mathscr{T}, p)$ *est un champ souslinien et si* $\mathscr{T}$ *est une tribu souslinienne* (i. e. $\mathrm{S}(\mathscr{T}) \subset \mathscr{T}$) *alors pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{S}(\mathscr{E})$ *on a* $p(\mathrm{A}) \in \mathscr{T}$.

En effet, si P désigne le champ polonais, $\mathscr{P}$ sa tribu engendrée par les bouts de tubes, f le morphisme tel que $f(\mathrm{P}) = \mathrm{E}$ et q la projection de P sur T, pour tout $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ on a $p(\mathrm{A}) = q(f^{-1}(\mathrm{A}))$ puisque f est fibrée et surjective. On peut appliquer la proposition 3.9 de [*1*] qui donne le résultat puisque $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathscr{P}$ (resp. $\mathrm{S}(\mathscr{P})$) si $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ (resp. $\mathrm{S}(\mathscr{E})$). □

II. SOUS-CHAMPS SOUSLINIENS

Dans cette partie, on se propose de caractériser les sous-champs sousliniens d'un champ mesurable d'espaces topologiques. Dans toute la suite, on supposera que les champs considérés sont à fibres séparées.

2.1. DÉFINITION. — *Soit* $p = (\mathrm{E}, \mathscr{E}, \mathrm{T}, \mathscr{T}, p)$ *un champ mesurable topologique. Une partie* A *de* E *est appelée un sous-champ souslinien s'il existe un champ polonais* P *de même base* T *et un morphisme* f *de* P *dans* E *d'image* A.

Remarquons que cette définition est justifiée : pour la tribu $\mathscr{E} \mid \mathrm{A}$, $p \mid \mathrm{A} = (\mathrm{A}, \mathscr{E} \mid \mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathscr{T}, p)$ devient un sous-champ mesurable de p et c'est un champ souslinien. En effet, pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\mathscr{E} \mid \mathrm{A}_t$ est la tribu borélienne de A_t d'après une propriété bien connue des tribus induites.

Donnons quelques définitions équivalentes à celle qui précède.

2.2. PROPOSITION. — *Soient* $(\mathrm{E}, \mathscr{E}, \mathrm{T}, \mathscr{T}, p)$ *un champ mesurable topologique et* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *avec* $p(\mathrm{A}) = \mathrm{T}$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A *est un sous-champ souslinien.*

ii) A *est image par un morphisme du champ trivial* $\mathrm{T} \times \mathbb{N}^\infty$.

iii) *Il existe un champ polonais* P *de base* T, *un morphisme* f *de* P *dans* E *et une multisection mesurable* (*au sens de* [*1*], définition 2.2) *à valeurs fermées* $\Gamma : \mathrm{T} \to \mathrm{P}$ *telle que* $f(\Gamma(\mathrm{T})) = \mathrm{A}$.

Si $\mathscr{T}$ *est souslinienne les conditions précédentes sont équivalentes encore à*

iv) *Il existe un champ polonais* P *de base* T, *un morphisme* f *de* P *dans* E *et une multisection mesurable* (*au sens de la définition* 1.6) *à valeurs fermées* $\Gamma : \mathrm{T} \to \mathrm{P}$ *telle que* $f(\Gamma(\mathrm{T})) = \mathrm{A}$.

Cette proposition est une conséquence directe des résultats de [*1*] :

i) $\Leftrightarrow$ *ii*) résulte de [*1*], théorème 3.8.

iii) $\Leftrightarrow$ *i*) résulte du corollaire 2.8 de [*1*] qui identifie les sous-champs polonais d'un champ polonais aux images de multisections mesurables à valeurs fermées.

L'équivalence de *iv*) avec les autres caractérisations provient de la remarque suivant la définition 1.6. □

2.3. REMARQUES. — *a*) Si X est un espace topologique quelconque, le graphe d'une multiapplication $\Gamma : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ de type souslinien au sens de Leese [*4*] est un sous-champ souslinien du champ trivial $p : \mathrm{T} \times \mathrm{X} \to \mathrm{T}$.

La réciproque n'est pas certaine bien que l'assertion *ii*) de la proposition 2.2 permette de se rapprocher de la condition de Leese : il existe $f : \mathrm{T} \times \mathrm{P} \to \mathrm{T} \times \mathrm{X}$ de la forme $f = \mathrm{Id}_\mathrm{T} \times \varphi$, $\varphi : \mathrm{P} \to \mathrm{X}$ continue, P espace polonais avec $\mathrm{A} = f(\Gamma(\mathrm{T}))$ où Γ est une multisection de $\mathrm{T} \times \mathrm{P} \to \mathrm{T}$ à valeurs fermées vérifiant $\Gamma^-(\mathrm{T} \times \mathrm{F}) \in \mathscr{T}$ pour tout fermé F de P.

b) Si A est un sous-champ souslinien de p, il existe une famille dénombrable (s_n) de sections de p à valeurs dans A, l'ensemble de ces valeurs étant partout dense dans chaque $A_t = A \cap E_t$.

c) Un sous-champ souslinien est l'image d'une multisection $\Omega : T \to E$ telle que pour tout $B \in \mathscr{E}$, $\Omega^-(B) \in S(\mathscr{T})$. En effet si f et Γ sont comme dans 2.3. *iii*) On a $\Omega^-(B) = \Gamma^-(f^{-1}(B)) = p(\Gamma(T) \cap f^{-1}(B)) \in S(\mathscr{T})$ (compte tenu de la proposition 3.9 de [*1*]).

En particulier, si $\mathscr{T}$ est souslinienne Ω est mesurable au sens de 1.6.

d) La condition $A(t) \neq \emptyset$ pour tout t n'est pas restrictive puisque l'on peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant T par

$$T_0 = \operatorname{dom} A = \{ t \,;\, A(t) \neq \emptyset \}$$

et la tribu induite.

2.4. THÉORÈME. — *Soit* $(E, \mathscr{E}, T, \mathscr{T}, p)$ *un champ mesurable topologique. On suppose de plus qu'il existe une famille dénombrable* $\mathscr{A} = \{ A_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathscr{E}$ *ayant les propriétés suivantes :*

i) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $t \in T$, $A_n \cap E_t$ *est ouvert dans* E_t.

ii) *Pour tout* $t \in T$, *pour tous* x, y *distincts dans* E_t, *il existe* n *et* $m \in \mathbb{N}$ *tels que* $A_n(t) \cap A_m(t) = \emptyset$ *avec* $x \in A_n$ *et* $y \in A_m$ *(on dira que* $\mathscr{A}$ *sépare verticalement les points).*

Alors, si $A \subset E$ *est un sous-champ souslinien,* $A \subset S(\mathscr{E})$.

Si de plus on suppose que $\mathscr{A}$ *a la propriété*

iii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\bar{A}_n = \bigcup_{t \in T} \bar{A}_n(t)$ *est dans* $\mathscr{E}$.

Alors on a $A \in S(\bar{\mathscr{E}})$ *où* $\bar{\mathscr{E}}$ *désigne l'ensemble des éléments de* $\mathscr{E}$ *verticalement fermés.*

Preuve. — Si A est un sous-champ souslinien, alors par définition, il existe un morphisme f de $T \times \mathbb{N}^\infty$ dans E tel que $f(T \times \mathbb{N}^\infty) = A$.

Pour toute suite $\sigma \in \mathbb{N}^\infty$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $\Gamma_{\sigma|n}$ la multisection définie par $\Gamma_{\sigma|n}(T) = f(T \times N(\sigma \mid n)$ où $N(\sigma \mid n)$ désigne l'ensemble des suites « commençant » par $\sigma \mid n = \{ \sigma(1), \ldots, \sigma(n) \}$.

$\Gamma_{\sigma|n}(T)$ est un sous-champ souslinien (puisque $N(\sigma \mid n)$ est un fermé dans un polonais) et par conséquent $\Gamma_{\sigma|n}$ est une multisection qui a la propriété énoncée dans la remarque 2.3 *c*).

On définit pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^\infty$ et $n \in \mathbb{N}$ la famille

$$\begin{aligned} B_{\sigma|n} &= \bigcap_m [(A_m \cap p^{-1}(\Gamma^+_{\sigma|n}(A_m)) \cup p^{-1}(T \setminus \Gamma^+_{\sigma|n}(A_m))] \\ &= \bigcap_m A_m \cup p^{-1}(\Gamma^-_{\sigma|n}(E \setminus A_m)) \,. \end{aligned}$$

Comme $\Gamma^{-}_{\sigma|n}(E \setminus A_m)$ appartient à $S(\mathscr{T})$, $p^{-1}(\Gamma^{-}_{\sigma|n}(E \setminus A_m))$ est dans $S(\mathscr{E})$ donc aussi $B_{\sigma|n}$. Comme $n \to B_{\sigma|n}$ est décroissante et comme $S(\mathscr{E}) = S(S(\mathscr{E}))$ il nous suffit donc de montrer que

$$A = \bigcup_{\sigma} \bigcap_{n} B_{\sigma|n}\,.$$

— Si $y \in A$, y est de la forme $y = f(t, \sigma)$ avec $t = p(y)$, $\sigma \in \mathbb{N}^{\infty}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y \in \Gamma_{\sigma|n}(t)$. Pour $m \in \mathbb{N}$ arbitraire on a soit $\Gamma_{\sigma|n}(t) \subset A_m$ et $y \in A_m \cup p^{-1}(\Gamma^{-}_{\sigma|n}(E \setminus A_m))$ soit $\Gamma_{\sigma|n}(t) \cap (E \setminus A_m) \neq \emptyset$ et $y \in p^{-1}(\Gamma^{-}_{\sigma|n}(E \setminus A_m))$. Ainsi $y \in B_{\sigma|n}$.

— Réciproquement, si z est tel qu'il existe $\sigma \in \mathbb{N}^{\infty}$ avec $z \in \bigcap_{n} B_{\sigma|n}$ on va montrer que $z = f(t, \sigma) \in A$ pour $t = p(z)$.

On sait déjà que $y = f(t, \sigma) \in \bigcap_{n} B_{\sigma|n}$ et par conséquent pour avoir l'égalité il suffit de montrer que $\bigcap_{n} B_{\sigma|n} \cap E_t$ est réduit au point y.

Si $z \neq y$ alors il existe A_k et $A_l \in \mathscr{A}$ tels que $z \in A_l$ et $y \in A_k$ avec $A_k(t) \cap A_l(t) = \emptyset$.

Comme $f(t, .)$ est continue en σ, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $f(t, N(\sigma \mid n)) = \Gamma_{\sigma|n}(t)$ contenu dans $A_k(t)$ c'est-à-dire $t \in \Gamma^{+}_{\sigma|n}(A_k)$ donc $y \in A_k \cap p^{-1}(\Gamma^{+}_{\sigma|n}(A_k))$ et l'on a $z \notin p^{-1}(T \setminus \Gamma^{+}_{\sigma|n}(A_k))$, $z \notin A_k$ donc $z \notin B_{\sigma|n}$ d'où la contradiction cherchée et le résultat.

Si l'on suppose de plus la propriété *iii*), on considère alors la famille $B'_{\sigma|n} = \bigcap_{m} [\bar{A}_m \cap p^{-1}(\Gamma^{+}_{\sigma|n}(A_m)) \cup p^{-1}(T \setminus \Gamma^{+}_{\sigma|n}(A_m))]$, $B'_{\sigma|n} \in \mathscr{E}$ et l'on démontre de la même manière que $A \bigcup_{\sigma} \bigcap B'_{\sigma|n}$ compte tenu du fait que si $A_k(t) \cap A_l(t) = \emptyset$ on a $\bar{A}_k(t) \cap A_l(t) = \emptyset$. □

2.5. REMARQUES. — Les hypothèses *i*), *ii*) et *iii*) sont vérifiées dans les cas suivants :

a) Un champ trivial $T \times S$ où S est un espace souslinien puisque tout souslinien possède une famille dénombrable d'ouverts séparant les points $\{ A_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ et il suffit alors de prendre $\mathscr{A} = \{ T \times A_n, n \in \mathbb{N} \}$.

La famille $\{ A_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ est obtenue de la manière suivante : S étant souslinien, $S \times S$ est souslinien et $S \times S - \Delta$ où Δ est la diagonale de $S \times S$ est un ouvert qui est de Lindelöff.

Pour tout $(x, y) \in S \times S - \Delta$ il existe des ouverts $U_{xy} \in \mathcal{O}(x)$ et $U_{yx} \in \mathcal{O}(y)$ avec $U_{xy} \times U_{yx} \subset S \times S - \Delta$. Soit $\{ U_{x_n y_n} \times U_{y_n x_n} \}$ une sous-famille dénombrable qui recouvre $S \times S - \Delta$ il est clair que les $U_{x_n y_n}$ et $U_{y_n x_n}$ séparent les points de S).

b) Un champ mesurable séparable d'espaces métriques. Si X_0 désigne une famille de sections dénombrables de valeurs dense, on choisit comme famille $\mathscr{A}$ la famille des tubes $\mathscr{A} = \{ B(a, r) \mid a \in X_0, r \in Q_+ \}$.

Vérifions la propriété *iii*).

Soit $B(a, r)$ un tube ouvert de $\mathscr{A}$. Alors la multisection Γ définie par $\Gamma(T) = \overline{B(a, r)}$ est mesurable compte tenu de 2.3 et de 2.5 de [*1*] et l'on a :

$$\overline{B(a, r)} = \bigcap_k \bigcup_{a_n \in X_0} \left[B\left(a_n, \frac{1}{k}\right) \cap p^{-1}\left(\Gamma^-\left(B\left(a_n, \frac{1}{k}\right)\right)\right)\right]$$

d'où le résultat.

(Notons que les champs mesurables d'espaces métriques sousliniens entrent dans cette catégorie puisqu'ils sont séparables).

En fait, dans le cas des champs séparables d'espaces métriques, le résultat « $A \in S(\bar{\mathscr{E}})$ » s'obtient sans utiliser l'hypothèse *iii*) ; la proposition suivante va préciser pourquoi.

2.6. Proposition. — *Soit* $(E, \mathscr{E}, T, \mathscr{T}, p)$ *un champ mesurable topologique tel qu'il existe une famille dénombrable* $\mathscr{A} = \{ A_n \}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{E}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $t \in T$, $\{ A_n \cap E_t \}_{n \in \mathbb{N}}$ *constitue une base d'ouverts de* E_t. *Si* $A \subset E$ *est un sous-champ souslinien,* $A \in S(\bar{\mathscr{E}})$. *Si de plus* $\mathscr{T}$ *est souslinienne, on a* $\bar{A} \in \bar{\mathscr{E}}$.

Preuve. — A est l'image d'une multisection Γ qui a la propriété énoncée en 2.3 *c*) ; $\Gamma(T) = A$. Si A est verticalement fermée, nous avons

$$A = \bigcap_{B \in \mathscr{A}} [(E \setminus B) \cup (p^{-1}(\Gamma^-(B))] \quad \text{et} \quad A \in S(\bar{\mathscr{E}}) \quad \text{puisque} \quad p^{-1}(\Gamma^-(B)) \in S(\bar{\mathscr{E}})$$

Si A n'est pas verticalement fermé, on remarque que si $B \in \mathscr{A}$

$$\Gamma^-(B) = \{ t / A_t \cap B \neq \emptyset \} = \{ t / \bar{A}_t \cap B \neq \emptyset \}$$

et, par conséquent,

$$\bar{A} = \bigcap_{B \in \mathscr{A}} [(E \setminus B) \cup (p^{-1}(\Gamma^-(B)) \mid \quad \text{et} \quad \bar{A} \in S(\mathscr{E})]$$

On peut alors reprendre la démonstration de Leese ([*4*], théorème 5) pour montrer que $A \in S(\bar{\mathscr{E}})$. Si $A = f(T \times \mathbb{N}^\infty)$ il suffit d'établir que $A = \bigcup_\sigma \bigcap_n \overline{f(T \times N(\sigma \mid n))}$ où $N(\sigma \mid n) = \{ \tau \in N^\infty / \forall i = 1, \ldots, n, \sigma_i = \tau_i \}$.

Si $e \in f(T \times \mathbb{N}^\infty)$ alors $e = f(t, \sigma)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in N_{(\sigma/n)}$ et $e \in \bigcap_n f(t, N(\sigma \mid n))$.

Réciproquement, si $e \in \bigcup_\sigma \bigcap_n \overline{f(\mathrm{T} \times \mathrm{N}(\sigma \mid n))}$ alors si $t = p(e)$, il existe $\sigma \in \mathbb{N}^\infty$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e \in \overline{f(\{t\} \times \mathrm{N}(\sigma \mid n))}$ par conséquent $f(\{t\} \times \mathrm{N}(\sigma \mid n)) \neq \emptyset$.

Il existe donc $y_n = f(t, \tau_n) \in f(t \times \mathrm{N}(\sigma \mid n))$, $\tau_n \in \mathrm{N}(\sigma \mid n)$ donc $(\tau_n) \to \sigma$ et y_n converge vers $y = f(t, \sigma)$.

Si $y \neq e$, il existe un voisinage fermé V de y dans E_t tel que $e \notin \mathrm{V}$.

Comme $f(t, .)$ est continue sur E_t et comme les $\mathrm{N}_{(\sigma|n)}$ constituent un système fondamental de voisinages de σ (il existe m tel que $f(t, \mathrm{N}(\sigma \mid m)) \subset \mathrm{V}$ d'où $\overline{f(t, \mathrm{N}(\sigma \mid m))} \subset \mathrm{V}$ et $e \notin \overline{f(t, \mathrm{N}(\sigma \mid m))}$ donc $e \notin \bigcap_n \overline{f(t, \mathrm{N}(\sigma \mid n))}$ d'où la contradiction. □

Si $\mathscr{T}$ est souslinienne alors Γ est mesurable et par conséquent pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{E}$, $(\mathrm{E} \setminus \mathrm{B}) \cup (p^{-1}(\Gamma^{-}(\mathrm{B}))) \in \mathscr{E}$ et $\bar{\mathrm{A}} \in \bar{\mathscr{E}}$.

Remarquons qu'un champ topologique faible d'espaces de Banach satisfait aux conditions de la proposition précédente.

On se propose maintenant de donner une réciproque des résultats précédents.

2.7. THÉORÈME. — *Soit* (E, $\mathscr{E}$, T, $\mathscr{T}$, p) *un champ souslinien,* $\mathscr{T}$ *une tribu souslinienne. Si* $\mathrm{A} \in \bar{\mathscr{E}}$ *(resp.* $\mathrm{A} \in \mathrm{S}(\bar{\mathscr{E}})$*) vérifie* $p(\mathrm{A}) = \mathrm{T}$, A *est un sous-champ souslinien.*

La démonstration que nous proposons suit de près celle de Leese [*4*] théorème 6.

Preuve. — Écrivons $\mathrm{E} = f(\mathrm{T} \times \mathbb{N}^\infty)$ où $f : \mathrm{T} \times \mathbb{N}^\infty \to \mathrm{E}$ est un morphisme.

1. Si $\mathrm{A} \in \bar{\mathscr{E}}$, avec $p(\mathrm{A}) = \mathrm{T}$, $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \bar{\mathscr{T}} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{N}^\infty}$ et est verticalement fermée ; par conséquent $f^{-1}(\mathrm{A})$ est l'image d'une multisection mesurable à valeurs fermées non vides sur le champ trivial $\mathrm{T} \times \mathbb{N}^\infty$ et, comme $f(f^{-1}(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$, A est un sous-champ souslinien.

2. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{S}(\bar{\mathscr{E}})$ alors $\mathrm{A} = \bigcup_\sigma \bigcap_n \mathrm{A}_{\sigma|n}$ avec $\mathrm{A}_{\sigma|n} \in \bar{\mathscr{E}}$. On considère le champ trivial $\mathrm{T} \times \mathbb{N}^\infty \times \mathbb{N}^\infty$ et le morphisme $g : \mathrm{T} \times \mathbb{N}^\infty \times \mathbb{N}^\infty \to \mathrm{E}$ défini par $g(t, \sigma, \tau) = f(t, \sigma)$. On considère la multisection

$$\Omega : \mathrm{T} \to \mathrm{T} \times \mathbb{N}^\infty \times \mathbb{N}^\infty$$

définie par son image,

$$\Omega(\mathrm{T}) = \bigcup_\sigma \bigcap_n [f^{-1}(\mathrm{A}_{\sigma|n}) \times \mathrm{N}(\sigma \mid n)]$$

Ω a les propriétés demandées :

a) $g(\Omega(\mathrm{T})) = \mathrm{A}$ puisque

$$g(\Omega(\mathrm{T})) = \bigcup_{\sigma} g\left[\bigcap_{n} (f^{-1}(\mathrm{A}_{\sigma|n}) \times \mathrm{N}(\sigma \mid n))\right]$$
$$= \bigcup_{\sigma} g\left[\left(\bigcap_{n} f^{-1}(\mathrm{A}_{\sigma|n})\right) \times \{\sigma\}\right] = \bigcup_{\sigma}\bigcap_{n} \mathrm{A}_{\sigma|n}$$

b) Ω est mesurable puisque son image $\Omega(\mathrm{T})$ appartient à $\mathrm{S}(\mathscr{T} \oplus \mathscr{B}_{\mathbb{N}^\infty})$ (cf. prop. 3.7 de [*1*]).

c) Ω est à valeurs fermées.

Soit $t \in \mathrm{T}$ et supposons que $(\kappa, \tau) \notin \Omega(t)$ alors $(t, \kappa, \tau) \notin \Omega(\mathrm{T})$. Deux cas sont possibles puisque $(t, \kappa, \tau) \notin \bigcap_{n} (f^{-1}(\mathrm{A}_{\tau|n}) \times \mathrm{N}(\tau \mid n))$.

1^er^ CAS. — Il existe $t \notin \bigcap_{n} p(\mathrm{A}_{\tau|n})$, c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $t \notin p(\mathrm{A}_{\tau|k})$. Alors l'ouvert $\mathbb{N}^\infty \times \mathrm{N}(\tau \mid k)$ ne rencontre pas $\Omega(t)$. En effet, si $(v, \sigma) \in \Omega(t) \cap (\mathbb{N}^\infty \times \mathrm{N}(\tau \mid k))$ on a $\sigma \mid k = \tau \mid k$ et $(t, v) \subset \bigcap_{n} f^{-1}(\mathrm{A}_{\sigma|n})$ donc $t \in \mathrm{pr}_1(f^{-1}(\mathrm{A}_{\sigma|k})) = p(\mathrm{A}_{\sigma|k})$, ce qui contredit l'hypothèse.

2^e^ CAS. — $t \in \bigcap_{n} p(\mathrm{A}_{\tau|k})$. Si $(\kappa, \tau) \notin \Omega(t)$ on a $\kappa \notin \bigcap_{n} f^{-1}(\mathrm{A}_{\tau|n})$.

Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ avec $\kappa \notin f^{-1}(\mathrm{A}_{\tau|k})$. Comme $f^{-1}(\mathrm{A}_{\tau|k})$ est verticalement fermé, il existe un ouvert U de $\mathbb{N}^\infty$ contenant κ avec

$$(\{t\} \times \mathrm{U}) \cap f^{-1}(\mathrm{A}_{\tau|k}) = \varnothing .$$

Alors le voisinage $\mathrm{U} \times \mathrm{N}(\tau \mid k)$ de (κ, τ) ne coupe pas $\Omega(t)$ puisque pour $(v, \sigma) \in \Omega(t) \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{N}(\tau \mid k))$ on a $\sigma/k = \tau/k$ et $(t, v) \in \bigcap_{n} f^{-1}(\mathrm{A}_{\sigma/n})$ donc $(t, v) \in (\{t\} \times \mathrm{U}) \times f^{-1}(\mathrm{A}_{\sigma/k}) = (\{t\} \times \mathrm{U}) \times f^{-1}(\mathrm{A}_{\tau/k})$ qui est vide. □

Dans le cas d'un champ souslinien et dans les hypothèses du théorème 2.4 nous avons donné une caractérisation précise des sous-champs sousliniens. Donnons quelques applications des théorèmes précédents :

2.8. CHAMP TRIVIAL. — Soient $(\mathrm{T}, \mathscr{T})$ un espace mesurable, $\mathscr{T}$ étant une tribu souslinienne (cf. [*1*], p. 34) S un espace souslinien. Le champ trivial $\mathrm{T} \times \mathrm{S}$ est un champ souslinien.

Compte tenu de la remarque 2.5 *a*) nous savons qu'alors les théorèmes 2.4 et 2.7 s'appliquent.

En conséquence, les sous-champs sousliniens sont exactement les éléments de $\mathrm{S}(\bar{\mathscr{E}})$.

Montrons, à l'aide des remarques 3.1 *a*) de [*1*] que $S(\bar{\mathscr{E}})$ contient la tribu produit $\mathscr{C} \otimes \mathscr{B}_{(S)}$.

$\bar{\mathscr{E}}$ contient l'ensemble $\mathscr{C} \times \mathscr{F}_S$ des pavés $B \times F$ avec $B \in \mathscr{C}$ et F fermé dans S. On a alors

$$s(\bar{\mathscr{E}}) \supset S(\mathscr{C} \times \mathscr{F}_S)$$

d'où

$$S(\bar{\mathscr{E}}) \supset S(\mathscr{C}) \times S(\mathscr{F}_S) \supset \mathscr{C} \times \mathscr{B}(S)$$

car

$$S(\mathscr{F}) \supset \mathscr{B}(S)$$

cf. Hoffmann-Jorgensen [*3*], p. 111.

Par conséquent $S(S(\bar{\mathscr{E}})) = S(\bar{\mathscr{E}}) \supset S(\mathscr{C} \times \mathscr{B}_{(S)}) \supset \mathscr{C} \otimes \mathscr{B}_{(S)} = \mathscr{E}$.

En particulier, les éléments de $\mathscr{E}$, étant des sous-champs sousliniens, sont des graphes de multiapplication mesurable de T dans S possédant une famille dénombrable de sélections de valeurs dense (cf. remarque 2.3).

Nous obtenons donc les résultats de Leese ou de Sainte-Beuve [*5*].

2.9. — Si $(E, T, \mathscr{C}, p, d)$ est un champ d'espaces métriques souslinien (donc séparable) $\mathscr{C}$ étant souslinienne et si l'on suppose de plus que pour tout $t \in T$, card $(E_t) > 1$ (cf. prop. 1.10 de [*1*]) alors si l'on note $\bar{\mathscr{A}}_d$ l'ensemble des intersections finies de tubes fermés on a $S(\bar{\mathscr{E}}) \supset S(\bar{\mathscr{A}}_d)$ et en particulier les éléments de $S(\bar{\mathscr{A}}_d)$ sont des sous-champs sousliniens.

Comme $\bar{\mathscr{A}}_d$ est stable par intersection finie, $S(\bar{\mathscr{A}}_d)$ est stable pour l'union dénombrable et l'intersection dénombrable, et, compte tenu de la proposition 1.10.2 [*1*] le complémentaire d'un élément de $\bar{\mathscr{A}}_d$ appartient à $S(\bar{\mathscr{A}}_d)$ et $S(\bar{\mathscr{A}}_d) = S(\mathscr{E}) \supset \mathscr{E}$.

En conséquence tout élément de $\mathscr{E}$ est l'image d'une multisection mesurable et possède une famille dénombrable de sélections de valeur dense.

On améliore donc les résultats de la troisième partie de [*1*].

RÉFÉRENCE

(pour une bibliographie plus détaillée nous renvoyons à [*1*])

[*1*] DELODE-ARINO-PENOT, Champs mesurables et multisection. *Am. Inst. Henri Poincaré*, série B, vol. XII, nº 1, 1976, p. 11-42.

[*2*] DIXMIER-DOUADY, Champs continus d'espaces Hilbertiens et de C*-Algèbres. *Bull. soc. Math. France*, t. **91**, 1963, p. 227-284.

[*3*] HOFFMANN-JORGENSEN, *The theory of analytic spaces.* Aarhus 1970, Various publications, séries nº 10.

[*4*] LEESE, Multifunctions of souslin type. *Bull. Austral. Math. soc.*, vol. **11**, 1974, p. 395-411.

[*4'*] LEESE, Multifunctions of souslin type. *Corrigendum*, t. **13**, 1975, p. 159-160.

[*5*] SAINTE-BEUVE, On the extension of Von Neuman-Auman's theorem. *Jour. of Funct. Anal.*, t. **17** (1), 1974, p. 112-129.

(Manuscrit reçu le 21 mars 1977)