ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PAOLO BALDI

Sur l'équation de Poisson

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 4 (1974), p. 423-434
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_4_423_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 4, 1974, p. 423-434. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur l'équation de Poisson

par

Paolo BALDI
Istituto Matematico, « L. Tonelli »,
Via Derna 1, 56100. Pisa (Italie)

SUMMARY. — In this article, the uniqueness of the solution of the Poisson equation for random walks is shown 1) when the random walk satisfies the Harris condition 2) in the abelian case, when the random walk satisfies an additional assumption of aperiodicity.

INTRODUCTION

Si P est le noyau de transition d'une marche récurrente sur un groupe G, localement compact, non compact et à base dénombrable on dira qu'une fonction f est solution de l'équation de Poisson si

$$f \geq 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{P} - \mathrm{I})f = \phi \tag{1}$$

où ϕ est une fonction positive sur G.

On donnera ici deux résultats :

1. — Dans l'hypothèse où la marche P est de Harris on montrera que, si ϕ est une fonction positive et intégrable l'unicité des solutions de (1) dépend de la forme du théorème de renouvellement valable pour la marche et on explicitera cette dépendance. L'énoncé est contenu dans le corollaire 1. Il s'agit là d'une généralisation des résultats de D. Ornstein [*5*] et de S. C. Port et C. J. Stone [*6*].

2. — Dans le cas abélien, sans hypothèses du type Harris mais avec une hypothèse d'apériodicité on donnera une extension du résultat d'unicité de [*6*]. Son énoncé se trouve dans le corollaire 2.

1. CAS D'UNE MARCHE DE HARRIS

Dans cette partie P est le noyau de transition d'une marche de Harris ; μ est la mesure de la marche et m la mesure de Haar de G.

DÉFINITION 1.

On dit qu'une marche est de type II si G est extension par R ou Z d'un groupe compact et si $\int X^2 d\mu = \sigma^2 < +\infty$ où X est le caractère réel canonique de G, c'est-à-dire celui qui transforme la mesure de Haar de G dans la mesure de Lebesgue sur R (ou la mesure de comptage sur Z selon les cas).

DIFINITION 2.

Une marche est de type I' si elle n'est pas de type II et G est l'extension d'un groupe G_0 du type précédent par le groupe à deux éléments et enfin si la marche induite sur G_0 est de type II.

Dans ce cas σ^2 indiquera la variance de la marche induite sur G_0.

DÉFINITION 3.

Une marche est de type I si elle n'est pas des deux types précédents.

On utilisera dans la suite les résultats suivants [*1*] :

PROPOSITION 1. — Si P est le noyau d'une marche de Harris il existe un noyau de convolution A tel que :

a) Pour toute fonction spéciale ϕ [*1*] et [*4*] $A\phi$ est bornée supérieurement et

$$(I - P)A\phi = \phi$$

b) Pour toute charge ψ [*4*], à support compact, $A\psi$ est bornée et

$$\lim_N \sum_0^N P^n\psi = A\psi$$

de plus cette convergence est bornée.

Dans la suite Δ désignera le point à l'infini de la compactification d'Alexandroff de G. Pour les marches de type II (respectivement type I') on écrira $x \to \pm\infty$ si $X(x) \to \pm\infty$ (resp. $P_{G_0}X(x) \to \pm\infty$ où P_{G_0} est le noyau de balayage du sous-groupe ouvert G_0).

PROPOSITION 2. — Dans la situation de la proposition précédente, pour toute charge ψ à support compact on a *a*) Pour les marches de type II

$$\lim_{x \to \pm \infty} A\psi(x) = \pm \sigma^{-2} \int X\psi dm$$

b) Pour les marches de type I'

$$\lim_{x \to \pm \infty} A\psi(x) = \pm \sigma^{-2} \int P_{G_0} X\psi dm$$

DÉFINITION 4.

On dira qu'une marche a un renouvellement de type I si pour toute charge ψ à support compact on a

$$\lim_{x \to \Delta} A\psi(x) = 0$$

On sait déjà qu'une marche de type I a un renouvellement de type I dans le cas abélien [*6*] et discret [*1*] ; on conjecture que cela reste vrai en général.

Si B est un objet de la marche, $\hat{B}$ indiquera le même objet de la marche duale.

THÉORÈME 1. — Soit f une solution positive et finie de

$$(P - I)f = \phi \qquad m\text{-p. p.} \tag{2}$$

où ϕ est positive et intégrable. Alors pour toute charge ψ, bornée et à support compact, on a :

a) Si la marche a un renouvellement de type I

$$\int f\psi dm = - \int \phi \hat{A}\psi dm$$

b) Si la marche est de type II

$$\int f\psi dm = - \int \phi \hat{A}\psi dm + c(f) \int X\psi dm$$

où $c(f)$ est une constante qui dépend de f mais non de ψ.

c) Si la marche est de type I'

$$\int f\psi dm = - \int \phi \hat{A}\psi dm + c(f) \int P_{G_0} X\psi dm$$

où encore $c(f)$ ne dépend que de f.

Démonstration. — Posons $f_n = f \wedge n$; il est facile de vérifier que :

$$Pf_n - f_n \leq \phi$$

Donc il existe une fonction $g_n \geq 0$ telle que

$$Pf_n - f_n = \phi - g_n$$

d'où en appliquant $\sum_{1}^{k} P^j$

$$f_n = P^k f_n - \sum_{0}^{k-1} P^i \phi + \sum_{0}^{k-1} P^i g_n \tag{3}$$

Ensuite :

$$\int g_n dm = \int \phi dm \tag{4}$$

en effet on a d'après (3)

$$\frac{f_n - P^k f_n}{\sum_{0}^{k-1} P^i \phi} = \frac{\sum_{0}^{k-1} P^i g_n}{\sum_{0}^{k-1} P^i \phi} - 1$$

et prenant la limite pour $k \to \infty$ on obtient 0 à gauche et d'après le théorème de Chacon-Ornstein :

$$0 = \frac{\int g_n dm}{\int \phi dm} - 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\int f_n \psi dm &= \int P^k f_n \psi dm - \int \sum_{0}^{k-1} P^i \phi \psi dm + \int \sum_{0}^{k-1} P^i g_n \psi dm \\ &= \int P^k f_n \psi dm - \int \sum_{0}^{k-1} \hat{P}^i \psi \phi dm + \int \sum_{0}^{k-1} \hat{P}^i \psi . g_n dm\end{aligned}$$

Si on fait tendre $k \to \infty$, dans le second membre, le premier terme tend vers 0 d'après Jamison et Orey [*3*] (dans le cas où la marche n'est pas apériodique on peut prendre la limite dans la sous-suite $\{ kd \}_{k \in \mathbb{N}}$ où d est la période) et puisque $\sum_{0}^{k-1} \hat{P}^i \psi$ tend vers $\hat{A}\psi$ de façon bornée :

$$\int f_n \psi dm = - \int \phi \hat{A} \psi dm + \int g_n \hat{A} \psi dm \tag{6}$$

Observons maintenant que, la marche étant de Harris, f est bien localement intégrable. En outre si C est un compact de G :

$$\lim_n \int_C g_n dm = 0 \tag{7}$$

En effet $g_n \to 0$ m-p. p. et $g_n \leq f + \phi$, on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue.

Supposons que la marche ait un renouvellement de type I. Il existe donc un compact C tel que $|\hat{A}\psi(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \notin C$. On a donc

$$\int g_n \hat{A}\psi dm = \int_C g_n \hat{A}\psi dm + \int_{G \setminus C} g_n \hat{A}\psi dm$$

où

$$\lim_n \int_C g_n \hat{A}\psi dm = 0$$

et

$$\left| \int_{G \setminus C} g_n \hat{A}\psi dm \right| \leq \varepsilon \int_{G \setminus C} g_n dm \leq \varepsilon \int \phi dm$$

on a de même

$$\lim_n \int f_n \psi dm = \int f \psi dm$$

donc

$$\left| \int f\psi dm + \int A\psi . \phi dm \right| \leq \varepsilon \int \phi dm$$

qui conclut l'étude de a).

Si la marche est de type II, au contraire, il existe en vertu de la proposition 2 un compact C tel que pour tout $x \notin C$ on a :

$$\left| \hat{A}\psi(x) - \sigma^{-2} \int X\psi dm \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad X(x) > 0$$

$$\left| \hat{A}\psi(x) + \sigma^{-2} \int X\psi dm \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad X(x) < 0$$

Donc on peut écrire

$$\int \hat{A}\psi g_n dm = \int_{C\hat{A}\psi} g_n dm + \left(\int_{\{X(x)>0\} \cap C} g_n dm - \int_{\{X(x)<0\} \cap C} g_n dm \right) \sigma^{-2} \int X\psi dm + c_n$$

où encore

$$|c_n| < \varepsilon \int \phi dm$$

donc prenant la limite dans (5)

$$\int f\psi dm + \int \hat{A}\psi\phi dm$$
$$= \lim_n \left[a_n + \int_{\{X(x)>0\}\cap c} g_n dm - \int_{\{X(x)<0\}\cap c} g_n dm \right]\sigma^{-2} \int X\psi dm$$
$$= c(\psi, f)\sigma^{-2} \int X\psi dm$$

où on a posé $a_n = c_n\left(\sigma^{-2}\int X\psi dm\right)^{-1}$ $\left(\text{si } \int X\psi dm = 0\right.$ le résultat est évident).

Il reste à démontrer que $c(\psi, f)$ ne dépend pas de ψ. En effet si ψ' est une autre charge bornée, à support compact, choisissant C d'une façon convenable, on a, avec des notations évidentes :

$$|c(\psi, f) - c(\psi', f)| \leq \sigma^{-2}(|a_n| + |a'_n|)$$
$$\leq \varepsilon\sigma^{-2}\left[\int \phi dm\left(\left|\int \sigma^{-2}\psi dm\right|^{-1} + \left|\int \sigma^{-2}X\psi dm\right|^{-1}\right)\right]$$

ainsi $c(\psi, f)$ ne dépend pas de f. Avec un raisonnement analogue on achève la démonstration pour le type I′.

COROLLAIRE 1. — Soient f et g deux fonctions finies et bornées inférieurement, telles que :

$$Pf - f = Pg - g = \phi \qquad m\text{-p. p.}$$

où ϕ est intégrable positive. On a alors

a) Si le renouvellement est de type I : $f = g + c$ m-p. p.
b) Pour le type II : $f = g + c + \chi$ m-p. p.
c) Pour le type I′ : $f = g + c + P_{G_0}\chi$ m-p. p.

où c est une constante et χ un multiple du caractère canonique.

Démonstration. — Quand le renouvellement est de type I on a, d'après le théorème 1, posant $\psi = 1_{K_1} - 1_{K_2}$ où K_1 et K_2 sont deux compacts d'égale mesure

$$\int_{K_1} (f - g)dm = \int_{K_2} (f - g)dm \tag{8}$$

Considérons les deux ensembles $\{f \geq g\}$ et $\{f < g\}$; si l'un d'entre eux est vide m-p. p. alors le résultat résulte du fait que la mesure $(f - g)m$ est, en particulier, invariante par translation et de signe constant, donc un multiple de la mesure de Haar m.

Sinon, il existerait deux compacts $K_1 \subset \{ f \geq g \}$, $K_2 \subset \{ f < g \}$ tels que $m(K_1) = m(K_2) > 0$ en contradiction avec (8). Pour le type II on raisonne de la même façon avec les fonctions $f - c(f)X$ et $g - c(g)X$, et de façon analogue pour le type I'.

2. CAS ABÉLIEN

Dorénavant G est, de plus, un groupe abélien et P n'est plus nécessairement de Harris.

DÉFINITION 5.

On dit que μ est strictement apériodique si son support n'est contenu dans aucune classe d'un sous-groupe fermé distingué propre de G.

Dans toute cette partie on supposera μ strictement apériodique.

DÉFINITION 6 [*6*]

On dira que $f \in \mathscr{I}$ si

a) f est intégrable, non négative, à support contenu dans un sous-groupe compactement engendré de G.

b) Sa transformée de Fourier f est à support compact dans $\hat{G}$, groupe dual.

c) Il existe un compact $C \subset G$, un voisinage P relativement compact de 0 dans $\hat{G}$ et une constante $c > 0$ tels que pour tout $v \in P$ on ait :

$$m(f) - \operatorname{Re} f(v) \leq c \max_{x \in C} 1 - \operatorname{Re} \langle x, v \rangle$$

où $\langle \ \rangle$ indique la dualité entre G et $\hat{G}$. ψ sera une charge si $\psi = f_1 - f_2$, avec $f_1, f_2 \in \mathscr{I}$, $m(f_1) = m(f_2)$.

PROPOSITION 3. — Il existe un noyau de convolution A tel que pour toute $\phi \in \mathscr{I}$, $A\phi$ est inférieurement bornée et

$$(P - I)A\phi = \phi$$

et pour toute charge ψ, $A\psi$ est bornée et :

$$\lim_N \sum_0^N P^n \psi = A\psi$$

de plus cette convergence est bornée.

PROPOSITION 4. — Si la marche est de type I on a :

$$\lim_{x \to \Delta} A\psi(x) = 0$$

Si la marche est de type II on a :

$$\lim_{x \to \pm\infty} A\psi(x) = \pm \sigma^{-2} \int X\psi dm$$

aucun autre cas n'est possible.

Les démonstrations se trouvent dans [6].

THÉORÈME 2. — Si f est une fonction positive finie telle que

$$(P - I)f = \phi \qquad m\text{-p. p.},$$

où ϕ est intégrable positive et telle que

$$\int fhdm < +\infty \tag{9}$$

pour une fonction $h \in \mathscr{I}$, alors pour toute charge ψ, on a

$$\int f\psi dm = -\int \phi \hat{A}\psi dm,$$

dans le type I et

$$\int f\psi dm = -\int \phi \hat{A}\psi dm + c(f)\int X\psi dm,$$

où $c(f)$ est une constante qui dépend de f mais non de ψ dans le type II.

Démonstration. — On suit la démonstration du théorème 1 jusqu'à (5) ; le passage de (5) à (6) est maintenant une conséquence de [2], μ étant strictement apériodique. Soit $h' \in \mathscr{I}$ et posons $\psi = \dfrac{m(h')}{m(h)}h - h'$. ψ est une charge et d'après le théorème de Beppo-Levi on a :

$$\lim_n \int f_n\psi dm = \int f\psi dm = \int fhdm \frac{m(h')}{m(h)} - \int fh'dm$$

Mais, comme le deuxième terme de (6) reste borné en n et

$$\int fhdm < +\infty$$

par hypothèse, on a $\int fh'dm < +\infty$, pour toute $h' \in \mathscr{I}$. En particulier on en tire que f est localement intégrable. Le reste de la démonstration est le même, en utilisant les propositions 3 et 4 au lieu des propositions 1 et 2.

Maintenant le travail de déduction du résultat d'unicité à partir du théorème est facile mais long, la classe des charges étant beaucoup plus restreinte que dans le cas de Harris. On l'esquissera seulement.

Soient K_1 et K_2 deux compacts de G, G_1 le sous-groupe engendré par K_1 et K_2 ; d'après le théorème de structure $G_1 = Z^{d_1} \oplus R^{d_1} \oplus H$ où H est un groupe compact. On achèvera les calculs avec l'hypothèse que $G_1 = R^d \oplus H$, le procédé étant pour Z très facile.

D'après le lemme 3.11 de [6], les fonctions du type $f(x + h) = f_1(x)f_2(h)$, où $x \in R^d$, $h \in H$, sont dans $\mathscr{I}$ si

a) f_1 est non négative, ayant un moment du deuxième ordre et sa transformée de Fourier f_1 est à support compact sur R^d.

b) f_2 est positive, continue et $\hat{f}_2$ est à support compact sur $\hat{H}$.

Il est utile d'observer que d'après l'analyse classique on peut choisir $f_1 > 0$ *m*-p. p., et comme la fonction $f_2 \equiv 1$ remplit la condition *b*), la fonction $f(x + h) = f_1(x)f_2(h)$ est une fonction dans $\mathscr{I}$ strictement positive *m*-p. p.

LEMME 1. — Si K est un compact de $R^d \oplus H$, il existe une suite $\{ f_1^{(n)}f_2^{(n)} \}_{n\in N}$ de fonctions du type précédent telle que :

$$\lim_n f_1^n f_2^n = 1_K \qquad m\text{-p. p.}$$

et

$$| f_1^{(n)}f_2^{(n)} | \leq M \qquad \text{pour tout } n.$$

Démonstration. — Il suffira de prouver l'énoncé dans le cas où $K = K' \times K''$ avec $K' \subset R$, $K'' \subset H$, K' et K'' compacts. Le fait qu'il existe une suite $\{ f_2^{(n)} \}_{n\in N}$, telle que $\lim_n f_2^{(n)} = 1_{K''}$ *m*-p. p. et $| f_2^{(n)} | \leq M$, résulte du fait que l'espace vectoriel engendré par les fonctions positives, continues sur H et dont la transformée de Fourier est à support compact, est une algèbre qui sépare les points et donc est uniformément dense dans l'espace des fonctions continues sur H en vertu du théorème de Stone-Weierstrass. Avec les fonctions continues on peut approximer les indicateurs des compacts de la façon voulue.

Pour démontrer l'analogue pour une suite $\{ f_1^{(n)} \}_{n\in N}$ de fonctions avec les propriétés *a*) il suffira de démontrer qu'on peut approximer d'une façon uniforme les fonctions du type g^2 où $g \in \mathscr{C}_K^\infty$, espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

Soit $h \in \mathscr{C}_K^\infty$ une fonction complexe dans $\mathscr{C}_K^\infty$; alors

$$h'(x) = \frac{1}{2}[h(x) + \bar{h}(-x)]$$

est la transformée de Fourier d'une fonction réelle f' ; la fonction $f = f'^2$ est évidemment dans $\mathcal{S}$. Si $g \in \mathscr{C}_K^\infty$, $\hat{g} \in L'$ et il existe h_n complexe dans $\mathscr{C}_K^\infty$ telle que :

$$\| h_n - \hat{g} \|_{L'} \leq \frac{1}{n},$$

et donc

$$\| h'_n - \hat{g} \|_{L'} \leq \frac{1}{n},$$

et ensuite

$$\| h'_n * h'_n - \hat{g} * \hat{g} \|_{L'} \leq \frac{1}{n}(\| h_n \|_{L'} + \| \hat{g} \|_{L'}) \leq \frac{K}{n},$$

donc en appliquant la transformation réciproque et en écrivant $\hat{f}_n = h'_n * h'_n$, $f_n \in \mathcal{S}$ et :

$$\| f_n - g^2 \|_\infty \leq \frac{K}{n},$$

COROLLAIRE 2. — Si f et g sont deux solutions inférieurement bornées finies de (2) satisfaisant à (9), et si μ est strictement apériodique alors :

a) Pour le type I : $f = g + c$ m-p. p.
b) Pour le type II : $f = g + \chi + c$ m-P. P.

où c est une constante et χ un multiple du caractère canonique.

Démonstration. — Comme pour le corollaire 1 on fera le calcul pour le type I, la solution étant similaire pour l'autre cas. Soient ψ, $\phi_n^{(1)}$, $\phi_n^{(2)} \in \mathcal{S}$; alors

$$\psi\phi_n^{(1)} - \psi\phi_n^{(2)}\lambda_n$$

où $\lambda_n = \int \psi\phi_n^{(1)}dm \left(\int \psi\phi_n^{(2)}dm \right)^{-1}$ est bien une charge (le fait que le produit de deux fonctions dans $\mathcal{S}$ reste dans $\mathcal{S}$ est une conséquence facile mais fastidieuse des définitions et du théorème 3.6 de (6)). Appliquant le théorème 2, on a

$$\int (f - g)\psi\phi_n^{(1)}dm = \lambda_n \int (f - g)\psi\phi_n^2 dm.$$

Choisissant $\phi_n^{(1)}$ et $\phi_n^{(2)}$ de façon telle que $\lim_n \phi_n^{(1)} = 1_{K_1}$ m-p. p. et $\lim_n \phi_n^{(2)} = 1_{K_2}$ m-p. p. et que $|\phi_n^{(1)}| \leq M$, $|\phi_n^{(2)})| \leq M$, on a :

$$\lim_n \lambda_n = \int_{K_1} \psi dm \left(\int_{K_2} \psi dm \right)^{-1}$$

et la fonction $(f-g)\psi$ étant intégrable on peut passer à la limite et en déduire

$$\frac{\int_{K_1}(f-g)\psi dm}{\int_{K_1}\psi dm}=\frac{\int_{K_2}(f-g)\psi dm}{\int_{K_2}\psi dm}=\alpha$$

Donc pour tout compact K on a :

$$\int_K (f-g-\alpha)\psi = 0$$

et la fonction $(f-g-\alpha)\psi$ étant intégrable on en tire qu'elle est nulle. La thèse suit maintenant du fait que ψ peut être choisie strictement positive, comme on a observé.

3

Remarque 1. — Le corollaire 2 est une véritable extension du résultat de [*6*]. En effet soit par exemple $G=R$: comme dans $\mathscr{I}$ il y a des fonctions à décroissance rapide (celles dont la transformée de Fourier est dans $\mathscr{C}_K^\infty$), la condition est remplie en particulier s'il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha}=0$$

Remarque 2. — Observons enfin que les résultats d'unicité qu'on vient de donner sont valables dans des cas où il n'y a pas de théorème d'existence. En effet pour les marches de Harris on est assuré de l'existence, d'après [*1*], seulement quand ϕ est spéciale, tandis que dans le cas général abélien, dans [*6*], on a l'existence si $\phi\in\mathscr{I}$. On va montrer maintenant que cette généralité n'est pas vide, c'est-à-dire qu'il existe de fonctions $f\geq 0$ telles que $(P-I)f=\phi$ où ϕ est intégrable mais non spéciale, un cas donc où il n'y a pas de théorème d'existence mais où le résultat d'unicité reste valable.

Soit donc $G = R$, P le noyau d'une marche de type II, c'est-à-dire tel que $\int_R x^2 d\mu(x) = \sigma^2 < +\infty$. On sait d'après [*1*] que le caractère canonique $X(x) = x$ est tel que $P|X| - |X|$ est une fonction positive intégrable. Montrons que, dans certains cas, elle n'est pas spéciale. Si elle l'était on aurait [*1*] :

$$\int_R (P|X|-|X|)|X|dx < +\infty$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{P}|\mathrm{X}| - |\mathrm{X}|)|\mathrm{X}|dx \geq \int_0^{+\infty} \mathrm{PX}^-\mathrm{X}^+dx + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{PX}^+\mathrm{X}^-dx$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{PX}^-\mathrm{X}^+dx = \int_0^{+\infty} xdx \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y)^- d\mu(y)$$

$$= \int_0^{+\infty} xdx \int_{-\infty}^{-x} (-x - y)d\mu(y),$$

et d'après Fubini,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{PX}^-\mathrm{X}^+dx = -\int_{-\infty}^{0} d\mu(y) \int_0^{y} (x^2 + xy)dx = -\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{0} y^3 d\mu$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{0} |y|^3 d\mu.$$

De la même façon on obtient

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{PX}^+\mathrm{X}^-dx = \frac{1}{6}\int_0^{+\infty} |y|^3 d\mu.$$

Donc

$$\int_{\mathbf{R}} (\mathrm{P}|\mathrm{X}| - |\mathrm{X}|)|\mathrm{X}|dx \geq \frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}} |y|^3 d\mu.$$

Donc, si μ n'a pas de moment d'ordre 3, $\mathrm{P}|\mathrm{X}| - |\mathrm{X}|$ est positive et intégrable mais non spéciale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Brunel et D. Revuz, Marches récurrentes au sens de Harris sur les groupes localement compacts *(A paraître)*.

[2] S. R. Foguel, On iterates of convolutions *(A paraître)*.

[3] B. Jamison et S. Orey, Markov chains recurrent in the sense of Harris. *Z. Wahr.*, t. **8**, 1967, p. 41.

[4] J. Neveu, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *Annales Institut Fourier*, t. **22**, 1972, p. 1.

[5] D. Ornstein, Random walks I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **138**, 1967, p. 1.

[6] S. C. Port et C. J. Stone, Potential theory of random walks on abelian groups. *Acta Matematica*, t. **122**, 1969, p. 12.

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1974)