

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DENIS BRUNHES

Prédiction scalaire ou prédiction vectorielle pour des processus faiblement stationnaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, n° 4 (1976), p. 291-298

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_4_291_0

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Prédiction scalaire ou prédiction vectorielle pour des processus faiblement stationnaires

par

Denis BRUNHES

Département de Mathématiques,
Université de Rouen, 76130 Mont-St-Aignan

Si on se donne un processus vectoriel faiblement stationnaire dont on essaye de prédire uniquement une composante, on peut se demander si la prédiction de cette composante — que nous appellerons prédiction incomplète — peut se ramener à une prédiction ou à une somme de prédictions scalaires.

On donnera, sous deux formes différentes, une condition nécessaire et suffisante pour que la prédiction incomplète se ramène à une prédiction scalaire. On construira ensuite des contre-exemples montrant que cette réduction n'est que très rarement possible.

1. HYPOTHÈSES

a) $\{x_n\}$ est un processus vectoriel (à q composantes) stochastique faiblement stationnaire.

b) $\{x_n\}$ est un processus régulier.

Il en résulte que sa densité spectrale F est absolument continue et que, si l'on note $dF = f(\theta)d\theta$, $\text{Log det } f$ appartient à $L_1 [0, 2\pi]$.

2. DÉFINITION DE LA PRÉDICTION INCOMPLÈTE

Soient x_0^1 l'avenir de la première composante en 0, p^1 le prédicteur de la première composante, on a :

$$p^1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 x_{-n} \tag{2.1}$$

($a_n^1 x_{-n}$ est une forme linéaire sur x_{-n}).

Le Problème de Prédiction Incomplète consiste à minimiser :

$$\|x_0^1 - p^1\|^2 \quad (2.2)$$

3. DÉCOMPOSITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE LA PRÉDICTION INCOMPLÈTE SE RAMÈNE A UNE SOMME DE PRÉDICTIONS SCALAIRES

On pose ξ_n matrice ligne à q éléments telle que :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (1, 0, \dots, 0) \\ \xi_n &= -a_n^1 \quad \text{si } n > 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(2.2) se met alors sous la forme :

$$\|x_0^1 - p^1\|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(x_{-n}, x_{-p}) \xi_p^* \quad (3.2)$$

on a [définitions et propriétés] :

$$a) \quad (x_{-n}, x_{-p}) = (x_{-n}^j, x_{-p}^k) \quad j, k = 1, \dots, q \quad (3.3)$$

c'est une matrice carrée d'ordre q , que l'on note

$$b) \quad \Gamma(p - n) = (x_{-n}, x_{-p}) \quad (3.4)$$

c'est la matrice de covariance du processus $\{x_n\}$, qui s'écrit

$$c) \quad \Gamma(p - n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(p-n)\theta} f(\theta) d\theta \quad (3.5)$$

(2.2) peut donc se mettre sous la forme :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(p-n)\theta} f(\theta) d\theta \right) \xi_p^* \quad (3.6)$$

ce qui donne formellement :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \geq 0} \xi_n e^{in\theta} \right) f(\theta) \left(\sum_{p \geq 0} \xi_p e^{ip\theta} \right)^* \quad (3.7)$$

Pour que la prédiction incomplète se ramène à une somme de prédictions

scalaires, il faut et il suffit que l'expression (3.6) puisse se mettre sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{j=q} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^j \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(p-n)\theta} g_j(\theta) \right) \eta_p^{j*} \tag{3.8}$$

η_n^j étant une constante scalaire, et $g_j(\theta)$ une fonction appartenant à $L_1(0, 2\pi)$ non négative.

(3.8) s'écrit formellement

$$\sum_{j=1}^{j=q} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \geq 0} \eta_n^j e^{in\theta} \right) g_j(\theta) \left(\sum_{p \geq 0} \eta_p^j e^{ip\theta} \right)^* d\theta \tag{3.9}$$

on pose

$$g = (g_{jk}) \text{ avec } g_{jk}(\theta) = \delta_{jk} g_j(\theta)$$

g est donc une matrice diagonale d'ordre q non négative dont les éléments appartiennent à $L_1 [0, 2\pi]$.

Soit

$$\eta_n = (\eta_n^1, \eta_n^2, \dots, \eta_n^q)$$

η_n est une matrice ligne à q éléments. (3.9) est donc équivalent à

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \geq 0} \eta_n e^{in\theta} \right) g(\theta) \left(\sum_{p \geq 0} \eta_p e^{ip\theta} \right)^* d\theta \tag{3.10}$$

on a donc :

3.1. Théorème

La prédiction incomplète se ramène à une somme de prédictions scalaires si et seulement si il existe une matrice unitaire U appartenant à H^2 ⁽¹⁾ diagonalisant la matrice $f(\theta)$.

$$g = U^* f U \tag{3.11}$$

3.2. Corollaire

Soit $F = AA^*$, avec A appartenant à H^2 , la prédiction incomplète se ramène à une somme de prédictions scalaires, si et seulement si il existe une matrice unitaire U appartenant à H^2 et une matrice diagonale B appartenant à H^2 telles que :

$$A = UB \tag{3.12}$$

⁽¹⁾ Ensemble des fonctions de $L_2[0, 2\pi]$ ayant un prolongement analytique dans le disque.

Preuve. — Le corollaire 3.2 est équivalent au théorème 3.1

$$(\exists U \in H^2, A = UB) \Rightarrow (\exists U \in H^2, UgU^* = f)$$

Soit $g = BB^*$, on a alors :

$$\begin{aligned} UgU^* &= UBB^*U = AA^* = f \\ (\exists U \in H^2, UgU^* = f) &\Rightarrow (\exists U \in H^2, A = UB) \end{aligned}$$

g est factorisable sous la forme :

$$g = BB^*, \quad B \in H^2$$

on a donc :

$$U^*fU = BB^*$$

ce qui s'écrit aussi :

$$f = UBB^*U = UB(UB)^*$$

A et UB sont par définition des « left outer matrices » telles que

$$AA^* = UB(UB)^*,$$

on peut alors appliquer les résultats de Helson et Lowdenslager ⁽¹⁾; à un facteur multiplicatif près — constitué par une matrice unitaire constante — on a donc :

$$A = UB.$$

4. CONTRE-EXEMPLES

Pour une matrice f quelconque définie non négative, dont les éléments appartiennent à $L_1 [0, 2\pi]$ et telle que $\text{Log} [\det f]$ appartienne à $L_1 [0, 2\pi]$, on n'est pas assuré de l'existence d'une matrice U unitaire appartenant à H^2 et telle que (3.11) soit vérifiée.

4.1. Contre-exemple pour une matrice carrée d'ordre 2

$$\text{Soit } f(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i \operatorname{sh}((4\pi)^{-1}\theta)}{2} \\ \frac{-i \operatorname{sh}((4\pi)^{-1}\theta)}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

⁽²⁾ Théorème 11, page 206 de [2].

on a

$$\det (f(\theta) - sI_2) = (1 - s)(2 - s) - \frac{\text{sh}^2((4\pi)^{-1}\theta)}{4}$$

l'équation $\det (f(\theta) - sI_2) = 0$ s'écrit encore :

$$s^2 - 3\Delta + 2 - \frac{\text{sh}^2((4\pi)^{-1}\theta)}{4} = 0$$

on a

$$\Delta = 9 - 4\left(2 - \frac{\text{sh}^2((4\pi)^{-1}\theta)}{4}\right) = 1 + \text{sh}^2[(4\pi)^{-1}\theta] = \text{ch}^2[(4\pi)^{-1}\theta]$$

d'où les 2 racines

$$s_1 = \frac{3 - \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta]}{2} \quad s_2 = \frac{3 + \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta]}{2}$$

les vecteurs propres associés sont pour

$$s_1 \begin{vmatrix} i \text{sh}[(4\pi)^{-1}\theta] \\ 1 - \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] \end{vmatrix} \quad s_2 \begin{vmatrix} i \text{sh}[(4\pi)^{-1}\theta] \\ 1 + \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] \end{vmatrix}$$

ce qui donne la matrice U

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i \text{sh}[(4\pi)^{-1}\theta]}{(2 \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta][\text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] - 1])^{\frac{1}{2}}} & \frac{i \text{sh}[(4\pi)^{-1}\theta]}{(2 \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta][\text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] + 1])^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{1 - \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta]}{(2 \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta][\text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] - 1])^{\frac{1}{2}}} & \frac{1 + \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta]}{(2 \text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta][\text{ch}[(4\pi)^{-1}\theta] + 1])^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

U est défini à une matrice multiplicative près de la forme

$$V = \begin{pmatrix} e^{iv_1(\theta)} & 0 \\ 0 & e^{iv_2(\theta)} \end{pmatrix} \text{ avec } v_1 \text{ et } v_2 \text{ appartenant à } \mathbb{R}$$

il reste à montrer qu'il n'existe pas v_1 et v_2 tels que UV appartienne à H^2 .
Si $U = (U_{jk})$ $j, k = 1, 2$, on a :

$$UV = \begin{pmatrix} U_{11}e^{iv_1} & U_{12}e^{iv_2} \\ U_{21}e^{iv_1} & U_{22}e^{iv_2} \end{pmatrix}$$

U_{22} est une fonction continue strictement positive, $\text{Log } U_{22}$ est donc une fonction réelle, il existe une fonction holomorphe dans $B(0,1)$ dont la partie réelle est égale sur $C(0,1)$ à $\text{Log } U_{22}$, ce sera h_{22} , on choisira $v_2 = \text{Im}(h_{22})$, $U_{22}e^{iv_2}$ appartiendra donc à H_2 . $-iU_{12}e^{iv_2}$ n'est pas une fonction de H^2 ,

cela supposerait que U_{22} et $-iU_{12}$ (qui est positif) différent d'une constante au plus ce qui est faux. UV n'est donc pas une fonction de H^2 puisque un élément au moins n'appartient pas à H^2 .

4.2. Contre-exemple pour une matrice carrée d'ordre q

Soit $f(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \bar{\alpha} \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ & 0 & & 0 \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $\alpha(\theta) \in L_1 [0, 2\pi]$ $0 < |\alpha(\theta)| < 1$

on a

$$\det (f(\theta) - sI_q) = (1 - s)^q - \alpha\bar{\alpha}(1 - s)^{q-2} = (1 - s)^{q-2}[s^2 - 2s + 1 - \alpha\bar{\alpha}]$$

$$\Delta = \alpha\bar{\alpha}$$

on a $(q - 2)$ vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre $s = 1$ ce seront

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et ont 2 valeurs propres distinctes $s_1 = 1 + |\alpha|$, $s_q = 1 - |\alpha|$, les vecteurs propres associés seront :

$$s_1 \begin{vmatrix} \bar{\alpha} \\ \sqrt{2}|\alpha| \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad s_q \begin{vmatrix} \bar{\alpha} \\ -\sqrt{2}|\alpha| \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

on a donc :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2}|\alpha|} & 0 & \dots & 0 & -\frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2}|\alpha|} \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

U est défini à une matrice multiplicative près de la forme :

$$V = \begin{pmatrix} e^{iv_1(\theta)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & & \\ 0 & & & e^{iv_q(\theta)} \end{pmatrix} \text{ avec } v_j \quad j = 1, \dots, q \text{ appartenant à } \mathbb{R} \quad (4.1)$$

si on choisit α de façon à ce que $\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}$ et $\frac{|\alpha|}{\bar{\alpha}}$ ne soient pas des fonctions de H^2 , alors on peut déterminer v_1 de façon à ce que $\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|} e^{iv_1}$ soit égal à 1, mais alors e^{iv_1} n'appartient pas à H^2 et le produit UV n'appartient pas à H^2 .

4.3. Autre contre-exemple

La recherche d'un contre-exemple peut se mettre sous la forme suivante :

Si U est une matrice mesurable unitaire quelconque, elle est définie à une matrice V multiplicative près de la forme (4.1) ; est-il possible de déterminer V de façon à ce que UV appartienne à H^2 .

On peut se donner une matrice unitaire mesurable quelconque en choisissant un vecteur colonne quelconque $(U_{11}, U_{21}, \dots, U_{q1})$ de norme 1, on complète le choix des autres colonnes de façon à ce que l'on obtienne une matrice unitaire. Le choix de v_1 modifie la première colonne seule, on pourra donc si les $U_{j1}, j = 1, \dots, q$ sont choisis de façon à ce qu'aucun d'entre eux ne soient holomorphes rendre un des $U_{j1}e^{iv_1}$ holomorphe, si le choix des $U_{k1}, k \neq j$, est fait correctement, les $U_{k1}e^{iv_1}, k \neq j$ ne seront pas holomorphes.

5. CONCLUSION

Ces résultats montrent que si l'on prédit scalairement l'avenir de la première composante — c'est-à-dire, en utilisant uniquement son seul passé — on trouve une prédiction bien moins bonne qu'en utilisant la prédiction vectorielle.

Ceci peut également s'énoncer ainsi : il est impossible en général de construire une base où la prédiction vectorielle d'un processus à q composantes se réduise à la prédiction scalaire de ses q composantes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HELSON-LOWDENSLAGER : Prediction Theory and Fourier Series in Several variables Part I. *Acta. Math.*, t. **99**, 1959, p. 165-202.
- [2] HELSON-LOWDENSLAGER : Prediction Theory and Fourier Series in several variables Part II. *Acta. Math.*, t. **106**, 1962, p. 175-213.
- [3] WIENER-MASANI : the Prediction Theory of Multivariate stochastic Processes Part I. *Acta. Math.*, t. **98**, 1957, p. 111-150.
- [4] WIENER-MASANI : the Prediction Theory of Multivariate stochastic Processes Part II. *Acta. Math.*, t. **99**, 1958, p. 93-137.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1976)