ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ROGER FISCHLER

Convergence faible avec indices aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 4 (1976), p. 391-399
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_4_391_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 4, 1976, p. 391-399. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Convergence faible avec indices aléatoires

par

Roger FISCHLER
Université Carleton (Ottawa), Université de Clermont

à S. F. qui est parti et à S. F. qui est venue
« *I o pas mie sons fie/ni roso sons espino/ni nouse sons crubil* ».

SOMMAIRE. — Certains théorèmes au sujet des suites de v. a. stables et mélangeantes avec valeurs dans un espace métrique démontrés antérieurement par l'auteur permettent d'obtenir un théorème très général au sujet de la convergence faible avec indices aléatoires. A son tour ce théorème permet de retrouver très facilement, et en plus de mettre dans un contexte naturel, presque tous les résultats obtenus jusqu'à présent au sujet de la convergence avec indices aléatoires soit sur la droite soit dans C ou D. En plus de nouveaux exemples, nous discutons le rapport avec d'autres articles.

SUMMARY. — The author has previously proved several theorems concerning stable and mixing sequences of r. v. with values in a metric space. These are now used to obtain a general result about weak convergence with random indices. This theorem in turn allows one to obtain very easily most of the results in the literature both on the line or in C and D, and to furthermore put everything in a natural setting. In addition to new examples, there is a discussion on the relation of this work to other results in the literature.

I. INTRODUCTION

Pour les énoncés des théorèmes, et les définitions au sujet de la convergence avec indices aléatoires, on pourrait consulter [*8*]. Nous utiliserons le livre [*3*] de Billingsley en ce qui concerne la convergence faible. En plus, nous aurons besoin des notations et définitions suivantes :

Soit $[\Omega, \mathscr{A}, P]$ un triple de probabilité. D sera l'espace de toutes les fonctions sur $[0, 1]$ qui sont continues à droite et qui ont des limites à gauche, avec la topologie de Skohorod. Les éléments de D seront dénotés par X ou $X(\cdot)$. D'autre part, W est la mesure de Wiener.

Les différentes hypothèses seront dénotées par :

D_1 : Une suite $\{ Y_n \}$ de v. a. réelles est dite stable avec la densité α_a si pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\lim_n P[Y_n < a, A] = \int_A \alpha_a(\omega) P(d\omega)$ pour tout a qui est un point de continuité de l'intégrale.

D_2 : Si dans D_1 : $\alpha_a(\omega) = F(a)\ \forall\omega$, $\{ Y_n \}$ est dite mélangeante.

D_3 : Une suite $\{ Y_n \}$ de v. a. à valeurs dans un espace métrique M, est dite stable avec la mesure aléatoire associée $u(\omega, B)$, si pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\lim P[Y_n \in B, A] = \int_A u(\omega, B) P(d\omega)$ pour tout B qui est un ensemble de continuité de l'intégrale.

D_4 : Si dans D_3 : $u(\omega, B) = U(B)$ pour tout ω, $\{ Y_n \}$ est dite mélangeante.

D_5 : La suite $\{ v_n \}$ des v. a. à valeurs dans Z^+ est telle qu'il existe une v. a. v, strictement positive pour laquelle $\{ v_n/n \}$ tend en probabilité vers v.

D_6 : (Condition de Doeblin-Anscombe). Soient $\{ Y_n \}$ une suite de v. a. et $\{ B_n \}$ des nombres réels. Pour $0 < c < 1$, écrivons $M_n = \max_{|l-n| < cn} | Y_l - Y_n |$. On suppose que $\forall\varepsilon, \delta > 0, \exists C$ et n_0, tels que : $P[M_n > \delta B_n] < \varepsilon$ si $n > n_0$.

$D_{6'}$: (Condition de Richter-Mogyorodi-Guiasu). Dans D_6 on remplace Y_j par Y_j/B_j et on considère $P[M_n > \delta]$.

II. THÉORÈME PRINCIPAL

Dans [*14*] on trouve les théorèmes suivants (voir [*16*] pour des applications d'une sorte différente).

THÉORÈME A. — Soit $\{ Y_n \}$ une suite de v. a. stables (u) à valeurs dans l'espace métrique M. Soit $g : M \to M'$, où M' est un autre espace métrique, une transformation qui est pour P-presque tout ω continue presque partout par rapport à $u(\omega, \cdot)$. Alors $\{ g(Y_n) \}$ est aussi stable, et admet la mesure aléatoire associée v définie par $v(\omega, B) = u(\omega, g^{-1}(B))$.

THÉORÈME B. — Soit $\{ Y_n \}$ une suite de v. a. stables (u) à valeurs dans l'espace métrique séparable M. Soit $\{ Z_n \}$ une suite de v. a. à valeurs dans M qui tendent en probabilité vers une v. a. Z. Définissons une mesure aléatoire

$r : \Omega \times (M \times M) \to R$ par $r(\omega, D) = u(\omega, x : (x, Z(\omega)) \in D)$. Supposons que $g : M \times M \to M$ est une transformation qui est pour P-presque tout ω continue presque partout par rapport à $r(\omega, \cdot)$. Alors la suite $\{ g(Y_n, Z_n) \}$ est aussi stable et admet la mesure aléatoire associée v définie par $v(\omega, B) = u(\omega, x : g(x, Z(\omega)) \in B)$.

REMARQUE C. — La démonstration du théorème B dans [*14*] reste valable si g est une transformation : $M' \times M'' \to M''$ où tous ces espaces sont des espaces métriques et séparables.

Soit D_0 l'ensemble des éléments φ de D qui sont non décroissants et tels que $0 \leq \varphi(t) \leq 1$. Dans la remarque C, nous prendrons $M' = M'' = D$ et $M'' = D_0$. La transformation g sera la composition. Pour ν_n/n et ν bornée par 1, définissons Z_n par $Z_n(t) = (\nu_n/n)t$ et Z par $Z(t) = \nu t$. Si ces termes ne sont pas bornés, il faudra tronquer ou normaliser d'abord comme dans [*3*]. Pour éviter ces détails sans intérêt, nous supposerons que Z_n et Z appartiennent à D_0.

Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME 1. — Si $\{ Y_n \}$ est stable (u) et si D_5 est satisfaite, alors la suite $\{ W_n \}$ définie par $W_n(t) = Y_n(\nu_n t/n)$ est stable (v) où

$$v(\omega, B) = u(\omega, \{ x : \quad \text{si} \quad y(t) = x(\nu(\omega)t) \quad \text{alors} \quad y \in B \}) .$$

Ce théorème nous permettra de retrouver très facilement des résultats au sujet de la convergence avec indices aléatoires sur la droite, ainsi que les résultats de la section 17 de [*3*] où la convergence a lieu dans D.

III. LE CAS DES SOMMES

Dans cette section, nous considérons une suite $\{ X_j \}$ de v. a., leurs sommes partielles $\{ S_n \}$ et les éléments aléatoires $\{ \hat{Y}_n \}$ de D définis par :

$$\hat{Y}_n(t) = S_{[nt]}/\sigma\sqrt{n} .$$

Pour démontrer que les hypothèses des résultats que nous allons obtenir sont satisfaites dans des cas intéressants, ainsi que pour en tirer profit immédiatement, nous considérons d'abord deux cas où $\{ \hat{Y}_n \}$ converge faiblement vers W.

E_1 : $\{ X_j \}$ indépendante et équirépartie avec variance σ^2 ([*3*], p. 137).

E_2 : $\{ X_j \}$ est φ-mélangeante (section 20 de [*3*], aussi dite $*$-mélangeante [*27*], p. 314), où est une certaine transformation de tels processus (section 21 de [*3*]). La variance σ^2 est donnée par l'expression (20.46) ou (21.11) de [*3*]. Ce cas inclut les v. a. m-dépendantes, fonctions de la forme $f(2^k t)$ et certains processus de Markov.

En plus de la convergence faible, nous avons :

LEMME 2. — Dans les cas E_1 et E_2, $\{ \hat{Y}_n \}$ est mélangeante avec m. a. a. W.

Démonstration. — La condition D_4 est démontrée pour les cas E_1 et E_2 aux pages 174 et 195 de [*3*], mais seulement pour certains A. Cependant, les mêmes démonstrations sont valables pour les ensembles de la forme $\{ \hat{X}_k \in B \}$ et ceci suffit selon un résultat de Renyi ([*27*], Th. 58.1).

Donc le prochain résultat, ainsi que les trois qui suivent, sont valables pour les cas E_1 et E_2.

THÉORÈME 3. — Si $\{ \hat{Y}_n \}$ définie par (1) est mélangeante (W), et si D_5 a lieu, alors $\{ \hat{W}_n \}$ définie par $\hat{W}_n(t) = S_{[v_n t]}/\sigma\sqrt{n}$ est stable (v) où

$$v(\omega, B) = W \{ x : \text{si } y(t) = x(v(\omega)t) \text{ alors } y \in B \} .$$

Remarquons que nous commençons avec une suite mélangeante, mais nous terminons avec une suite stable (voir aussi ex. 5 de [*26*]).

Le corollaire suivant est particulièrement intéressant.

COROLLAIRE 4. — Si $\{ \hat{Y}_n \}$ définie par (1) est mélangeante (W) et si D_5 a lieu, alors $S_{v_n}/\sigma\sqrt{n}$ est stable et

$$\lim P[S_{v_n} < b\sigma\sqrt{n}] = \int_0^\infty \Phi(b\, y^{\frac{1}{2}}) dP[v < y] \tag{2}$$

où Φ est la loi N(0, 1).

Démonstration. — Dans le théorème A, prenons $M' = R$ et définissons $g : D \to R$ par $g(x) = x(1)$.

Le cas E_1 a été considéré dans [*34*] [*39*] [*25*].

Le cas $X_j = f(2^j t)$ n'était pas seulement l'un des premiers du point de vue historique [*38*], mais était aussi l'un des cas les plus difficiles (voir la discussion de la section 7, ex. (*a*) de [*8*]).

Au lieu de l'expression (2), on s'intéressera d'habitude à l'expression où $\sqrt{n}$ est remplacé par $\sqrt{v_n}$.

Nous obtiendrons le résultat désiré en donnant d'abord la version mélangeante du théorème 17.2 de [*3*]. A remarquer que le terme t ne paraît pas dans le dénominateur, à cause de difficultés du point de vue de la convergence faible. L'introduction de t n'est d'ailleurs pas nécessaire.

THÉORÈME 5. — Si $\{ Y_n \}$ définie par (1) est mélangeante (W) et si D_5 a lieu, alors $\{ \hat{W}_n \}$ définie par $\hat{W}_n(t) = S_{\nu_n t}/\sigma(\nu_n)^{\frac{1}{2}}$ est aussi mélangeante (W).

Démonstration. — Nous appliquons le théorème B et la remarque C à $S_{\nu_n t}/\sigma\sqrt{n}$ et $Z_n \equiv (n/\nu_n)^{\frac{1}{2}}$ avec g comme multiplication de fonctions. En utilisant le théorème 3, nous obtenons que $\{ W_n \}$ est stable (v') où

$$v'(\omega, B) = v(\omega, \{ x : x(\cdot)/(\nu(\omega))^{\frac{1}{2}} \in B \}) \\ = W \{ x : \text{si } y(t) = x(\nu(\omega)t)/(\nu(\omega))^{\frac{1}{2}} \text{ alors } y \in B \}.$$

Or, (voir [*3*], Th. 19.1), pour tout ω fixé, cette dernière expression est égale à W(B). Donc $\{ \hat{W}_n \}$ est mélangeante (W).

Maintenant, en procédant comme dans le Corollaire 4, nous obtenons la version mélangeante du déjà « classique » théorème limite à nombre aléatoire de termes. La propriété mélangeante des sommes aléatoires a été démontrée pour la première fois dans le cas E_1 par Richter [*29*].

COROLLAIRE 6. — Si $\{ \hat{Y}_n \}$ définie par (1) est mélangeante (W) et si D_5 a lieu, alors $S_{\nu_n}/\sigma(\nu_n)^{\frac{1}{2}}$ est mélangeante (Φ).

Nous remarquons que dans [*25*] (cas E_1), le Corollaire 4 est démontré à partir du Corollaire 6. Or, nous voyons ici que du point de vue de la convergence faible, l'ordre inverse suivi ici est plus naturel. D'ailleurs il est intéressant de remarquer que les premiers articles au sujet des sommes aléatoires ([*34*] [*39*]; voir aussi les sections 2, 6 et 7 de [*8*]) traitaient le cas du Corollaire 4 plutôt que celui du Corollaire 6.

IV. AUTRES APPLICATIONS

Les Théorèmes 3 et 5 et les Corollaires 4 et 6 sont tout de suite applicables dans les cas E_1 et E_2. Pour les autres applications du Théorème 1 que nous allons présenter, il faudra modifier les hypothèses et démonstrations de ces résultats. Nous ne donnerons qu'un aperçu des détails.

E_3 : $\{ X_k \}$ indépendante avec espérance 0 et variance σ_k^2 ; $B_n^2 = \Sigma\sigma_j^2$.

THÉORÈME 7. — Soit $\hat{Y}_n$ l'élément aléatoire de D qui prend la valeur S_k/B_n dans l'intervalle $(B_{k-1}^2/B_n^2, B_k^2/B_n^2)$. Z_n est définie par $Z_n(t) = (B_{\nu_n}^2/B_n^2)t$ et $\hat{W}_n$ est définie par la composition de $\hat{Y}_n$ et Z_n. Si (*i*) la condition de Lindeberg est satisfaite (*ii*) les $\{ B_n \}$ sont de variation régulière ([*11*], p. 268) avec $B_n = n^\alpha L(n)$ où $\lim L(a_n)/L(a) = 1$ si $\lim a_n/n = a$ positif, (*iii*) D_5 a lieu, alors $\{ W_n \}$ est stable (v) où

$$v(\omega, B) = W \{ x : \text{si } y(t) = x([\nu(\omega)]^{2\alpha}t) \text{ alors } y \in B \}.$$

Démonstration. — Par [*3*], page 143, exemple 7, $\{ \hat{X}_n \}$ tend vers W. La même méthode utilisée pour E_1 démontrer que $\{ \hat{Y}_n \}$ est mélangeante. Aussi $Z_n(t) = (v_n/n)^{2\alpha}[L(v_n)/L(n)]^2 t$. Le premier terme tend vers $v^{2\alpha}$ en probabilité par D_5. Le deuxième terme tend vers 1 en probabilité. Pour voir ceci, il suffit de considérer une sous-suite de $\{ Y_n \}$ telle que $\lim v_n'/n = v$ p. s. et ensuite d'appliquer (*ii*) pour ω fixé. Le résultat découle du Théorème 1.

Comme corollaire, nous obtenons le résultat suivant démontré d'abord par Mogyorodi dans [*25*].

COROLLAIRE 8. — $\{ S_{v_n}/B_n \}$ est stable, et

$$\lim p[S_{v_n} < bB_n] = \int_0^\infty (b/y^\alpha) dP \qquad (v < y).$$

E_4 : $T_n = \max (X_1, \ldots, X_n)$; $\{ X_j \}$ indépendante et équirépartie.

Ce cas a été considéré par Richter [*31*]. Il découle du Théorème 1 en utilisant des résultats au sujet de la convergence faible du processus associé avec T_n ; voir [*21*], [*28*].

Les exemples (*c*) et (*f*) de la section 7 de [*8*] découlent aussi des résultats sur la convergence faible. Donc, de tous les problèmes non résolus de la section 7 de [*8*], il ne reste que l'exemple (*b*) de la section 7 (les statistiques-U).

Il reste aussi le cas des sommes trigonométriques qui était un des premiers exemples d'une suite de v. a. mélangeantes (voir [*33*] et section 2 de [*8*]). Même le chef-d'œuvre de McLeish ([*22*], voir p. 79) qui comprend, comme cas spéciaux, presque tous les résultats de la littérature, ne contient aucun résultat sur la convergence faible pour ce cas. Aucune des autres méthodes ne semble non plus pouvoir nous aider ici.

V. RAPPORT AVEC D'AUTRES RÉSULTATS

Dans [*24*], Mogyorodi a affirmé que D_2, D_5 et D_6 suffisent pour conclure que $\{ Y_{v_n} \}$ converge, et dans [*8*] on a dit que les $\{ Y_{v_n} \}$ étaient mélangeantes. Malheureusement, la démonstration donnée dans [*24*] n'est pas valable (voir [*20*]). La même chose est vraie pour la démonstration de [*8*].

Donc sur la droite — le problème analogue pour C et D étant résolu dans cet article — la question de la convergence (et du caractère mélangeant) reste ouverte. Une chose qui complique la situation est que Richter ([*30*], Théorème 6, [*31*], Théorème 4) a démontré que pour certaines $\{ v_n \}$ discrètes, D_6, n'est pas nécessaire si on suppose D_2, et par ailleurs Mogyorodi [*23*] a démontré que dans le cas d'indépendance D_6 est nécessaire si $\{ Y_{v_n} \}$ converge pour tout $\{ v_n \}$ qui satisfait D_5.

Donc sur la ligne, les meilleurs résultats obtenus jusqu'à présent sont :

THÉORÈME D (Richter [32]). — D_2, D_5 et D_6, satisfaites, et $\{ Y_n \}$ 0 – 1 impliquent que $\{ Y_{\nu_n} \}$ est mélangeante.

THÉORÈME E (Guiasu [20]). — D_5 satisfaite, et D_2 a lieu pour $A \in B(\nu)$, D_6 est mélangeante avec limite 0 pour $A \in B(\nu)$ impliquent que $\{ Y_{\nu_n} \}$ converge.

Il y a des relations entre les hypothèses des Théorèmes 1, D, E :

i) Dans les cas des sommes de v. a. ou de v. a. $\{ X_n \}$ telles que les éléments aléatoires correspondant $\{ \hat{Y}_n \}$ satisfont $\hat{Y}_n(m/n) = Y_m$ ou Y_m/b_n, la convergence faible du Théorème 1 implique la condition « uniformément tendue » qui ensuite implique D_6 ou D_6 (voir [2] et (8.12) de [3] pour C, pour D, la question est un peu plus difficile, mais découle de (15.6) de [3]).

ii) D_4 (mélangeante dans D) implique D_2 (mélangeante dans R) (voir la démonstration du Corollaire 4).

iii) Les conditions du Théorème D impliquent celles du Théorème E, car si $\{ Y_j \}$ est 0 – 1, alors elle est mélangeante dans le sens fort ([36] [32] [13]) et ceci avec D_6, implique que le terme M_n dans D_6, est mélangeant (voir le raisonnement du Théorème (8.1) de [32] et du Théorème 4 de [20]).

Sreehari [35] a aussi considéré $\{ \hat{Y}_n \}$ comme dans (1) avec des conditions analogues à celles du Théorème E. Nous remarquons par exemple que sa condition *iii*) est une conséquence de l'hypothèse $\{ \hat{Y}_n \}$ mélangeante et de notre Théorème A.

Les résultats de Sreehari ont été généralisés par M. Csörgö et S. Csörgö [7] qui ont démontré que si les éléments $\{ \hat{Y}_n \}$ sont uniformément tendues, ceci a aussi lieu pour les éléments avec indices aléatoires.

Ces problèmes ont aussi été considérés en utilisant des représentations du type Skorokhod (appelées aussi « principes d'invariance forte » dans [4] et [17], section 1.10).

Nous mentionnons aussi l'article de Fernandez [12] qui n'est pas du tout dans l'esprit des résultats ci-dessus et qui ne considère que le cas ν constante.

VI. REMERCIEMENTS ET PRIORITÉ

Nous tenons à remercier MM. les Professeurs CSÖRGÖ, MCCLEISH et RESNICK pour leurs suggestions, pour avoir trouvé une erreur, et avoir donné quelques références.

Ce n'est que tout dernièrement que nous avons apprécié vraiment l'œuvre de W. RICHTER.

Il faut donc reconnaître sa priorité pour certaines questions :

(*a*) Le lemme et contre-exemple de [5], page 108, sont en effet donnés aux pages 75 et 76 de [*30*].

(*b*) Quoique nous ayons mentionné le théorème 6 de [*31*] en donnant le théorème 4 de [*6*], nous nous rendons compte que dans sa ligne générale, la démonstration de [*31*] est aussi facile que celle de [*6*].

RÉFÉRENCES

[*1*] F. J. ANSCOMBE, Large-sample theory of sequential estimation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, t. **48**, 1952, p. 600-607.

[*2*] P. BILLINGSLEY, Limit theorems for randomly selected partiel sums. *Ann. Math. Stat.*, t. **33**, 1962, p. 85-92.

[*3*] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures.* Wiley, 1968.

[*4*] M. CSÖRGÖ, R. FISCHLER and P. REVESZ, *Random limit theorems via strong invariance principles.* Carleton University, Mathematics Department, Publication.

[*5*] M. CSÖRGÖ and R. FISCHLER, Departure from Independence, the strong law, standard and random-sum central limit theorems. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, t. **21**, 1970, p. 105-114.

[*6*] M. CSÖRGÖ and R. FISCHLER, On mixing and the central limit theorem. *Tohoku Math. J.*, t. **23**, 1971, p. 139-145.

[*7*] M. CSÖRGÖ and S. CSORGO, On weak convergence of randomly selected partiel sums. *Acta Sci. Math. Segediensis*, t. **34**, 1973, p. 53-60.

[*8*] M. CSÖRGÖ and R. FISCHLER, Some examples and results in the theory of mixing and random-sum central limit theorems. *Periodica Mathematica Hungarica*, t. **3**, 1973, p. 41-57.

[*9*] W. DÖBLIN, Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables. *Bull. Soc. Math. France*, t. **66**, 1938, p. 210-220.

[*10*] W. DÖBLIN, Éléments d'une théorie générale des chaînes simples constant de Markov. *Ann. Sci. École Normale Sup.*, t. **57** (3), 1940, p. 61-111.

[*11*] W. FELLER, *An Introduction to the Theory of Probability and its Applications*, Vol. 2, Wiley, 1966.

[*12*] P. FERNANDEZ, A weak convergence theorem for random sums of independent random variables. *Ann. Math. Stat.*, t. **41**, 1970, p. 710-712.

[*13*] R. FISCHLER, Decomposition and composition of mixing sequences. *J. Math. Anal. and App.*, t. **21**, 1968, p. 389-395.

[*14*] R. FISCHLER, Suites de bi-probabilités stables. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont*, n° 43, 1970, p. 159-167.

[*15*] R. FISCHLER, Stable sequences of random variables and the weak convergence of the associated empirical measures. *Sankhya*, Series A, t. **33**, 1971, p. 67-72.

[*16*] R. FISCHLER, Quelques théorèmes limites du calcul des probabilités dont la valeur limite dépend d'une variable aléatoire. *Ann. Inst. Henri Poincaré (B)*, t. **9**, 1973, p. 345-349.

[*17*] D. FRIEDMAN, *Brownian Motion and Diffusion.* Holden-Day, 1971.

[*18*] S. GUIASU, *Asymptotic distribution for stochastic processes with random discrete time.* Trans. 4th Prague Conf. on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Publishing House of the *Czech. Acad. Sci.*, 1967, p. 307-321.

[19] S. GUIASU, *Contributii la studiul reportitiei limita a proceselor stocastice au timp discret aleator*. Studii Si Cercetari Matematice.

[20] S. GUIASU, On the asymptotic distribution of the sequences of random variables with random indices. *Ann. Math. Stat.*, t. **42**, 1971, p. 2018-2028.

[21] J. LAMPERTI, On extreme order statistics. *Ann. Math. Stat.*, t. **35**, 1964, p. 1726-1737.

[22] D. MCCLEISH, *Dependent central limit theorems and invariance principles*. Ph. D. Thesis, McGill University, 1972.

[23] J. MOGYORÓDI, On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables. *Publications of the Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, t. **6 A**, 1961, p. 365-371.

[24] J. MOGYORÓDI, *Limit distributions for sequences of random variables with random indices*. Trans. 4th Prague Conf. on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague, 1967, p. 463-470.

[25] J. MOGYORÓDI, A remark on stable sequences of random variables and a limit distribution theorem for a random sum of independent random variables. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, t. **17**, 1966, p. 401-409.

[26] A. RÉNYI, On stable sequences of events. *Sankyha*, t. **25 A**, 1963, p. 293-302.

[27] A. RÉNYI, *Foundations of Probability*. Holden-Day, 1970.

[28] S. RESNICK, *Weak convergence to extremal processes*. Stanford University, Dept of Statistics, Technical Report n° 49, 1973.

[29] W. RICHTER, Ein zentraler Grenzwertsats für das Maximum einer zufalligen Anzahle unabhängiger Zufallsgrossen. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden*, t. **13**, 1964, Heft 5, p. 1343-1346.

[30] W. RICHTER, Limit theorems for sequences of random variables with sequences of random indices. *Theory of Prob. and App.*, t. **10**, 1965, p. 74-84.

[31] W. RICHTER, Übertragung von Grenzaussagen für folgen zufalliger Elemente auf Folgen mit zufalligen Indizes. *Math. Nachrichten*, t. **29**, 1965, p. 347-365.

[32] W. RICHTER, Das null-ein Gesetzt und ein Grenzwertsats für zufallige Elemente mit diskreter zufalliger Zeit. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden*, t. **14**, 1965, Heft 3, p. 497-504.

[33] R. SALEM and A. ZYGMUND, On lacunary trigonometric series I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, t. **33**, 1947, p. 333-338.

[34] J. C. SMITH, On the asymptotic distribution of the sums of Rademacher functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **51**, 1945, p. 941-944.

[35] M. SREEHARI, An invariance principle for random partial sums. *Sankyha*, t. **30 A**, 1968, p. 433-442.

[36] L. SUCHESTON, On mixing and the $0-1$ law. *J. Math. App. Anal.*, t. **6**, 1963, p. 447-456.

[37] D. SZASZ, Limit theorems for the distributions of the sums of a random number of random variables. *A paraître*.

[38] S. TAKAHASHI, On the central limit theorem. *Tohoku Math. J.*, t. **3**, 1951, p. 316-321.

[39] S. TAKAHASHI, On the asymptotic distribution of the sum of independent random variables. *Proc. Japan Acad.*, t. **27**, 1951, p. 393-400.

(Manuscrit reçu le 8 juin 1976).