ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN SAINT-PIERRE

Multiapplications boréliennes à valeurs convexes de $\mathbb{R}^n$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 2 (1976), p. 163-180
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_2_163_0>

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 2, 1976, p. 163-180. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Multiapplications boréliennes à valeurs convexes de $\mathbb{R}^n$

par

Jean SAINT-PIERRE
Département de Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
place Eugène-Bataillon, 34060 Montpellier Cedex

RÉSUMÉ. — Soit Γ une multiapplication d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs convexes et de graphe borélien. Nous montrons que les graphes des multiapplications qui à $x \in X$ font correspondre l'intérieur, l'adhérence, la frontière et le profil de Γ_x sont également boréliens. Les hypothèses sur X sont que X et les ouverts de X sont analytiques.

SUMMARY. — Let Γ a multifunction of a topological space X into $\mathbb{R}^n$, Γ being convex-valued and the graph of Γ a Borel subset of $X \times \mathbb{R}^n$. We show that the graphs of the multifunctions which to each $x \in X$ associate the interior, the closure, the boundary and the set of extreme points of Γ_x are also Borel sets. Our hypothesis on X are that X and all open subsets of X are analytic.

INTRODUCTION

Soit X un espace topologique et Γ une multiapplication de X dans $Y = \mathbb{R}^n$ à valeurs convexes et de graphe borélien et soient int Γ, adh Γ, fr Γ et pr Γ les multiapplications qui à x associent l'intérieur, l'adhérence, la frontière et le profil de Γ_x ; alors les graphes de ces multiapplications sont également boréliens lorsque X est un espace analytique dont les ouverts sont analytiques (nous donnons au mot analytique le même sens

que C. A. Rogers dans [*8*]). Le cas de int Γ est très facile et ne nécessite aucune hypothèse sur X ; les cas de adh Γ et fr Γ sont donc équivalents. Sous l'hypothèse que X est lusinien on peut déduire le résultat du théorème d'Arsenin sur la projection d'un borélien à coupes K_σ (cf. [*4*]), sinon on peut faire des démonstrations directes en suivant une méthode due à C. A. Rogers (cf. [*9*]). Les problèmes relatifs à int Γ, adh Γ, fr Γ constituent la partie I. Le cas du profil est plus difficile et se divise assez naturellement en deux parties.

Dans II on montre que le graphe de Γ est monotonément engendré à partir des fermés de $X \times Y$ dont la projection sur Y est relativement compacte et dont les coupes sont convexes. Ce résultat annoncé dans [*11*] est en quelque sorte une généralisation du résultat de D. Preiss sur la génération monotone des convexes boréliens de $\mathbb{R}^n$ [*7*]. D'après [*5*] on ne peut espérer étendre ce résultat à Y de dimension infinie.

Dans la partie III on introduit la notion de ε-profils et on élucide le comportement des ε-profils dans les réunions et intersections monotones. On retrouve en particulier le fait que le profil d'un convexe borélien de $\mathbb{R}^n$ est borélien (cf. [*13*]) avec, comme information supplémentaire, la connaissance du type ordinal du profil si l'on connaît le type ordinal de la génération monotone du convexe.

Ce résultat a été annoncé dans [*12*]. Les parties II et III ont été également exposées à Montpellier dans le cas où X est régulier [*10*].

Les notations et les définitions seront introduites au fur et à mesure de leur apparition dans le texte. L'ensemble vide sera noté ϕ et A^c désignera le complémentaire de A. Rappelons enfin qu'une multiapplication Γ de X dans Y est une application de X dans l'ensemble des parties de Y et que le graphe de Γ est l'ensemble

$$\mathrm{GR}(\Gamma) = \{ (x, y) \in X \times Y : y \in \Gamma_x \}$$

Enfin je tiens à remercier M. Valadier pour l'aide apportée dans ce travail et également C. Castaing pour une question à laquelle on trouve ici la réponse.

I. MULTIAPPLICATIONS int Γ, adh Γ, fr Γ

Soient Z et X deux espaces topologiques et F une multiapplication de Z dans X, on dira que F est semi-continue supérieurement (et on écrira que F est s. c. s.) si, pour tout $z \in Z$, F_z est un compact de X et si pour tout ouvert U de X l'ensemble $F^+U = \{ z \in Z : F_z \subset U \}$ est ouvert.

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des nombres irrationnels de [0, 1] muni de la topologie

induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, on dira qu'un espace topologique X est analytique si X est séparé et si X est l'image de $\mathscr{I}$ par une multiapplication s. c. s. On utilisera le fait que $\mathscr{I}$ est homéomorphe à l'ensemble S des suites d'entiers positifs muni de la topologie produit de la topologie discrète sur $\mathbb{N}^*$.

Soit X un espace topologique et $Y = \mathbb{R}^n$ on notera $\mathscr{H}$ la famille des fermés A de $X \times Y$ tels que la projection de A sur Y soit relativement compacte, $\mathscr{C}$ la famille des parties A de $X \times Y$ telles que, pour tout x dans X, la coupe $A_x = \{ y \in Y : (x, y) \in A \}$ est convexe et on notera $\mathscr{K} = \mathscr{H} \cap \mathscr{C}$.

Étant donné un ensemble E et une classe $\mathscr{E}$ de parties de E, nous appellerons $\mathscr{E}$-boréliens les éléments de la plus petite classe $\mathscr{B}(\mathscr{E})$ de parties de E contenant $\mathscr{E}$ et stable pour les intersections et réunions dénombrables ; nous appellerons classe monotone engendrée par $\mathscr{E}$ et noterons $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{E})$ la plus petite classe de parties de E contenant $\mathscr{E}$ et stable pour les intersections et réunions monotones dénombrables. Les éléments de $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{E})$ seront dits $\mathscr{E}$-boréliens monotonément engendrés.

Nous renvoyons le lecteur à [*1*] pour les principales propriétés des multiapplications s. c. s. et à [*8*] (et à [*2*]) pour celles des espaces analytiques.

LEMME 1. — *Soit* X *un espace analytique dont tous les ouverts sont analytiques et* $Y = \mathbb{R}^n$ *alors tout borélien de* $X \times Y$ (*au sens de la tribu borélienne de* $X \times Y$) *est bianalytique (analytique et de complémentaire analytique).*

Démonstration. — Désignons par $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ les familles des fermés et des ouverts de $X \times Y$. Soit $(U_n, n \in \mathbb{N})$ une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ et A un ouvert quelconque de $X \times Y$, A est par définition une réunion de pavés ouverts $\{ V_i \times W_i, i \in I \}$. Soit V'_n le plus grand ouvert de X tel que $V'_n \times U_n \subset A$, on a alors $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_n \times U_n$. En effet si $(x, y) \in A$ il existe $i \in I$ tel que $x \in V_i$ et $y \in W_i$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in U_n \subset W_i$ d'où $V_i \subset V'_n$ et $(x, y) \in V'_n \times U_n$. Les ouverts de $X \times Y$ sont donc analytiques comme réunion dénombrable de pavés ouverts qui eux sont analytiques comme produit de deux espaces analytiques, les ouverts de Y étant évidemment analytiques (voir [*8*] et [*1*]).

La tribu borélienne de $X \times Y$ est égale à $\mathscr{B}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$ en effet soit $\mathscr{E}$ la famille de parties A de $X \times Y$ telles que A et le complémentaire A^c de A appartiennent à $\mathscr{B}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$; $\mathscr{E}$ est une tribu qui contient $\mathscr{F}$ et contenue dans la tribu borélienne de $X \times Y$ (celle-ci contenant évidemment $\mathscr{B}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$). La famille des parties analytiques de $X \times Y$ étant stable pour les unions et les intersections dénombrables (cf. [*8*]) on peut conclure que les boréliens de $X \times Y$ sont analytiques et donc bianalytiques.

Remarque. — Dans la démonstration précédente prenons pour base $(U_n, n \in \mathbb{N})$ de Y des ouverts convexes relativement compacts (par exemple des boules pour la distance usuelle). Soit $B \in \mathscr{F}$, on a vu que $A = B^c = \bigcup_n V'_n \times U_n$ d'où

$$B = \bigcap_n [(V'^c_n \times Y) \cup (X \times U^c_n)]$$

Le fermé U^c_n est une intersection dénombrable d'ouverts aux mêmes réunions dénombrables d'ensembles $\bar{U}_m$. Si l'on remarque que tout ensemble $F \times \bar{U}_n$, où F est fermé dans X, appartient à $\mathscr{H}$ et que Y est une réunion dénombrable de convexes compacts on peut affirmer que $B \in \mathscr{K}_{\sigma\delta} \subset \mathscr{B}(\mathscr{K})$ et donc $\mathscr{B}(\mathscr{K}) = \mathscr{B}(\mathscr{F})$ ($\mathscr{K}_\sigma$ (resp. $\mathscr{K}_{\sigma\delta}$) désigne la classe obtenue en stabilisant $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{K}_\sigma$) pour les unions dénombrables (resp. les intersections dénombrables)).

Nous donnons maintenant une version améliorée du théorème de Souslin-Lusin dont la démonstration m'a été communiquée par C. Dellacherie.

PROPOSITION 0. — *Soit* X *un espace analytique dont les ouverts sont analytiques,* $Y = \mathbb{R}$ *et* f *une application d'une partie* A *de* X *dans* Y *dont le graphe* GR(f) *est un borélien de* $X \times Y$. *Alors* A *est un borélien de* X *et* f *une application borélienne de* A *dans* Y.

Démonstration. — Pour tout n entier positif, soit (I^n_k) la suite des intervalles dyadiques $[k.2^{-n}, (k+1).2^{-n}[$ où k décrit l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Soit $A^n_k = f^{-1}(I^n_k)$ la projection sur X du borélien $GR(f) \cap X \times I^n_k$. Comme, d'après le lemme 1, les boréliens de $X \times Y$ sont analytiques les A^n_k sont analytiques et disjoints pour n fixé. On peut donc les séparer par des boréliens disjoints $B^n_k \supset A^n_k$ (voir [8] pour le théorème de séparation de deux analytiques disjoints, on passe au cas d'une famille dénombrable comme dans le cas classique). On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une application borélienne g_n de X dans Y en posant $g_n(x) = k.2^{-n}$ pour $x \in B^n_k$ et $g_n(x) = 0$ pour x dans le complémentaire de la réunion des B^n_k, $k \in \mathbb{Z}$. On pose ensuite $g = \liminf_{n \to \infty} g_n$; g est borélienne et coïncide avec f sur A. Le graphe de g est borélien car si U_n est une suite de boréliens qui sépare les points de Y on a

$$GR(g) = \bigcap_n [g^{-1}(U_n) \times U_n \cup g^{-1}(U^c_n) \times U^c_n]$$

Enfin A est analytique comme projection de GR(f) et $X \backslash A$ est analytique

comme projection du borélien $\mathrm{GR}(g)\backslash\mathrm{GR}(f)$ de $X \times Y$. Les bianalytiques étant boréliens (par le théorème de séparation) on conclut.

PROPOSITION 1. — *Soit* X *un espace topologique quelconque et* $Y = \mathbb{R}^n$, *si* Γ *est une multiapplication à valeurs convexes de* X *dans* Y *dont le graphe est borélien, la multiapplication* int Γ *qui à* x *fait correspondre l'intérieur de* Γ_x *est également de graphe borélien.*

Démonstration. — Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ (par exemple $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, etc.). Pour une partie A de $X \times Y$ et un vecteur e de Y on note $A + e$ l'ensemble des $(x, y + e)$ où $(x, y) \in A$; il est évident que si A est borélien $A + e$ l'est aussi. Le graphe de la multiapplication int Γ n'est autre que l'ensemble

$$\mathrm{GR}\ (\mathrm{int}\ \Gamma) = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} \left(\left(\mathrm{GR}(\Gamma) + \frac{1}{p} e_i \right) \cap \left(\mathrm{GR}(\Gamma) - \frac{1}{p} e_i \right) \right)$$

(où $\mathrm{GR}(\Gamma)$ désigne le graphe de Γ) et cet ensemble est borélien dès que $\mathrm{GR}(\Gamma)$ l'est.

PROPOSITION 2. — *Soit* X *un espace analytique dont tous les ouverts sont analytiques et* $Y = \mathbb{R}^n$, *si* Γ *est une multiapplication à valeurs convexes de* X *dans* Y *dont le graphe est borélien, la projection* $\Gamma^{-}Y$ *du graphe* $\mathrm{GR}(\Gamma)$ *de* Γ *sur* X *est borélienne.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer la proposition dans le cas où $n = 1$ car on peut dire alors que la projection de $\mathrm{GR}(\Gamma)$ sur $X \times R^{n-1}$ est borélienne et à sections convexes et on peut appliquer à nouveau le résultat pour $n = 1$. On voit facilement par récurrence que la projection de $\mathrm{GR}(\Gamma)$ sur X est alors borélienne. Si X est lusinien le cas $n = 1$ est une conséquence du théorème d'Arsenin (voir [*4*] et [*6*]) qui affirme que pour X et Y métrisables compacts la projection sur X d'un borélien B de $X \times Y$ dont les coupes B_x sont des K_σ est borélienne. En effet le théorème d'Arsenin est encore vrai si X est lusinien et un convexe de $\mathbb{R}$ est évidemment un K_σ.

Néanmoins pour la complétude de l'exposé nous donnons une démonstration directe beaucoup plus facile et intuitive que la démonstration du théorème d'Arsenin. Nous suivons ici la méthode de C. A. Rogers ([*9*]). Pour p entier positif soit D_p l'opérateur qui à toute multiapplication Γ de X dans $\mathbb{R}$ à valeurs convexes bornées fait correspondre la multiapplication $D_p\Gamma$ dont le graphe est

$$\mathrm{GR}(D_p\Gamma) = \mathrm{GR}(\Gamma)\backslash \left\{ \mathrm{GR}\ (\mathrm{int}\ \Gamma) + (-1)^p \frac{1}{p} \right\}.$$

La multiapplication $D_p\Gamma$ est également à valeurs convexes bornées de $\mathbb{R}$. De plus si $GR(\Gamma)$ est borélien, $GR(D_p\Gamma)$ l'est aussi. Posons $B = \bigcap_{p=0}^{\infty} B_p$ avec $B_0 = \Gamma$ et $B_p = D_p B_{p-1}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Le graphe de B est borélien et l'on vérifie facilement que pour tout $x \in X$ tel que $\Gamma_x \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang les $(B_p)_x$ forment une suite décroissante d'intervalles fermés de longueur inférieure où égale à $\frac{1}{p}$.

Ainsi, si x appartient à la projection $\Gamma^- Y$ de $GR(\Gamma)$ sur X, B_x est constitué par un point de Γ_x et si x n'appartient pas à cette projection B_x est évidemment vide ; autrement dit la multiapplication B est une section borélienne (i. e. de graphe borélien) de Γ. La projection de $GR(\Gamma)$ sur X, égale à la projection de GR(B) sur X est donc borélienne d'après la proposition 0.

Enfin si Γ n'est pas à valeurs bornées, on définit une suite de multiapplications boréliennes à valeurs bornées Γ^m par $\Gamma_x^m = \{ y \in \Gamma_x : | y | \leq m \}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. On a évidemment $GR(\Gamma) = \bigcup_{m=1}^{\infty} GR(\Gamma^m)$ et $\Gamma^- \mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\Gamma^m)^- \mathbb{R}$ est borélien d'après ce qui précède.

PROPOSITION 3. — *Soit* X *un espace analytique dont tous les ouverts sont analytiques et* $Y = \mathbb{R}^n$, *si* Γ *est une multiapplication à valeurs convexes de* X *dans* Y *dont le graphe est borélien les graphes des multiapplications* adh Γ *et* fr Γ *qui à* x *font correspondre l'adhérence et la frontière de* Γ_x *sont également boréliens.*

Démonstration. — D'après la proposition 1 il suffit de montrer que GR (adh Γ) est borélien. Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{R}^n$. Posons pour $y \in D$ et $m \in \mathbb{N}^*$

$$C_{y,m} = \mathrm{proj}_X \left(GR(\Gamma) \cap X \times \bar{B}\left(y, \frac{1}{m} \right) \right)$$

où $\mathrm{proj}_X A$ désigne la projection de $A \subset X \times Y$ sur X et $\bar{B}\left(y, \frac{1}{m} \right)$ la boule fermée de centre y et de rayon $\frac{1}{m}$.

D'après la proposition 2 pour tout $y \in D$ et tout $m \geq 1$, $C_{y,m}$ est un borélien de X. Montrons que GR (adh Γ) est égal au borélien

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{y \in D} C_{y,m} \times \bar{B}\left(y, \frac{1}{m} \right).$$

Soit $(x, y) \in X \times \mathbb{R}^n$. Si $y \in \bar{\Gamma}_x$, pour tout $m \geq 1$, il existe $y' \in D$ tel que la distance de y à y' $d(y, y')$ est inférieure ou égale à $\frac{1}{2m}$; de plus la boule $\bar{B}\left(y, \frac{1}{2m}\right)$ rencontre Γ_x en un point y''. Comme

$$d(y', y'') \leq d(y', y) + d(y, y'') \leq \frac{1}{m}$$

on a : $x \in C_{y',m}$ et donc $(x, y) \in C_{y',m} \times \bar{B}\left(y', \frac{1}{m}\right)$.

Réciproquement si pour tout $m \geq 1$ il existe $y' \in D$ tel que

$$(x, y) \in C_{y',m} \times \bar{B}\left(y', \frac{1}{m}\right)$$

on a en particulier $x \in C_{y',m}$ d'où l'existence de $y'' \in \Gamma_x$ tel que $d(y', y'') \leq \frac{1}{m}$. On a donc :

$$d(y, y'') \leq d(y, y') + d(y', y'') \leq \frac{2}{m}.$$

Pour tout m la boule de centre y et de rayon $\frac{2}{m}$ rencontre donc Γ_x ce qui signifie que $(x, y) \in \mathrm{GR}\ (\mathrm{adh}\ \Gamma)$.

Remarque 1. — La démonstration ci-dessus est valable si X est lusinien, Y métrisable compact, A un borélien de $X \times Y$ tel que les projections de $A \cap \bar{B}\left(y, \frac{1}{m}\right)$ sur X sont boréliennes pour tout $y \in D$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \bar{A}_x$ est borélien. C'est le cas en particulier d'après le théorème d'Arsenin si les coupes A_x sont K_σ (voir [*4*]).

Remarque 2. — Bien que faciles les propositions précédentes ne résultent pas trivialement du théorème d'Arsenin car un convexe de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément K_σ dès que $n \geq 2$.

II. GÉNÉRATION MONOTONE DU GRAPHE DE Γ

Nous démontrons dans cette partie que si X est un espace analytique dont tous les ouverts sont analytiques et si Γ est une multiapplication de X dans $Y = \mathbb{R}^n$ à valeurs convexes et de graphe $\mathrm{GR}(\Gamma)$ borélien alors $\mathrm{GR}(\Gamma) \in \mathscr{B}^M(\mathscr{K})$.

A. Résultats préliminaires

LEMME 2. — *Soit* X, Y, Z *des espaces topologiques,* Y *étant séparé et* Z *compact. Soit* Γ *une multiapplication s. c. s. de* Z *dans* Y. *Si* A *est un fermé*

de $X \times Z$ *l'image de* A *par la multiapplication* $(x, z) \mapsto \{x\} \times \Gamma(z)$ *est un fermé de* $X \times Y$.

D'après [*1*] (chap. VI, § 1, th. 7 et corollaire) A est le graphe d'une multiapplication s. c. s. de X dans Z, $x \mapsto A_x$. Le produit de composition de deux multiapplications s. c. s. étant s. c. s. (*ibidem* § 2, th. 1') la multiapplication $x \mapsto \Gamma(A_x)$ de X dans Y est s. c. s. Le graphe de cette multiapplication est donc fermé (*ibidem* § 1, th. 3 et th. 6). Or ce graphe n'est autre que l'image de A par la multiapplication $(x, z) \mapsto \{x\} \times \Gamma(z)$.

COROLLAIRE. — *Soit* X *un espace topologique et* $Y = \mathbb{R}^n$, Γ *une multiapplication de* X *dans* Y *de graphe* $GR(\Gamma)$ *fermé. Si* $\Gamma(X)$ *est relativement compact* (i. e. $GR(\Gamma) \in \mathscr{H}$), *le graphe* GR (co ($\Gamma$)) *de la multiapplication* co (Γ) *qui à tout* $x \in X$ *fait correspondre l'enveloppe convexe de* Γ_x *est fermé* (i. e. GR (co (Γ)) $\in \mathscr{K}$). *Si le graphe de* Γ *est compact le graphe de* co (Γ) *l'est aussi.*

Démonstration. — Soit K un compact de Y tel que $GR(\Gamma) \subset X \times K$. Soit $\Lambda_{p+1} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{R}_+^{p+1} : \lambda_1 + \ldots + \lambda_{p+1} = 1\}$. Soit f l'application continue de $K^{p+1} \times \Lambda_{p+1}$ dans Y définie par

$$(y_1, \ldots, y_{p+1} ; \lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i y_i .$$

GR (co (Γ)) est l'image du fermé $GR(\Gamma^{p+1}) \times \Lambda_{p+1}$ par l'application $(x, z) \mapsto (x, f(z))$ et il suffit d'appliquer le lemme 2. Si $GR(\Gamma)$ est compact, GR (co Γ) est un fermé contenu dans le produit de deux compacts (l'enveloppe convexe d'un compact de $\mathbb{R}^n$ étant compacte).

PROPOSITION 4. — *Soit* X *un espace topologique séparé,* $Y = \mathbb{R}^n$, A *et* B *deux compacts de* $X \times Y$ *disjoints. Si les sections* A_x *de* A *sont convexes, il existe des voisinages* A' *de* A *et* B' *de* B *disjoints,* A' *vérifiant de plus les conditions suivantes :* A' *est fermé et la projection de* A' *sur* Y *est relativement compacte; les sections* A'_x *de* A' *sont convexes.*

Démonstration. — Montrons d'abord :

Pour tout $(x, y) \notin A$ *il existe un voisinage ouvert* $U_{x,y}$ *de* x *dans* X, *un demi-espace ouvert* $H_{x,y}$ *de* Y *qui contient* y *et un voisinage ouvert* $W_{x,y}$ *de* A *dans* $X \times Y$ *dont la projection sur* Y *est relativement compacte tels que* $W_{x,y} \cap U_{x,y} \times H_{x,y} = \emptyset$.

Soit $H_{x,y}$ un demi-espace ouvert de Y qui contient y et tel que $\overline{H_{x,y}}$ ne

rencontre pas A_x ; un tel demi-espace existe car A_x est convexe compact. Pour tout point $(x', y') \in A$ il existe un voisinage ouvert $V_{x',y'} = V^1_{x',y'} \times V^2_{x',y'}$ de (x', y') et un voisinage ouvert $U'_{x',y'}$ de x dans X tels que

$$V_{x',y'} \cap U'_{x',y'} \times H_{x,y} = \emptyset$$

(pour $x' \neq x$ on utilise le fait que X est séparé pour avoir $V^1_{x',y'} \cap U'_{x',y'} = \emptyset$; pour $x' = x$ on utilise $y' \notin \overline{H_{x,y}}$). Comme $Y = \mathbb{R}^p$ est localement compact, on peut choisir $V^2_{x',y'}$ relativement compact. Du recouvrement ouvert $\{ V_{x',y'} ; (x', y') \in A \}$ de A on extrait un sous-recouvrement fini $\{ V_{x'_i,y'_i} ; i = 1, 2, \ldots, k \}$ et on pose

$$W_{x,y} = \bigcup_{i=1}^{k} V_{x'_i,y'_i} \qquad \text{et} \qquad U_{x,y} = \bigcap_{i=1}^{k} U'_{x'_i,y'_i} .$$

Il est clair que $H_{x,y}$, $U_{x,y}$ et $W_{x,y}$ satisfont les conditions annoncées.

Achevons maintenant la démonstration de la proposition. On extrait du recouvrement ouvert $\{ U_{x,y} \times H_{x,y} ; (x, y) \in B \}$ de B un sous-recouvrement fini $\{ U_{x_i,y_i} \times H_{x_i,y_i} ; i = 1, 2, \ldots, m \}$. On pose :

$$B' = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i,y_i} \times H_{x_i,y_i} \qquad \text{et} \qquad A'' = \bigcap_{i=1}^{m} \overline{W_{x_i,y_i}} .$$

B' et A'' sont des voisinages disjoints de B et A. La projection de A'' sur Y est relativement compacte. De plus, le complémentaire B'^c de B' est fermé et ses sections $(B'^c)_x$ sont convexes car

$$B'^c = \bigcap_{i=1}^{m} (U^c_{x_i,y_i} \times Y \cup U_{x_i,y_i} \times H^c_{x_i,y_i}) .$$

Posons $A' = \bigcup_{x \in X} \{ x \} \times \mathrm{co}\,(A''_x)$. Le corollaire du lemme 2 montre que A' est fermé et comme les sections de B'^c sont convexes A' est contenu dans B'^c. L'enveloppe convexe d'un compact de $\mathbb{R}^p$ étant compacte la projection de A' sur Y est relativement compacte, ce qui achève la démonstration.

B. Théorème de séparation

PROPOSITION 5. — *Soit* X *un espace séparé* $Y = \mathbb{R}^p$ *et deux parties analytiques* A *et* B *de* $X \times Y$. *On suppose que* $A \cap B = \emptyset$ *et que les sections* A_x *sont convexes. Il existe alors un ensemble* C *qui appartient à la classe monotone de* $X \times Y$ *engendrée par la famille* $\mathscr{K}$ *(fermés* F *de* $X \times Y$ *dont les sections* F_x *sont convexes et dont la projection sur* Y *est relativement compacte) tel que* $A \subset C$ *et* $B \cap C = \emptyset$ *(on dira que* (A, B) *est séparé par* $\mathscr{B}^M(\mathscr{K})$*).*

Rappelons deux lemmes utilisés par D. Preiss ([7]) qui seront utilisés dans la démonstration, basés sur le fait que $\mathscr{K}$ est stable pour les intersections finies.

LEMME 3. — *La famille $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ est fermée pour les intersections dénombrables.*

Démonstration. — Si $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ il est aisé de vérifier que la famille $\mathscr{D}(\mathscr{M})$ des ensembles $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ pour lesquels $\mathrm{B} \cap \mathrm{M} \in \mathscr{B}^{m}(\mathscr{K})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$ est fermée pour les limites monotones. Il s'ensuit que $\mathscr{D}(\mathscr{K}) = \mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ et de là $\mathscr{D}(\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})) = \mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$. Autrement dit $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ est stable pour les intersections finies et donc pour les intersections dénombrables car par définition $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ est stable pour les intersections dénombrables décroissantes.

LEMME 4. — *Soit* A *et* B *deux parties de* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *avec* $\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$, $\forall n\ \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ *et* $\mathrm{B} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{B}_m$. *Si le couple* (A, B) *n'est pas séparé par* $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ *il existe n et m tels que le couple* $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n)$ *n'est pas séparé par* $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$.

Démonstration. — Supposons que pour tout n et m le couple $(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_m)$ est séparé. Soit $\mathrm{C}_{n,m} \in \mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ tel que $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{C}_{n,m}$ et $\mathrm{C}_{n,m} \cap \mathrm{B}_m = \emptyset$. Posons $\mathrm{C}_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{C}_{j,m}$. Il est clair que l'on a $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{C}_n$ et $\mathrm{C}_n \cap \mathrm{B} = \emptyset$ et $\mathrm{C}_n \subset \mathrm{C}_{n+1}$. D'après le lemme 3, $\mathrm{C}_n \in \mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$. L'ensemble $\mathrm{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}_n$ est dans $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ et sépare le couple (A, B).

Démonstration de la proposition 5. — Si $\mathrm{A} = \emptyset$ ou $\mathrm{B} = \emptyset$, l'assertion est évidente. Supposons donc que A et B sont tous deux non vides et que le couple (A, B) n'est pas séparé par $\mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$. On désignera par S l'espace des suites d'entiers positifs muni de la topologie produit des topologies discrètes sur $\mathbb{N}^*$ dans chacun des facteurs $\mathrm{S} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ldots$; S est homéomorphe à l'espace des irrationnels de [0, 1]. Soit F et G deux multiapplications s. c. s. de S dans $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ telles que $\mathrm{F}(\mathrm{S}) = \mathrm{A}$ et $\mathrm{G}(\mathrm{S}) = \mathrm{B}$. Notons $\mathrm{S}_{n_1,\ldots,n_j}$ (resp. $\mathrm{S}^*_{n_1,\ldots,n_j}$) l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs dont le $i^{\text{ème}}$ terme est égal (resp. inférieur ou égal) à n_i pour $i = 1, 2, \ldots, j$. D'après le lemme 4, on obtient deux suites (n_i), (m_i) d'entiers positifs telles que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ le couple $(\mathrm{F}(\mathrm{S}^*_{n_1,\ldots,n_i}), \mathrm{G}(\mathrm{S}_{m_1,\ldots,m_i}))$ n'est pas séparé.

Posons

$$\mathrm{P} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{S}^*_{n_1,\ldots,n_i} \qquad \mathrm{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{S}_{m_1,\ldots,m_i}$$

P est une partie compacte de S et Q est réduit au point $m = (m_1, m_2, \ldots)$.

Comme F est s. c. s. à valeurs compactes F(P) est compact. D'après le corollaire du lemme 2, $\widehat{F(P)} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathrm{co}\,(F(P))_x$ est également compact. Comme les coupes A_x de A sont convexes, $\widehat{F(P)} \subset A \Rightarrow F(P) \subset A$. $\widehat{F(P)}$ inclus dans A et G(Q) inclus dans B sont donc disjoints. D'après la proposition 4, il existe un voisinage C de $\widehat{F(P)}$ et un voisinage D de G(Q) disjoints avec $C \in \mathscr{K}$. Comme F et G sont s. c. s. et que P est compact, on a pour i assez grand

$$F(S^*_{n_1,\ldots,n_i}) \subset C \qquad \text{et} \qquad G(S_{m_1,\ldots,m_i}) \subset D\,.$$

En effet $(S_{m_1,\ldots m_i}, i \in \mathbb{N})$ forme un système fondamental de voisinages de $m = (m_1, m_2, \ldots)$, comme G est s. c. s. il existe un ouvert V contenant m tel que G(V) est contenu dans l'intérieur de D et pour i assez grand $S_{m_1,\ldots,m_i} \subset V$. De même $U = \Gamma^+$ (intérieur de C) est un ouvert qui contient P et pour conclure il suffit de remarquer que $(S^*_{n_1,\ldots,n_i}, i \in \mathbb{N})$ est un système fondamental de voisinage de P dans S.

Ainsi le couple $(F(S^*_{n_1,\ldots,n_i}), G(S_{m_1,\ldots,m_i}))$ est séparé par $C \in \mathscr{K}$ et l'on a une contradiction.

THÉORÈME 1. — *Soit* X *un espace analytique dont tous les ouverts sont analytiques,* $Y = \mathbb{R}^p$. *Soit* $\mathscr{C}$ *la famille des parties* A *de* $X \times Y$ *dont les coupes* A_x *sont convexes pour tout* $x \in X$, $\mathscr{H}$ *la famille des parties fermées de* $X \times Y$ *dont la projection sur* Y *est relativement compacte et* $\mathscr{K} = \mathscr{H} \cap \mathscr{C}$. *Tout élément de* $\mathscr{C}$ *appartenant à la tribu borélienne* $\sigma(X \times Y)$ *de* $X \times Y$ *est monotonément engendré à partir de* $\mathscr{K}$, *soit* $\mathscr{C} \cap \sigma(X \times Y) = \mathscr{B}^M(\mathscr{K})$.

Démonstration. — On a vu (lemme 1) que tout borélien A de $X \times Y$ est bianalytique. La proposition 5 appliqué à A et A^c pour $A \in \mathscr{C} \cap \sigma(X \times Y)$ nous dit que $A \in \mathscr{B}^M(\mathscr{K})$. Comme l'inclusion $\mathscr{B}^M(\mathscr{K}) \subset \mathscr{C} \cap \sigma(X \times Y)$ est évidente le théorème est démontré.

III. MULTIAPPLICATION PROFIL DE Γ

A. Classification ordinale des $\mathscr{F}$-boréliens (monotonément engendrés)

Soit E un ensemble et $\mathscr{F}$ une classe de parties de E nous reprenons pour les $\mathscr{F}$-boréliens (éléments de $\mathscr{B}(\mathscr{F})$) la classification de De La Vallée Poussin et nous introduisons une classification analogue pour les $\mathscr{F}$-boréliens monotonément engendrés (éléments de $\mathscr{B}^M(\mathscr{F})$). On notera respectivement $\mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_\sigma$, $\mathscr{F}_d$, $\mathscr{F}_\delta$, $\mathscr{F}_{\sigma'}$, $\mathscr{F}_{\delta'}$, les classes des réunies finies, réunions dénom-

brables, intersections finies, intersections dénombrables, réunions de suites croissantes, intersections de suites décroissantes d'éléments de $\mathscr{F}$.

LEMME 5. — *Les classes $\mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_\sigma$, $\mathscr{F}_d$, $\mathscr{F}_\delta$ sont aussi les plus petites classes contenant $\mathscr{F}$ et stables pour les opérations considérées. Les classes $\mathscr{F}_{sd} = (\mathscr{F}_s)_d$ et $\mathscr{F}_{s\delta}$ (resp. $\mathscr{F}_{ds}$ et $\mathscr{F}_{d\sigma}$) sont stables pour la réunion finie (resp. l'intersection finie).*

Nous laissons la démonstration de ce résultat classique au lecteur.

Remarque. — Si $\mathscr{F}$ est stable pour la réunion finie (resp. l'intersection finie) alors $\mathscr{F}_s = \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_\delta$ est stable pour la réunion finie (resp. $\mathscr{F}_\sigma$ est stable pour l'intersection finie). De plus alors $\mathscr{F}_{\sigma'} = \mathscr{F}_\sigma$ (resp. $\mathscr{F}_{\delta'} = \mathscr{F}_\delta$) est la plus petite classe contenant $\mathscr{F}$ et stable pour la réunion (resp. intersection) monotone dénombrable.

Soit η le premier ordinal non dénombrable. Pour $\alpha \in \eta$ on désigne par $\alpha + 1$ le successeur de α (plus petit ordinal supérieur à α) et pour $n \in \mathbb{N}$ on peut définir $\alpha + n$ par récurrence comme successeur de $\alpha + n - 1$. Pour tout ordinal dénombrable α ($\alpha \in \eta$) il existe une décomposition unique $\alpha = \alpha_0 + n$ telle que $n \in \mathbb{N}$ et que α_0 n'a pas de prédécesseur (ordinal β tel que $\beta + 1 = \alpha_0$). On dira que α est pair ou impair selon que n est pair ou impair et on appellera $\alpha = \alpha_0 + n$ décomposition canonique de α.

Étant donné un ensemble E et $\mathscr{F}$ une famille de parties de E nous allons définir par induction transfinie les $\mathscr{F}$-boréliens de type α et les $\mathscr{F}$-boréliens de type α-monotone. On posera pour $\alpha \in \eta$:

Pour $\alpha = 0$ $\quad \mathscr{B}_0(\mathscr{F}) = \mathscr{B}_0^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$

pour α pair $\quad \mathscr{B}_\alpha(\mathscr{F}) = \left(\bigcup_{\beta\in\alpha} \mathscr{B}_\beta(\mathscr{F})\right)_\delta$ et $\mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}) = \left(\bigcup_{\beta\in\alpha} \mathscr{B}_\beta^{\mathrm{M}}(\mathscr{F})\right)_{\delta'}$

pour α impair $\quad \mathscr{B}_\alpha(\mathscr{F}) = \left(\bigcup_{\beta\in\alpha} \mathscr{B}_\beta(\mathscr{F})\right)_\sigma$ et $\mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}) = \left(\bigcup_{\beta\in\alpha} \mathscr{B}_\beta^{\mathrm{M}}(\mathscr{F})\right)_{\sigma'}$

Un élément de $\mathscr{B}_\alpha(\mathscr{F})$ (resp. de $\mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{F})$) est appelé $\mathscr{F}$-borélien de type α (resp. $\mathscr{F}$-borélien de type α-monotone).

Remarques. — 1. Pour $\beta \in \alpha$ on a toujours

$$\mathscr{B}_\beta(\mathscr{F}) \subset \mathscr{B}_\alpha(\mathscr{F}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_\beta^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}).$$

Si α est impair, α a nécessairement un précédesseur $\alpha - 1$ et on a :

$$\mathscr{B}_\alpha(\mathscr{F}) = (\mathscr{B}_{\alpha-1}(\mathscr{F}))_\sigma \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}) = (\mathscr{B}_{\alpha-1}^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}))_{\sigma'}.$$

Si α est pair et a un précédesseur $\alpha - 1$ on a :

$$\mathscr{B}_\alpha(\mathscr{F}) = (\mathscr{B}_{\alpha-1}(\mathscr{F}))_\delta \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}) = (\mathscr{B}_{\alpha-1}^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}))_{\delta'} .$$

2. On aurait pu également inverser les rôles de δ et σ (resp. δ' et σ') ce que l'on fait généralement lorsque $\mathscr{F}$ est stable pour les réunions dénombrables (c'est le cas pour la famille des ouverts d'un espace topologique).

LEMME 6. — *Tout $\mathscr{F}$ borélien (resp. tout $\mathscr{F}$-borélien de type monotone) est un borélien de type α (resp. de type α-monotone) pour un certain ordinal dénombrable α.*

$$\left(\mathscr{B}(\mathscr{F}) = \bigcup_{\alpha\in\eta} \mathscr{B}_\alpha(\mathscr{F}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}^{\mathrm{M}}(\mathscr{F}) = \bigcup_{\alpha\in\eta} \mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{F})\right)$$

Nous renvoyons à [3], § 8 pour le cas des $\mathscr{F}$-boréliens, le cas des $\mathscr{F}$-boréliens de type monotone se traitant exactement de la même manière. (La démonstration est basée sur le fait que toute partie dénombrable de η a une borne supérieure dans η).

B. Profil et ε-profil d'un convexe de $\mathbb{R}^n$

DÉFINITION. — Soit E un espace vectoriel normé et A un convexe de E, ε un réel positif. On dira que $x \in \mathrm{A}$ est extrémal (resp. ε-extrémal) dans A s'il n'existe pas $y \in \mathrm{A}$ vérifiant $2x - y \in \mathrm{A}$ et $x \neq y$ (resp. $|x - y| > \varepsilon$). On appellera profil (resp. ε-profil) de A et on notera pr (A) (resp. ε-pr (A)) l'ensemble des points extrémaux (resp. ε-extrémaux) de A.

Remarques. — 1. Si $\varepsilon < \varepsilon'$ on a :

$$\mathrm{pr}\,(\mathrm{A}) \subset \varepsilon\text{-pr}\,(\mathrm{A}) \subset \varepsilon'\text{-pr}\,(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{pr}\,(\mathrm{A}) = \bigcap_{\varepsilon>0} \varepsilon\text{-pr}\,(\mathrm{A})$$

2. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ (A et B convexes) on a :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{pr}\,(\mathrm{B}) \subset \mathrm{pr}\,(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \forall\varepsilon > 0, \quad \mathrm{A} \cap \varepsilon\text{-pr}\,(\mathrm{B}) \subset \varepsilon\text{-pr}\,(\mathrm{A})$$

LEMME 7. — *Soit* E *un espace vectoriel normé et* (A_n) *une suite croissante de parties convexes de* E. *Si on pose* $\mathrm{A} = \bigcup_n \mathrm{A}_n$ *on a :*

$$\mathrm{pr}\,(\mathrm{A}) = \bigcup_m \bigcap_{k\geq m} \mathrm{pr}\,(\mathrm{A}_k) \qquad \textit{et pour tout } \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon\text{-pr}\,(\mathrm{A}) = \bigcup_m \bigcap_{k\geq m} \varepsilon\text{-pr}\,(\mathrm{A}_k)$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathrm{pr}\,(\mathrm{A})$ (resp. $x \in \varepsilon\text{-pr}\,(\mathrm{A})$), alors $x \in \mathrm{A}$ et il existe m tel que $\forall k \geq m$, $x \in \mathrm{A}_k$. D'après la remarque 2 on a

$x \in \mathrm{pr}\,(A) \cap A_k \subset \mathrm{pr}\,(A_k)$ (resp. $x \in \varepsilon\text{-pr}\,(A) \cap A_k \subset \varepsilon\text{-pr}\,(A_k)$) d'où $x \in \bigcap_{k \geq m} \mathrm{pr}\,(A_k)$ $\left(\text{resp. } x \in \bigcap_{k \geq m} \varepsilon\text{-pr}\,(A_k)\right)$.

Réciproquement soit $x \in \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \mathrm{pr}\,(A_k)$ $\left(\text{resp. } x \in \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \varepsilon\text{-pr}\,(A_k)\right)$. Il existe m tel que $x \in \bigcap_{k \geq m} \mathrm{pr}\,(A_k)$ $\left(\text{resp. } x \in \bigcap_{k \geq m} \varepsilon\text{-pr}\,(A_k)\right)$. En particulier $x \in \bigcap_{k \geq m} A_k \subset A$. Supposons que l'on ait $x = \frac{1}{2}(y + z)$ avec $y \in A$, $z \in A$ et $y \neq x$ (resp. $\| y - x \| > \varepsilon$). Il existe n_1 et n_2 tels que $y \in A_{n_1}$ et $z \in A_{n_2}$. Pour $n = \max(n_1, n_2, m)$ on a $y \in A_n$ et $z \in A_n$ donc x ne peut être extrémal (resp. ε-extrémal) dans A_n ce qui est contraire à $x \in \bigcap_{k \geq m} \mathrm{pr}\,(A_k)$ $\left[\text{resp. } x \in \bigcap_{k \geq m} \varepsilon\text{-pr}\,(A_k)\right]$.

LEMME 8. — *Soit* (A_n) *une suite décroissante de convexes de* $\mathbb{R}^p$ *et* $A = \bigcap_n A_n$. *Alors on a pour tout* $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon\text{-pr}\,(A) = \bigcap_{\varepsilon' > \varepsilon} \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \varepsilon'\text{-pr}\,(A_k) = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \left(\varepsilon + \frac{1}{n}\right) - \mathrm{pr}\,(A_k)$$

Remarque. — Dans le cas d'une suite décroissante la situation semble plus complexe que dans le cas d'une suite croissante. C'est cela qui nous a conduit à introduire la notion de ε-profil. Notons d'ailleurs que si dans la définition de point ε-extrémal, on remplace $\| y - x \| > \varepsilon$ par $\| y - x \| \geq \varepsilon$ le lemme 8 cesse d'être vrai.

Démonstration du lemme 8. — On démontre la première égalité du lemme, la seconde étant immédiate. Les deux membres de l'égalité sont inclus dans A. En effet si

$$x \in \bigcap_{\varepsilon' > \varepsilon} \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \varepsilon'\text{-pr}\,(A_k)$$

on a :

$$x \in \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} A_k = A\,.$$

On va montrer l'égalité des complémentaires dans A de ces ensembles.

— Soit $x \in A \backslash \varepsilon\text{-pr}\,(A)$ il existe $y \in A$ tel que $2x - y \in A$, $\| x - y \| > \varepsilon$. Soit ε' tel que $\varepsilon < \varepsilon' < \| y - x \|$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $y \in A_m$, $2x - y \in A_m$ donc x n'est pas ε'-extrémal dans A_m. Cela prouve l'inclusion

$$\varepsilon\text{-pr}\,(A) \supset \bigcap_{\varepsilon' > \varepsilon} \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \varepsilon'\text{-pr}\,(A_k)$$

— Soit maintenant $x \in A$. On suppose qu'il existe $\varepsilon' > \varepsilon$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $k \geq m$ tel que $x \notin \varepsilon'$-pr (A_k). Comme $x \in A \subset A_k \subset A_m$ la remarque 2 précédant le lemme 7 montre que $x \notin \varepsilon'$-pr (A_m).

Il existe donc $y_m \in A_m$ tel que $\| x - y_m \| > \varepsilon'$ et $2x - y_m \in A_m$. On peut imposer sans perte de généralité $\| x - y_m \| \leq 2\varepsilon'$. La boule de centre x et de rayon $2\varepsilon'$ étant compacte, il existe une sous-suite $(y_{m_k})_k$ de la suite (y_m) qui converge vers un point y de $\mathbb{R}^p$ tel que $\| x - y \| \geq \varepsilon'$. Soit pour $k \in \mathbb{N}$, B_k l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{h \geq k} \{ y_{m_h}, 2x - y_{m_h} \}$, x appartient à l'intérieur relatif de B_k (puisqu'il appartient en raison de $x = 1/2\ (y_{m_h} + (2x - y_{m_h}))$ à l'intérieur algébrique relatif de B_k et que R^p est tonnelé).

y limite de $(y_{m_h})_h$ appartient à l'adhérence B_k de B_k et cela pour toute valeur de k. Soit maintenant $y_0 = x + \varepsilon''/\varepsilon'(y - x)$ avec $\varepsilon < \varepsilon'' < \varepsilon'$. D'après un résultat classique on a $y_0 \in B_k$ et de même $2x - y_0 \in B_k$. Pour conclure que $x \notin \varepsilon$-pr (A), il suffit de remarquer que $\| x - y_0 \| \geq \varepsilon'' > \varepsilon$ et que comme $B_k \subset A_{m_k}$ on a $y_0 \in \bigcap_k A_{m_k} = A$ et de même $2x - y_0 \in A$.

C. Multiapplications profil et ε-profil de Γ

LEMME 9. — *Soit* X *un espace topologique,* $Y = \mathbb{R}^n$, Γ *une multiapplication de* X *dans* Y *à valeurs convexes, de graphe fermé et telle que* $\Gamma(X)$ *soit relativement compact dans* $Y(GR(\Gamma) \in \mathscr{K})$. *Alors* GR (pr $(\Gamma)) \in \mathscr{K}_{\sigma\delta}$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ GR(ε-pr $(\Gamma)) \in \mathscr{K}_{\sigma\delta}$ *où* pr (Γ) *et* ε-pr (Γ) *désignent les multiapplications qui à tout* $x \in X$ *font correspondre le profil et le* ε*-profil de* Γ_x.

Démonstration. — Soit K un compact de Y qui contient $\Gamma(X)$. Soit f l'application continue de $X \times K \times K$ dans $X \times Y$ définie par $f(x, y, z) = \left(x, \dfrac{y + z}{2}\right)$. On a :

$$\begin{aligned}
GR(\Gamma) \backslash GR\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) &= \left\{ (x, y) \in GR(\Gamma) : \exists y_1 \text{ et } y_2 \text{ dans } \Gamma(x) \right. \\
&\qquad \left. \text{avec} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ \| y_1 - y_2 \| > 2\varepsilon \right\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ (x, y) \in GR(\Gamma) : \exists y_1 \text{ et } y_2 \in \Gamma(x) \right. \\
&\qquad \left. \text{avec} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ \| y_1 - y_2 \| \geq 2\varepsilon + \frac{2}{n} \right\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} f(GR(\Gamma \times \Gamma) \cap X \times F_{\varepsilon + \frac{1}{n}})
\end{aligned}$$

où $\Gamma \times \Gamma$ désigne la multiapplication de X dans $Y \times Y$ définie par $x \mapsto \Gamma(x) \times \Gamma(x)$ et où $F_\varepsilon = \{ (y_1, y_2) \in Y^2$ tel que $\| y_1 - y_2 \| \geq 2\varepsilon \}$. $GR(\Gamma \times \Gamma)$ est fermé. En effet d'après [*1*], chap. VI, § 2, th. 1′, Γ est s. c. s. et $\Gamma \times \Gamma$ est s. c. s. à valeurs compactes donc de graphe fermé (*ibidem* th. 4′). Pour tout $\varepsilon > 0$, F_ε est fermé et $GR(\Gamma \times \Gamma) \subset X \times K \times K$; on peut donc appliquer le lemme 2 qui montre que $f(GR(\Gamma \times \Gamma) \cap X \times F_{\varepsilon + \frac{1}{n}})$ est fermé (et de projection sur Y relativement compacte car contenue dans l'image de $K \times K$ par une application continue).

$A_\varepsilon = GR(\Gamma) \backslash GR\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma))$ est donc dans $\mathscr{K}_\sigma$ et $GR\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) = GR(\Gamma) \cap A_\varepsilon^c$ est dans $\mathscr{K}_{\sigma\delta}$. En effet $GR(\Gamma) \in \mathscr{K} \subset \mathscr{K}_{\sigma\delta}$ et on a vu dans la démonstration du lemme 1 que tout ouvert de $X \times Y$ appartient à $\mathscr{K}_\sigma$ donc A_ε^c qui est une intersection dénombrable d'ouverts appartient à $\mathscr{K}_{\sigma\delta}$. De même $A = GR(\Gamma) \backslash GR\ (\mathrm{pr}\ (\Gamma)) = \bigcup_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$ est dans $\mathscr{K}_\sigma$ et $A^c \in \mathscr{K}_{\sigma\delta}$ d'où la conclusion.

Remarque. — Si Γ est constante le résultat se réduit au résultat classique sur le profil d'un compact de $\mathbb{R}^n$ (c'est une intersection dénombrable d'ouverts donc un $\mathscr{K}_{\sigma\delta}$ où $\mathscr{K}$ désigne alors la classe des convexes compacts).

THÉORÈME 2. — *Soit* X *un espace analytique dont tous les ouverts sont analytiques,* $Y = \mathbb{R}^n$ *et* Γ *multiapplication de* X *dans* Y *à valeurs convexes et de graphe borélien. Alors le graphe de la multiapplication* pr Γ *qui à* $x \in X$ *fait correspondre le profil de* Γ_x *est également borélien.*

Plus précisément il existe d'après le théorème 1 *un ordinal dénombrable* α *tel que* $GR(\Gamma) \in \mathscr{B}_\alpha^M(\mathscr{K})$. *Si* $\alpha = \alpha_0 + n$ *est la décomposition canonique de* α (α_0 *n'a pas de précédesseur et* $n \in \mathbb{N}$). *On a pour tout* $\varepsilon > 0$:

$$\begin{array}{ll} GR\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) \in \mathscr{B}_{\alpha_0 + 2n + 2}(\mathscr{K}) & \text{pour } n \text{ pair} \\ GR\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) \in \mathscr{B}_{\alpha_0 + 2n + 1}(\mathscr{K}) & \text{pour } n \text{ impair} \\ GR\ (\mathrm{pr}\ (\Gamma)) \quad \in \mathscr{B}_{\alpha_0 + 2n + 2}(\mathscr{K}) & \text{pour tout } n \end{array}$$

Démonstration. — Notons ϕ l'application de η dans η définie par $\phi(\alpha) = \alpha_0 + 2n + 2$ pour α pair (si α n'a pas de prédécesseur $n = 0$) $\phi(\alpha) = \alpha_0 + 2n + 1$ pour α impair.

Il suffit de démontrer que si l'hypothèse de récurrence

$$(R) \quad (\forall \beta \in \alpha) \quad GR(\Gamma) \in \mathscr{B}_\beta^M(\mathscr{K}) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ GR\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) \in \mathscr{B}_{\phi(\beta)}(\mathscr{K})$$

est vérifiée on a

$$GR(\Gamma) \in \mathscr{B}_\alpha^M(\mathscr{K}) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ GR\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) \in \mathscr{B}_{\phi(\alpha)}(\mathscr{K})$$

— Pour $\alpha = 0$ (R) est forcément vérifiée et la conclusion tient par le lemme 9.

— Si α est impair alors $\alpha = \alpha_0 + n$ avec $n \geq 1$ et α a un précédesseur $\alpha - 1 = \alpha_0 + (n-1)$. Soit Γ une multiapplication telle que $\mathrm{GR}(\Gamma) \in \mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$, il existe une suite $(\Gamma_k, k \in \mathbb{N})$ de multiapplications telle que $(\mathrm{GR}(\Gamma_k), k \in \mathbb{N})$ forme une suite croissante d'éléments de $\mathscr{B}_{\alpha-1}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ dont la réunion est $\mathrm{GR}(\Gamma)$. D'après le lemme 7 appliqué à chaque coupe Γ_x on a :

$$\mathrm{GR}\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) = \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \mathrm{GR}\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma_k))$$

D'après (R) on a $(\forall k \in \mathbb{N})\ \mathrm{GR}(\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma_k)) \in \mathscr{B}_{\phi(\alpha-1)}(\mathscr{K})$ avec

$$\phi(\alpha - 1) = \alpha_0 + 2(n-1) + 2 = \alpha_0 + 2n \qquad (n - 1 \text{ est pair}).$$

Donc $\mathscr{B}_{\alpha_0+2n}(\mathscr{K})$ est stable pour les intersections dénombrables et on a :

$$\mathrm{GR}\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) \in (\mathscr{B}_{\alpha_0+2n}(\mathscr{K}))_\sigma$$

et comme $\alpha_0 + 2n + 1 = \phi(\alpha)$ la conclusion est vérifiée.

— Si α est pair et a un prédécesseur $\alpha - 1$ on a : $\alpha = \alpha_0 + n$ avec n pair ≥ 2. Soit Γ une multiapplication telle que $\mathrm{GR}(\Gamma) \in \mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$, il existe une suite $(\Gamma_k, k \in \mathbb{N})$ de multiapplications telle $(\mathrm{GR}(\Gamma_k), k \in \mathbb{N})$ forme une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{B}_{\alpha-1}^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ dont l'intersection est $\mathrm{GR}(\Gamma)$. D'après le lemme 8 appliqué à chaque coupe Γ_x on a :

$$\mathrm{GR}\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) = \bigcap_{h \geq 1} \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \mathrm{GR}\left(\left(\varepsilon + \frac{1}{h}\right)\text{-pr}\ (\Gamma_k)\right).$$

Comme d'après (R) on a pour $\varepsilon' > 0$:

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \mathrm{GR}\ (\varepsilon'\text{-pr}\ (\Gamma_k)) \in \mathscr{B}_{\phi(\alpha-1)}(\mathscr{K})$$

avec $\phi(\alpha - 1) = \alpha_0 + 2(n-1) + 1 = \alpha_0 + 2n - 1$ ($n - 1$ est impair). Donc $\mathrm{GR}\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) \in (\mathscr{B}_{\alpha_0+2n-1}(\mathscr{K}))_{\delta\sigma\delta} = \mathscr{B}_{\alpha_0+2n+2}(\mathscr{K})$ et comme $\alpha_0 + 2n + 2 = \phi(\alpha)$ la conclusion est vérifiée.

— Soit enfin α pair et sans précédesseur (et $\alpha \neq 0$).

Soit Γ une multiapplication telle que $\mathrm{GR}(\Gamma) \in \mathscr{B}_\alpha^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$, il existe une suite $(\Gamma_k, k \in \mathbb{N})$ de multiapplications telle que $(\mathrm{GR}(\Gamma_k), k \in \mathbb{N})$ forme une suite décroissante d'éléments de $\bigcup_{\beta \in \alpha} \mathscr{B}_\beta^{\mathrm{M}}(\mathscr{K})$ dont l'intersection est $\mathrm{GR}(\Gamma)$. Toute famille dénombrable d'ordinaux dénombrables ayant une borne supérieure dans η on a $\alpha_1 = \sup_{\beta \in \alpha} \phi(\beta) \in \eta$ et d'après le lemme 8 appliqué à chaque Γ_x :

$$\mathrm{GR}\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) = \bigcap_{h \geq 1} \bigcup_m \bigcap_{k \geq m} \mathrm{GR}\left(\left(\varepsilon + \frac{1}{h}\right)\text{-pr}\ (\Gamma_k)\right)$$

Comme d'après (R) on a pour $\varepsilon' > 0$:

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \mathrm{GR}\ (\varepsilon'\text{-pr}\ (\Gamma_k)) \in \mathscr{B}_{\phi(\beta)}(\mathscr{K})$$

pour un certain $\beta \in \alpha$ (dépendant de k), on a :

$$\mathrm{GR}\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) \in (\mathscr{B}_{\alpha_1}(\mathscr{K}))_{\delta\sigma\delta}\ .$$

Pour $\beta \in \alpha$ on a $\beta = \beta_0 + n$ avec β_0 sans prédécesseur et n entier et $\beta_0 \in \alpha$. Comme pour n entier $\phi(n)$ est entier, $\phi(\beta) = \beta_0 + \phi(n)$ est plus petit que le plus petit ordinal dénombrable sans prédécesseur qui soit supérieur à β_0. On a donc $\phi(\beta) \in \alpha$ et comme $\beta \in \phi(\beta)$ on a nécessairement $\alpha_1 = \sup_{\beta \in \alpha} \phi(\beta) = \alpha$ et donc $\mathrm{GR}\ (\varepsilon\text{-pr}\ (\Gamma)) \in (\mathscr{B}_\alpha(\mathscr{K}))_{\delta\sigma\delta} = \mathscr{B}_{\alpha+2}(\mathscr{K})$ car α est pair. Cela achève la démonstration pour le ε-profil, il suffit pour conclure de rappeler que

$$\mathrm{GR}\ (\mathrm{pr}\ (\Gamma)) = \bigcap_{h \geq 1} \mathrm{GR}\left(\frac{1}{h}\text{-pr}\ (\Gamma)\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BERGE, *Espaces topologiques, fonctions multivoques.* 2e éd. Dunod, 1966.

[2] D. W. BRESSLER and M. SION, The current theory of Analytic sets, *Canad. J. Math.*, t. **16**, 1964, p. 207-230.

[3] G. CHOQUET, *Lectures on analysis*, I., W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[4] C. DELLACHERIE, Ensembles analytiques : théorèmes de séparation et applications. Séminaire de Probabilités IX *Lecture Notes 465 Springer Verlag*, 1975.

[5] P. HOLICKÝ, The convex generation of convex Borel sets in locally convex spaces, *Mathematika*, t. **21**, 1974, p. 207-215.

[6] D. G. LARMAN, Projecting and uniformising Borel sets with $\mathscr{K}_\sigma$ sections I., *Mathematika*, t. **19**, 1972, p. 231-244.

[7] D. PREISS, The convex generation of convex Borel sets in Banach spaces, *Mathematika*, t. **20**, 1973, p. 1-3.

[8] C. A. ROGERS, Analytic sets in Hausdorff spaces, *Mathematika*, t. **11**, 1964, p. 1-8.

[9] C. A. ROGERS, The convex generation of convex Borel sets in Euclidean spaces, *Pacific J. Math.*, vol. **35**, n° 3, 1970, p. 773-782.

[10] J. SAINT-PIERRE, Génération monotone du graphe et profil d'une multiapplication à valeurs convexes. *Séminaire d'Analyse Convexe de Montpellier*, Exposé n° 6, 1975.

[11] J. SAINT-PIERRE, Génération monotone d'une multiapplication borélienne à valeurs convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **281**, série A, 1975, p. 323.

[12] J. SAINT-PIERRE, Profil d'une multiapplication borélienne à valeurs convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **281**, Série A, 1975, p. 1019.

[13] H. WEGNER, Two problems of measurability concerning convex sets in euclidean spaces, *Math. Ann.*, t. **211**, 1974, p. 115-118.

(Manuscrit reçu le 24 mai 1976)