ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

N. GHOUSSOUB

Processus de Harris abstraits

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 4 (1975), p. 381-395
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_4_381_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XI, n° 4, 1975, p. 381-395. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Processus de Harris abstraits

par

N. GHOUSSOUB (*)

SUMMARY. — This paper is an attempt to generalize the work of J. Neveu in (N1), concerning the recurrent Markov chains induced by a transition probability, in order to cover Harris' abstract Case When only a positive contraction of L^1 is given, and the σ-field is not assumed separable. This required the proof that two types of « small sets », introduced by Lin in (L1) and Métivier in (M1), coïncide. A positive answer for an open question by Brunel in (B1), is also given. The methods used are mainly analytical.

INTRODUCTION

J. Neveu a publié dernièrement (1972) un article (N1), où il étudie des probabilités de transition, définies *partout* sur une tribu *séparable*, et récurrentes au sens de Harris et où il introduit des opérateurs convenables qui permettent de faire de la théorie du potentiel dans le cas récurrent comme dans le cas transient.

Le but de cet article est de reconstruire cette théorie de Neveu dans le cadre abstrait : c'est-à-dire, en prenant seulement des contractions positives de L^1 et où la tribu n'est pas nécessairement séparable. On utilise pour cela des techniques différentes de celles de Neveu : surtout des méthodes analytiques.

On montrera notamment, la coïncidence de la classe des ensembles réservés introduits par Foguel et Lin, et celle des ensembles de Métivier

(*) Attaché de recherches au C. N. R. S. Libanais.
Membre du Laboratoire de Probabilités associé au C. N. R. S. (n° 224).

relatifs à la mesure invariante du processus. On répondra aussi à une question de Brunel dans (B1) qui se demandait si l'existence d'un ensemble spécial entraînait nécessairement l'existence d'un ensemble de Métivier relatif à la mesure initiale du processus. Ensuite, on utilisera un résultat de Horowitz dans (H1) pour étudier les processus de Harris suivant la technique de Neveu.

Je remercie le Professeur A. Brunel, pour ses encouragements et ses conseils durant la préparation de ce travail.

I. PROCESSUS DE MARKOV ABSTRAIT

Un processus de Markov est défini dans le cadre abstrait par la donnée d'un espace mesuré (X, Σ) d'une mesure positive $m(m(X) = 1)$ et d'un opérateur sur $L^1(m)$ noté P, et qui soit une contraction positive. On notera fP l'image de f. L'opérateur adjoint sur L^∞ sera aussi désigné par P, l'image d'un h étant Ph.

Soit $H = \{ h : X \to [0, 1]$ mesurables et tels que $m(h) \neq 0 \}$. Pour tout $h \in H$, on définit comme Neveu (N1) les opérateurs :

$$U_h = \sum_{n \geq 0} (PI_{1-h})^n P .$$

Ces opérateurs positifs vérifient les relations suivantes : pour $0 \leq h \leq k \leq 1$ on a :

$$U_h \equiv \sum_{n \geq 0} (U_k I_{k-h})^n U_k$$

et donc les équations résolvantes suivantes :

$$U_h \equiv U_k + U_h I_{k-h} U_k .$$

La théorie des opérateurs conservatifs et ergodiques peut être résumée par le lemme suivant, démontrée par Crépel dans (C1).

LEMME I.1. — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) P est conservatif et ergodique.

b) Pour tout $f \geq 0$ et $m(f) > 0$ on a : $U_0 f = \sum_{n \geq 1} P^n f = +\infty$.

c) Pour tout $f \geq 0$ et $Pf \leq f$ on a : $f =$ constante.

d) Pour tout A tel que $m(A) > 0$ on a : $U_A(1_A) = 1$.

e) Pour tout $h \in H$ tel que $m(h) > 0$ on a : $U_h(h) = 1$.

Et pour les processus induits sur des sous-ensembles de X, on a le lemme suivant :

LEMME I.2. — Soit $g \in H$ et $S_g = \{ g > 0 \}$.
$Q = I_{S_g} U_g I_g$ l'opérateur markovien sur S_g.
On a alors :

(*i*) $^{Q}U_h = \sum_{n \geq 0} (QI_{1-h})^n Q = I_{S_g} U_{h_g} I_g$.

(*ii*) En particulier si P est conservatif et ergodique, Q l'est aussi.

II. FONCTIONS SPÉCIALES ET MESURES INVARIANTES D'UN PROCESSUS

Dans toute la suite, P désigne un opérateur conservatif et ergodique. On étudiera rapidement ci-dessous les fonctions spéciales pour des contractions de L^1. On mettra en relief surtout les résultats utilisés dans les sections suivantes. Pour plus de détails, on renvoie au travail de Crépel (C1).

DÉFINITION II.1. — Une fonction g de $L^+_\infty(m)$ est dite spéciale si : pour tout h dans H, $U_h(g)$ appartient à $L_\infty(m)$. Les fonctions spéciales forment un cône convexe héréditaire, stable par P.

Pour tout h dans H, on définit les opérateurs R_h introduits par Brunel dans (B1), de la façon suivante :

$$R_h = \sum_{n \geq 0} (I_{1-h}P)^n .$$

La proposition suivante montre la coïncidence de toutes les notions de fonctions spéciales.

PROPOSITION II.2. — Pour un g dans H, les définitions suivantes sont équivalentes :

a) g est spéciale (g bornée au sens de Neveu).

b) $U_h(g) \in L^\infty(X)$ pour tout $h \in H$ et $h \leq g$.

c) $R_h(g) \in L^\infty(X)$ pour tout $h \in H$ et $h \leq g$ (g bornée au sens de Brunel).

d) $R_h(g) \in L^\infty(S_g)$ pour tout $h \in H$ et $h \leq g$ (g bornée au sens d'Orey).

e) $U_h(g) \in L^\infty(S_g)$ pour tout $h \in H$ et $h \leq g$.

f) 1_{S_g} est spéciale pour $Q = I_{S_g} U_g I_g$.

L'existence d'une mesure σ-finie invariante est donnée par le théoreme suivant qui résume les résultats obtenus dans divers ouvrages (N2, F1, B2, B3).

THÉORÈME II.3. — Si P admet une fonction spéciale non nulle, alors il existe une mesure λ σ-finie P-invariante unique équivalente à m.

Dans le cas où tout l'espace est spécial, on a les propriétés suivantes qui sont équivalentes.

1) 1 est spécial pour P.

2) Pour tout $h \in \mathrm{H}$, $\Sigma_0^{\mathrm{N}}(\mathrm{PI}_{1-h})^n\mathrm{P}h \rightarrow 1$ uniformément.

3) Pour tout $h \in \mathrm{H}$, $\Sigma_1^{\mathrm{N}}\mathrm{P}^n h \rightarrow +\infty$ uniformément.

4) Pour tout $h \in \mathrm{H}$, pour tout $\theta \in]0, 1[$, $\mathrm{U}_\theta(h) \geq b(h) > 0$.

En fait, Brunel dans (B1) montre un résultat plus fort que 4) : la constante b dépend plus ou moins d'une certaine mesure et qu'on a amélioré ultérieurement en précisant cette dépendance. Le raffinement de Brunel est le suivant :

THÉORÈME II.4. — Si P est conservatif et ergodique tel que 1 soit spécial. Alors :

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, pour tout $h \in \mathrm{H}$ tel que $\lambda(h) \geq \alpha$ on a : $\mathrm{U}_\theta(h) \geq b > 0$ où b est une constante dépendant de α et non de h.

Ce dernier théorème nous permet d'obtenir un théorème de Métivier pour les fonctions spéciales (voir C1) qui nous sera très utile dans les sections suivantes.

THÉORÈME II.5. — P conservatif et ergodique. A un ensemble spécial. Alors :

Pour tout f tel que $|f| \leq 1_{\mathrm{A}}$ et $\lambda(f) = 0$ on a :

$$\| \Sigma_0^{\mathrm{N}}\mathrm{P}^n f \|_\infty \leq \mathrm{C} \qquad \text{où C ne dépend que de A.}$$

III. SUR LES DIFFÉRENTES CLASSES D'ENSEMBLES BORNÉS

On va définir ci-dessous les différents types d'ensembles introduits par Métivier (M1), Foguel (F2), Lin (L1) dans leurs travaux en théorie ergodique des processus de Markov.

Dans ce paragraphe, on étudiera surtout les relations qui existent entre ces différentes classes d'ensembles ; ce qui va nous aider à retrouver la théorie de Neveu dans (N1), pour les processus de Harris abstraits dans le chapitre suivant.

DÉFINITION III.1. — Un ensemble non négligeable A de Σ est dit *modeste* (ou de Métivier), s'il existe un entier N et un réel strictement positif α tels que : pour tout $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ non négligeable, on ait :

$$\Sigma_0^{\mathrm{N}}\mathrm{P}^n 1_{\mathrm{B}} \geq \alpha m(\mathrm{B}) 1_{\mathrm{A}} \qquad \text{(p. s.)}$$

DÉFINITION III.2. — Un ensemble non négligeable A de Σ est dit *réservé* (ou de Foguel) si, pour tout B non négligeable, il existe un entier N(B) et un réel strictement positif α(B) tels que :

$$\Sigma_0^N P^n 1_B \geq \alpha 1_A \qquad \text{(p. s.)}$$

DÉFINITION III.3. — Un ensemble non négligeable A de Σ est dit *presque de Métivier* (ou de Lin) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : pour tout $B \in \Sigma$ avec $m(B) > \varepsilon$, il existe un réel strictement positif α et un entier N tels que :

$$\Sigma_0^N P^n 1_B \geq \alpha 1_A \qquad \text{(p. s.)}$$

PROPOSITION III.4. — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est réservé.

2) Pour tout $B \subseteq A$ non négligeable, il existe $\alpha > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\Sigma_0^N P^n 1_B \geq \alpha 1_A$$

3) A est « presque de Métivier ».

4) Pour un E réservé, il existe $\alpha > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\Sigma_0^N P^n 1_E \geq \alpha 1_A$$

5) Pour tout $h \in H$, il existe $\alpha > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\Sigma_0^N P^n h \geq \alpha 1_A$$

6) Pour tout $h \in H$, avec $h \leq 1_A$, il existe $\alpha > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\Sigma_0^N P^n h \geq \alpha 1_A .$$

Démonstration. — (1) $\Leftrightarrow$ (5) et (2) $\Leftrightarrow$ (6).

Car h étant non négligeable, il existe $\theta > 0$ et $m\{h \geq \theta\} > 0$ avec $h \geq \theta 1_{\{h \geq \theta\}}$; et on applique (1) ou (2) pour l'ensemble $\{h \geq \theta\}$.

(1) $\Leftrightarrow$ (6) Car soit B non négligeable : comme P est conservatif et ergodique, il existe K dans $\mathbb{N}$, tel que $1_A P^K 1_B$ soit non négligeable.

D'où $\Sigma_0^N P^n (1_A P^K 1_B) \geq \alpha 1_A$ et enfin $\Sigma_0^{N+K} P^i 1_B \geq \alpha 1_A$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Car soit B non négligeable et $E = \{x : \Sigma_0^K P^k 1_B \geq 1\}$ si K est assez grand et comme P est conservatif et ergodique, $m(E)$ devient supérieure à ε. D'où :

$$\alpha 1_A \leq \Sigma_0^N P^n 1_E \leq \Sigma_0^N P^n \Sigma_0^K P^k 1_B \leq K \Sigma_0^{N+K} P^i 1_B$$

et :

$$\Sigma_0^{N+K} P^i 1_B \geq \alpha' 1_A .$$

(1) $\Leftrightarrow$ (4) Car si B est non négligeable et E réservé on a : $\Sigma_0^N P^n 1_B \geq \alpha 1_E$; or $\Sigma_0^K P^k 1_E \geq \alpha' 1_A$ d'où :

$$\alpha\alpha' 1_A \leq \Sigma_0^K P^k \Sigma_0^N P^n 1_B \leq K\Sigma_0^{K+N} P^i 1_B$$

PROPOSITION III.5. — P conservatif et ergodique. Alors :

$$\text{A modeste} \Rightarrow \text{A réservé} \Rightarrow \text{A spécial}.$$

Démonstration.

(*i*) D'après l'équivalence 1) et 2) de la proposition précédente.

(*ii*) Montrons que pour tout h dans H, $U_h(1_A) \in L^\infty$.

Or $\Sigma_0^N P^n h \geq \alpha 1_A$ et d'après l'inégalité $U_h P^n \leq U_h + nU_h I_h P^n$ on a :

$$U_h 1_A \leq \frac{1}{\alpha} U_h P^n h \leq \Sigma_0^N \frac{1}{\alpha}(U_h(h) + n) = \frac{(N+1)(N+2)}{2\alpha}$$

THÉORÈME III.6. — P étant conservatif et ergodique, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est réservé.

2) Pour tout h non négligeable de L_∞^+, $\Sigma_0^N P^n h$ tend vers $+\infty$ uniformément sur A.

3) A est spécial et $\Sigma_0^N P^n 1_A$ tend vers $+\infty$ uniformément sur A.

4) Pour tout $B \subseteq A$, la convergence de Chacon-Ornestein : $\dfrac{\Sigma_0^N P^n 1_B(x)}{\Sigma_0^N P^n 1_A(x)}$ vers $\dfrac{\lambda(B)}{\lambda(A)}$ est uniforme sur A.

Démonstration. — 1) $\Rightarrow$ 2).

$\Sigma_0^N P^n h(x)$ tend vers $+\infty$ car P est conservatif et ergodique, donc d'après le théorème d'Egoroff, il existe B non négligeable tel que :

$$\Sigma_0^N P^n h(x) \qquad \text{tend uniformément vers } +\infty \text{ sur B.}$$

Comme A est réservé, alors il existe $\alpha > 0$ et J dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$\Sigma_0^J P^n h \geq \alpha 1_A .$$

Soit $M > 0$, il existe N_0 tel que : pour tout $N > N_0$ on a :

$$\Sigma_0^N P^n h \geq \frac{M(J+1)}{\alpha} 1_B$$

d'où :

$$(1+J)\Sigma_0^{N+J} P^n h \geq \Sigma_0^J P^j \Sigma_0^N P^n h \geq \frac{M(J+1)}{\alpha} \Sigma_0^J P^j 1_B \geq M(J+1) 1_A$$

Donc pour tout $M > 0$, il existe N_0 tel que : si $N > N_0$, $\Sigma_0^{N+J} P^n h \geq M 1_A$ et $\Sigma_0^N P^n h$ tend vers $+\infty$ uniformément sur A.

2) $\Rightarrow$ 3) Montrons que 1_A est spéciale pour $I_A U_A I_A$ d'après la proposition II.2. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $h \in L_\infty^+(A)$, $\Sigma_1^N(I_A U_A I_A)^n h$ tend vers $+\infty$ uniformément sur A. Or d'après le lemme (3) dans (F2) on a : pour tout $E \subseteq A$ non négligeable,

$$\Sigma_1^N(I_A U_A I_A)^K 1_E \geq I_A \Sigma_1^N P^K 1_E$$

Donc pour tout $h \in L_\infty^+(A)$, $\Sigma_1^N(I_A U_A I_A)^K h \geq \Sigma_1^N P^K h$ sur A, qui converge uniformément vers $+\infty$ sur A.

3) $\Rightarrow$ 4) Pour tout $B \subseteq A$ spécial, $h = 1_B - \dfrac{\lambda(B)}{\lambda(A)} 1_A$ est de module spécial et de λ-mesure nulle, donc d'après le théorème de Métivier, il existe K strictement positif tel que : $\| \Sigma_0^N P^n h \|_\infty \leq K$ pour tout N.

Or

$$\left| \frac{\Sigma_0^N P^n 1_B(x)}{\Sigma_0^N P^n 1_A(x)} - \frac{\lambda(B)}{\lambda(A)} \right| = \left| \frac{\Sigma_0^N P^n h(x)}{\Sigma_0^N P^n 1_A(x)} \right| \leq \frac{K}{|\Sigma_0^N P^n 1_A(x)|}$$

qui tend uniformément vers 0 sur A.

4) $\Rightarrow$ 1) Soit $B \subseteq A$ et soit $\alpha = \dfrac{\lambda(B)}{\lambda(A)}$.

Donc il existe N tel que : pour presque tout $x \in A$.

$\dfrac{\Sigma_0^N P^n 1_B(x)}{\Sigma_0^N P^n 1_A(x)} \geq \alpha$: donc pour presque tout $x \in A$

$$\Sigma_0^N P^n 1_B(x) \geq \alpha 1_A(x) \qquad (\Sigma_0^N P^n 1_A(x)) \geq \alpha 1_A(x)$$

Donc A est réservé.

Corollaire III.7. — P conservatif et ergodique.

f et g deux fonctions spéciales alors : la convergence de Chacon-Ornestein :

$\dfrac{\Sigma_0^N P^n g(x)}{\Sigma_0^N P^n f(x)}$ vers $\dfrac{\lambda(g)}{\lambda(f)}$ est uniforme sur tout ensemble réservé.

Démonstration. — On répète la démonstration de 3) $\Rightarrow$ 4) en prenant pour h la charge $f - \dfrac{\lambda(f)}{\lambda(g)} g$, et bien sûr $\Sigma_0^N P^n f$ tend uniformément vers $+\infty$ sur chaque réservé.

Corollaire III.8. — P conservatif et ergodique, et A un ensemble spécial, alors :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble réservé B contenu dans A tel que $\lambda(A > B) < \varepsilon$.

Démonstration. — Soit $E \subseteq A$ et $h = 1_A - \dfrac{1E}{\lambda_0(E)}$ est spéciale car inférieure à 1_A et $\lambda_0(h) = 0$, où λ_0 est la restriction de la mesure invariante à A. Donc :

$$\left\| \Sigma_0^n P^K \left(1_A - \frac{1_E}{\lambda_0(E)} \right) \right\|_\infty \leq K \qquad \text{indépendamment de } n.$$

Comme : $\Sigma_1^n P^K 1_A$ tend vers $+\infty$, donc d'après Egoroff, il existe $B \subseteq A$ et $\lambda(A < B) < \varepsilon$ tel que $\Sigma_1^n P^K 1_A$ tend vers $+\infty$ uniformément sur B. D'où il existe N tel que : $\Sigma_1^N P^K 1_A \geq 2K 1_B$ ce qui donne :

$$2K 1_B \leq \Sigma_1^N P^k 1_A \leq K + \frac{1}{\lambda_0(E)} \Sigma_1^N P^k 1_E$$

et

$$\Sigma_1^N P^K 1_E \geq K \lambda_0(E) 1_B$$

Donc B est réservé.

COROLLAIRE III.9. — P conservatif et ergodique alors :

Tout ensemble réservé est modeste pour la mesure invariante du processus induit sur cet ensemble :

Démonstration. — Soit A réservé. Pour tout $E \subseteq A$ on a :

$$\left\| \Sigma_0^n P^k \left(1_A - \frac{1E}{\lambda_0(E)} \right) \right\|_\infty \leq K \qquad \text{qui ne dépend que de A.}$$

Or d'après le théorème III.6, $\Sigma_1^N P^n 1_A$ tend vers $+\infty$ uniformément sur A. D'où il existe N et $\Sigma_1^N P^k 1_A \geq 2K 1_A$ ce qui donne :

$$2K 1_A \leq \Sigma_1^N P^k 1_A \leq K + \frac{1}{\lambda_0(E)} \Sigma_1^N P^k 1_E$$

et

$$\Sigma_1^N P^k 1_E \geq K \lambda_0(E) 1_A .$$

Donc A est modeste, car K et N ne dépendent que de A.

COROLLAIRE III.10. — Si tout l'espace est spécial, alors il est modeste pour la mesure invariante.

Autrement dit, pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe une mesure λ_θ positive finie équivalente à la mesure invariante tel que :

$$U_\theta \geq 1 \otimes \lambda_\theta .$$

Démonstration. — X étant spécial, il est réservé d'après le théorème III.6, donc il est modeste pour la mesure invariante. Alors : il existe $K \in \mathbb{N}$ et α

réel strictement positif tel que pour tout E non négligeable, on ait : $\Sigma_1^K P^n 1_E \geq \alpha\lambda(E)$. Soit $\theta \in]0, 1[$;

$$\Sigma_0^K (1-\theta)^n P^{n+1} \geq (1-\theta)^K \Sigma_0^K P^{n+1} \geq (1-\theta)^K \Sigma_1^{K+1} P^n$$

et pour tout $E \subseteq X$;

$$\Sigma_0^K (1-\theta)^n P^{n+1} 1_E \geq (1-\theta)^K \alpha\lambda(E)\,.$$

En posant : $\lambda_\theta = (1-\theta)^K \alpha \cdot \lambda$; on obtient $U_\theta \geq 1 \otimes \lambda_\theta$ ou bien $U_\theta \geq c \otimes \lambda$ où c est une constante.

COROLLAIRE III.11. — Soit f une fonction spéciale.

Pour tout $\theta < \dfrac{1}{\|f\|}$, il existe alors une mesure positive λ_θ telle que : $U_{\theta f} \geq 1 \otimes \lambda_\theta$.

Démonstration. — $g = \dfrac{f}{\|f\|}$ est spéciale et appartient à H. Donc 1_{S_g} est spéciale pour le processus induit $Q = I_{S_g} U_g I_g$, et d'après le corollaire précédent, on obtient en appliquant la formule à Q et $\theta' = \theta \cdot \|f\| < 1$

$$^{Q}U_{\theta'} \geq C \otimes g \cdot \lambda$$

Or

$$^{Q}U_{\theta'} = I_{S_g} U_{\theta.\|f\|.\frac{f}{\|f\|}} \cdot I_g$$

Donc

$$U_{\theta f} \geq 1 \otimes \lambda_\theta \quad \text{où} \quad \lambda_\theta = Cg \cdot \lambda$$

REMARQUE III.12. — Pour fermer le cycle d'inclusion de toutes les différentes classes d'ensembles bornés, on est tenté d'affirmer que tout ensemble spécial est réservé. Or on connaît déjà des processus, où les fonctions spéciales sont les fonctions intégrables par une certaine mesure (le mouvement brownien linéaire sur $\mathbb{R}$ par exemple); ce qui met en échec la convergence uniforme vers $+\infty$ des sommes partielles $\Sigma_1^N P^n h$ pour les $h \in H$, si tout l'espace n'est pas spécial, c'est-à-dire intégrable.

IV. PROCESSUS DE HARRIS ABSTRAITS

Étant donné un processus de Markov abstrait (X, Σ, m, P), on sait que P est décomposable en un opérateur intégral Q et un opérateur R tels que : si $0 \leq K \leq R$ et K intégral alors $K \equiv 0$.

On notera Q_n et R_n les opérateurs relatifs à la décomposition de P^n. Pour plus de détails, on renvoie au livre de Foguel (F1).

DÉFINITION IV.1. — Un processus de Markov (X, Σ, m, P) est dit de Harris, si et seulement si :

(i) P est conservatif et ergodique.

(ii) Si $f \in L_\infty^+(m)$ et $f \not\equiv 0$ on a : $\Sigma_1^\infty Q_n f \not\equiv 0$.

Ce qui veut dire également que $\Sigma_1^\infty q_n(x, y)$ ne peut s'annuler identiquement sur $X \times A$, pour tout A non négligeable. Les $q_n(x, y)$ étant les densités des noyaux intégraux Q_n.

THÉORÈME IV.2. — Si P est conservatif et ergodique.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) P est de Harris.
2) Il existe un ensemble modeste pour m.
3) Il existe un ensemble spécial.
4) Il existe un ensemble modeste pour λ.

Démonstration. — 1) $\Rightarrow$ 2) P étant de Harris, donc d'après le lemme G du chapitre V de (F1), pour tout $r \in]0, 1[$ il existe C avec $m(C) > 0$ et il existe un entier N tel que :

$$x \in C \Rightarrow m(C_x) > r \qquad \text{où} \qquad C_x = \left\{ y \in C \, ; \, \Sigma_0^N q_n(x, y) \geq \frac{1}{N} \right\}$$

où les $q_n(x, y)$ sont des versions des densités de Q_n qui vérifient :

$$q_{n+m}(x, y) = \int q_n(x, t) q_m(x, y) dm(t)$$

(On peut toujours trouver de telles densités — voir la démonstration du même lemme).

Soit

$$S = \left\{ (x, y) \in C \times C \, ; \, \Sigma_0^N q_n(x, y) \geq \frac{1}{N} \right\} a = m(C).$$

$$C_x \subseteq \{ y \, ; \, (x, y) \in S \} = S_x^1 \subseteq C$$
$$\{ x \, ; \, (x, y) \in S \} = S_y^2 \subseteq C$$

On a :

$$m \otimes m(S) = \int_C m(S_t^2) m(dt) = \int_C m(S_{t'}^1) m(dt') \geq rm(C) = ra$$

D'où

$$\frac{a - r}{2} m \left\{ t \, ; \, m(S_t^2) < \frac{a - r}{2} \right\} + am \left\{ t \, ; \, m(S_t^2) \geq \frac{a - r}{2} \right\} \geq ra$$

Car $m(S_t^2) \leq a$.

Soit

$$B = \left\{ y \in C \,;\, m(S_y^2) \geq \frac{a-r}{2} \right\}$$

Il vérifie les propriétés suivantes :

(*i*) $B \subseteq C$ et $m(B) > 0$.

(*ii*) Pour tout $(x, y) \in B \times B$; $m(S_x^1) \geq r$ et $m(S_y^2) \geq \frac{a-r}{2}$ donc :

$$m(S_x^1 \cap S_y^2) \geq r + \frac{a-r}{2} - r = \frac{a-r}{2}$$

(*iii*) Pour tout $(x, y) \in B \times B$

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{2N} q_n(x, y) &\geq \frac{1}{N^2} \int \Sigma_1^N q_i(x, t) m(dt) \Sigma_1^N q_j(t, y) \\ &\geq \frac{1}{N^2} \int_{S_x^1 \cap S_y^2} \Sigma_1^N q_i(x, t) m(dt) \Sigma_1^N q_j(t, y) \\ &\geq \frac{1}{N^2} \cdot \frac{1}{N^2} \frac{(a-r)}{2} = \delta \end{aligned}$$

Donc : $B \times B \subseteq \{ (x, y) \,;\, \Sigma_1^{2N} q_x(x, y) \geq \delta \}$.

Cela démontre la « modestie » de B.

Car si $E \subseteq B$ on a pour tout $x \in B$.

$$\Sigma_1^{2N} P^n 1_E(x) \geq \Sigma_1^{2N} Q_n 1_E(x) = \Sigma_1^{2N} \int_E q_n(x, y) m(dy)$$
$$= \int_E \Sigma_1^{2N} q_n(x, y) m(dy) \geq \delta m(E)$$

donc : $\Sigma_1^{2N} P^n 1_E \geq \delta m(E) 1_B$.

2) $\Rightarrow$ 3) C'est une conséquence immédiate de la proposition III.5.

3) $\Rightarrow$ 4) A étant spécial, donc il contient un ensemble réservé d'après le corollaire III.8, qui est modeste pour la mesure invariante d'après le corollaire III.9.

4) $\Rightarrow$ 1) C'est un résultat de Horowitz dans (H1), où il a fallu passer à une chaîne associée sur un compact stonien. Ce théorème répond à une question de Brunel dans (B1) qui se demandait si l'existence d'un ensemble spécial entraînait nécessairement l'existence d'un ensemble de Métivier relatif à la mesure initiale du processus. C'est ce même théorème, qui va nous permettre de donner une caractérisation des processus de Harris abstraits, analogue à celle donnée par Neveu dans le cadre probabiliste.

THÉORÈME IV.3. — Si P est conservatif et ergodique. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) P est de Harris pour m.

2) Il existe une fonction h_0 dans H, et une mesure positive σ-finie m_0 équivalente à m telles que :

$$a)\ h_0 > 0 \text{ sur } X \qquad b)\ U_{h_0}(h_0) = 1 \qquad c)\ U_{h_0} \geq 1 \otimes m_0 .$$

Démonstration. — 2) $\Rightarrow$ 1)

Il suffit de montrer que la fonction h_0 est spéciale d'après le théorème précédent. Pour cela, établissons le lemme suivant :

LEMME IV.4. — Les fonctions spéciales du processus sont les fonctions f de L_∞^+, telles que $U_{h_0}(f)$ appartiennent à L^∞.

Démonstration. — Montrons que si $U_{h_0}(f) \in L^\infty$, alors $U_h(f) \in L^\infty$ pour tout $h \in H$ avec $h \leq h_0$.

Pour cela : si $0 < h \leq h_0$.

$$U_{h_0} I_{h_0 - h}(1) = U_{h_0}(h_0 - h) = 1 - U_{h_0}(h) \leq 1 - m_0(h) < 1$$

Donc

$$U_h(f) = \sum_{n \geq 0} (U_{h_0} I_{h_0 - h})^n U_{h_0}(f) \leq a \sum_{n \geq 0} (U_{h_0} I_{h_0 - h})^n 1$$

$$\leq a \sum_{n \geq 0} (1 - m_0(h))^n = \frac{a}{m_0(h)} < \infty$$

En appliquant ce lemme à h_0, on a $U_{h_0}(h_0) = 1$ dans L^∞.

Donc h_0 est spéciale et le processus est de Harris.

1) $\Rightarrow$ 2) P étant de Harris, donc il existe un ensemble spécial A.

Soit $f_0 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} P^n 1_A$. C'est une fonction spéciale strictement positive appartenant à H car :

$$U_h(f_0) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} U_h P^n 1_A \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} U_h(1_A) + \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} \| 1_A \|$$

Donc : $U_h(f_0) \leq 2U_h(1_A) + \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}$ qui appartient à L^∞.

D'après le corollaire III.11, $U_{\theta f_0} \geq 1 \otimes C f_0 \lambda$.

Il suffit de prendre $h_0 = \theta f_0$ qui est strictement positive et $(C f_0) \cdot \lambda = m_0$ qui est une mesure positive finie équivalente à m.

PROPOSITION IV.5. — P étant de Harris, λ la mesure invariante du processus. Alors :

Il existe au moins une fonction $h_1 \in H$, strictement positive telle que $U_{h_1} \geq 1 \otimes \lambda$.

Démonstration. — D'après le théorème précédent, il existe h_0 strictement positive et $U_{h_0} \geq 1 \otimes m_0$ où m_0 est équivalente à m donc à λ.

Alors il existe f strictement positive telle que : $m_0 = f \cdot \lambda$.

Soit $h_1 = \dfrac{f}{1+f} h_0$ qui appartient à H, et qui est strictement positive.

Comme $h_1 < h_0$, l'équation résolvante entraîne :

$$U_{h_1} \geq U_{h_0} I_{h_0-h} U_{h_1} \geq [1 \otimes (h_0 - h_1) \cdot m_0] U_{h_1}$$
$$= \left[1 \otimes \frac{h_0}{1+f} \cdot m_0\right] U_{h_1} = 1 \otimes (h_1 \cdot \lambda) U_{h_1} = 1 \otimes \lambda.$$

V. OPÉRATEUR POTENTIEL ET FONCTIONS COSPÉCIALES

L'opérateur potentiel qu'on utilise jusqu'à maintenant n'est autre que P* qui opère sur $L^\infty(m)$. Donc on ne peut rien dire (sur la dernière inégalité par exemple) pour l'opérateur initial.

Pour cela, soit f la fonction P-invariante ($\lambda = f \cdot m$). f est strictement positive et finie p. s. Si $\mathcal{M}^+(m)$ est l'espace des m-classes d'équivalences de fonctions mesurables positives, on a :

$$\mathcal{M}^+(m) = \mathcal{M}^+(\lambda) \qquad \text{et} \qquad L^\infty(m) = L^\infty(\lambda)$$

On définit l'opérateur positif $\tilde{P}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+(\lambda) &\to \mathcal{M}^+(\lambda) \\ h &\to \frac{1}{f} P(hf). \end{aligned}$$

(i) $\tilde{P}$ restreint à $L^1(\lambda)$ est un opérateur markovien.

(ii) $\tilde{P}^* = P^*$ le premier étant l'adjoint de $\tilde{P}$ par rapport à λ et le second étant l'adjoint de P par rapport à m.

(iii) $\tilde{P} = (P^*)^*$ la deuxième dualité étant prise par rapport à λ.

En plus, pour un $A \in \Sigma$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $B \subseteq A$, $\Sigma_0^N P^{*n} 1_B \geq \alpha\lambda(B) 1_A$.

b) Pour tout h et g mesurables bornées nulles à l'extérieur de A :

$$\int (\Sigma_0^N P^{*n} h) \cdot g d\lambda \geq \alpha \int h d\lambda \cdot \int g d\lambda$$

c) Pour tout $B \subseteq A$, $\Sigma_0^N \tilde{P}^n 1_B \geq \alpha \lambda(B) 1_A$.

(Pour plus de détails, voir l'article de Métivier M1).

On déduit de ces résultats que tout ce qui a été démontré pour l'opérateur P^*, est aussi vrai pour $\tilde{P}$. Dorénavant, on n'utilisera que la notation P, en sous-entendant P^* si on applique à droite et $\tilde{P}$ si on applique à gauche.

Maintenant, on peut bien définir les opérateurs analogues à ceux de Neveu. Pour cela soit :

$$W = \sum_{n \geq 0} (VI_{h_1})^n V \qquad \text{où} \qquad V = U_{h_1} - 1 \otimes \lambda .$$

Et avec les mêmes démonstrations que dans (N1), on obtient les résultats ci-dessous :

THÉORÈME V.1. — P étant de Harris.
W l'opérateur défini ci-dessus, alors :

1) $$W h_1 = \frac{1 - \lambda(h_1)}{\lambda(h_1)}$$

2) $$P + PW = W + \frac{1}{\lambda(h_1)} P h_1 \otimes \lambda$$

3) $$P + WP = W + \frac{1}{\lambda(h_1)} 1 \otimes (h_1 \cdot \lambda) P$$

Et comme principaux corollaires de ce théorème, le fait que W envoie le cône S des fonctions spéciales dans L^∞, et la résolution de l'équation de Poisson à second membre spécial et de mesure nulle.

Par analogie aux mesures spéciales, on définit les fonctions cospéciales de la façon suivante :

DÉFINITION V.2. — Une fonction mesurable positive sera dite cospéciale, s'il existe g dans $L_+^1(\lambda)$ et une fonction h dans H telles que : $f \leq g U_h$.

On démontre de la même façon, que les fonctions cospéciales forment un cône convexe héréditaire de l'espace des fonctions mesurables, contenant $L_\infty^+(\lambda)$, que ce cône est dual du cône des fonctions spéciales par rapport à λ. C'est-à-dire, pour tout f spéciale et g cospéciale on a :

$$\int f g d\lambda < \infty .$$

Enfin, que W envoie le cône $L^1_+(\lambda)$ dans le cône des fonctions cospéciales, ce qui permet de trouver des solutions cospéciales à l'équation de Poisson à second membre dans $L^1_0(\lambda)$.

BIBLIOGRAPHIE

(B1) A. BRUNEL, Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition d'Orey. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 19, 1971.

(B2) A. BRUNEL, Thèse, Paris, 1966.

(B3) A. BRUNEL, New conditions for existence of invariant measures in ergodic theory. *Lectures Notes*, p. 160, 1970.

(C1) P. CREPEL, Fonctions spéciales pour des contractions de L^1. *Astérisque*, (4), 1973.

(F1) S. FOGUEL, *The ergodic theory of Markov process*. Van Nostrand, 1969.

(H1) S. HOROWITZ, Transition probabilities and contractions of L^∞. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 24, 1972.

(F2) S. FOGUEL, Ratio limit theorems for Markov process. *Israel Journal of Mathematics*, 7, 1969.

(L1) M. LIN, Mixed Ratio limit theorems for Markov processes. *Israel Journal of Mathematics*, 8, 1970.

(M1) M. METIVIER, Existence of an invariant measure and an Ornestein's ergodic theorem. *Annales of mathematical statistics*, 40, 1969.

(N1) J. NEVEU, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *Annales de l'Institut de Fourier*, tome **22**, fascicule 2, 1972.

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1975)