ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. BRUNEL
N. DANG-NGOC
J.-P. THOUVENOT

Un problème d'existence de mesure invariante

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 2 (1974), p. 211-227
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_211_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 2, 1974, p. 21!-227. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Un problème d'existence de mesure invariante

par

A. BRUNEL, N. DANG-NGOC
et J.-P. THOUVENOT (*)
Université Paris VI. Laboratoire de Probabilités,
Tour 56. 9, quai Saint-Bernard, Paris 5[e] (France)

SUMMARY. — We say that the action of a group G on a measure space $(X, \mathscr{A}, m)$ where m is σ finite is relatively invariant if $g \cdot \mu = \chi(g)\mu$ where χ is a real character of G.

We are concerned here with the following question: Is it true that given any relatively invariant action of G on $(X, \mathscr{A}, m)$ there exists a σ-finite measure μ equivalent to m and invariant by the action of G?

We prove here that if $G = \mathbb{Z}$ or $G = \mathbb{R}$ the answer to the question is yes.

Extending an example of Hajian Ito and Kakutani which proves that the answer to the question is no if $G = \mathbb{Z}^2$, we give examples which prove that the answer is still no for $G = H \times \mathbb{Z}$ on $H \times \mathbb{R}$ with a non trivial real character on H.

Moreover, other results of independent interest on induced transformations associated with a *group of transformations* (instead of with one transformation) are obtained generalizing that of Hajian-Ito-Kakutani.

1. On donne un espace mesuré, σ-fini, $(E, \mathscr{E}, \mu)$ et un groupe $G = Z^m \times \mathbb{R}^n$, opérant sur E, tel que

$$G \times E \in (g, x) \rightarrow gx \in E$$

soit une application mesurable lorsque $G \times E$ est muni de la tribu produit $\mathscr{B}_G \otimes \mathscr{E}$, $\mathscr{B}_G$ désignant la tribu Borélienne de G.

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 1 « Mathématique, Informatique » associée au C. N. R. S.

On suppose aussi donné un caractère positif χ de G : $\chi : G \to \mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition :

$$\forall g \in G \qquad g(\mu) = \chi(g) \cdot \mu, \tag{1}$$

χ n'étant pas trivial.

A propos de cette situation, J. Dixmier a posé la question suivante : les conditions précédentes entraînent-elles l'existence d'une mesure σ-finie, équivalente à μ sur l'espace $(E, \mathscr{E})$ et qui soit invariante par G?

Nous commençons par montrer que si $m + n = 1$, la réponse est oui. Puis nous donnerons dans le cas général une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle mesure invariante. Une autre partie de ce travail est consacrée à la construction des contre-exemples, en particulier dans le cas $n + m \geqq 2$. Cependant la réponse est encore affirmative si l'on ajoute des hypothèses supplémentaires sur $(E, \mathscr{E})$ et sur l'action de G. Ce dernier résultat était déjà connu [*5*] et [*10*] et a été généralisé par Dang-Ngoc au cas où μ est seulement quasi-invariante, G étant abélien quelconque ou groupe de Lie nilpotent connexe [*3*].

2. SOLUTION DU PROBLÈME DANS LE CAS G = $\mathbb{R}$

Il sera commode de noter $\phi_t(x)$, le transformé de $x \in E$ par $t \in \mathbb{R}$. Le caractère χ est de la forme : $\chi(t) = c^t$ où $c > 1$.

Soit g une application $\mathscr{E}$-mesurable de E dans l'intervalle]0,1]. On peut trouver un tel élément g tel que $\int g d\mu = 1$.

Posons :

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{t}{2}} (g \circ \phi_t) dt.$$

F est > 0 et $\mathscr{E}$-mesurable. Montrons qu'elle est finie μ-pp. Pour cela calculons $\int F g d\mu$. On a :

$$\int F g d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{t}{2}} dt \int (g \circ \phi_t) g d\mu.$$

Mais

$$\int (g \circ \phi_t) g d\mu \leqq \left(\int g d\mu \right) \wedge \int (g \circ \phi_t) d\mu = 1 \wedge c^t = c^{t \wedge 0}.$$

Donc

$$\int F g d\mu \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} c^{t \wedge 0 - \frac{t}{2}} dt = \int_{-\infty}^{0} c^{\frac{t}{2}} dt + \int_{0}^{+\infty} c^{-\frac{t}{2}} dt < +\infty.$$

On a ensuite, pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{F} \circ \phi_s = \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{t}{2}}(g \circ \phi_t \circ \phi_s)dt = c^{\frac{s}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{u}{2}}(g \circ \phi_u)du = c^{\frac{s}{2}}\mathrm{F}$$

et par conséquent, en posant $f = (\mathrm{F})^2$

$$(2) \qquad \forall s \in \mathbb{R} \qquad f \circ \phi_s = c^s \cdot f.$$

La mesure $\nu = f \cdot \mu$ a bien les propriétés voulues. ∎

Il est clair que le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{Z}$ se traite comme le précédent avec des modifications évidentes.

3. PASSONS MAINTENANT AU CAS GÉNÉRAL : $\mathrm{G} = \mathrm{Z}^m \times \mathbb{R}^n$

Commençons par une remarque qui nous conduira à une condition nécessaire. La formule (2) montre que l'ensemble $\mathrm{A} = \{ 1 \leqq f < c^a \}$, où a est un nombre positif donné, est $\mathscr{E}$-mesurable et est un ensemble errant relativement à la transformation $\mathrm{T} = \phi_a$. Cela signifiant que les ensembles $\{ \mathrm{T}^n\mathrm{A} \,;\, n \in \mathrm{Z} \}$ sont disjoints deux à deux. De plus si l'on pose

$$\mathrm{B} = \{ c^{\frac{a}{3}} \leqq f < c^{\frac{2}{3}a} \}$$

et

$$\mathrm{H} = \left\{ \phi_t \mid -\frac{a}{3} \leqq t < \frac{a}{3} \right\},$$

on a $\mathrm{H} \cdot \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ en désignant par $\mathrm{H} \cdot \mathrm{B}$ l'ensemble $\{ hb \mid h \in \mathrm{H}, b \in \mathrm{B} \}$ en reprenant la notation $(g, x) \to gx$ introduite au début de l'article. En outre $\chi(\mathrm{H})$ est un voisinage de 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cela nous conduit à poser les définitions suivantes :

DÉFINITION 1. — Un ensemble $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ sera dit large pour χ s'il existe une partie H de G et un $\mathrm{B} \in \mathscr{E}$, $\mu(\mathrm{B}) > 0$, tels que

(1) H contienne l'image réciproque par χ d'un voisinage de 1 dans $\mathbb{R}_+^*$.

(2) $\mathrm{H} \cdot \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.

DÉFINITION 2. — Un élément $g \in \mathrm{G}$ sera dit dissipatif pour χ si tout ensemble de $\mathscr{E}$, non μ-négligeable et invariant par G, contient une partie large et errante pour g.

Ceci étant posé, on a les équivalences suivantes :

THÉORÈME. — *Les énoncés suivants sont équivalents*

(i) $g \in \mathrm{G}$ $\chi(g) \neq 1 \Rightarrow g$ *est dissipatif pour* χ.

(ii) *Il existe un $g \in G$ qui soit dissipatif pour χ.*

(iii) *Il existe une mesure σ-finie ν, invariante et équivalente à μ.*

Démonstration. — (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) est évident puisque χ n'est pas trivial.
(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Soit g_0 dissipatif pour χ et A un ensemble large et errant pour g_0. On a donc

$$\sum_{n \in Z} 1_A \circ g_0^n \leqq 1. \tag{3}$$

La définition 1 montre l'existence de $B \in \mathscr{E}$, $\mu(B) > 0$ et d'un α, $0 < \alpha < 1$, tels que

$$\forall \gamma \in G \quad 1 \leqq \chi(\gamma) < c^\alpha \Rightarrow 1_B \circ \gamma \leqq 1_A,$$

en posant $c = \gamma(g_0)$ et l'on peut supposer $\chi(g_0(> 1$.

Montrons ensuite que la fonction :

$$\sum_{n \in Z} \sup_{\substack{\gamma \in G' \\ c^n \leqq \chi(\gamma) < c^{n+1}}} (1 \circ \gamma), \tag{4}$$

où $G' = Z^m \times Q^n$, est bornée.

En effet si $p - 1$ est la partie entière de $\frac{1}{\alpha}$, on a

$$\sup_{\substack{\gamma \in G' \\ 1 \leqq \chi(\gamma) < c}} (1_B \circ \gamma) \leqq 1_A + 1_A \circ g_1 + \ldots + 1_A \circ g_1^p, \tag{5}$$

g_1 étant choisi dans G' de sorte que $\chi(g_1)$ soit très voisin de c^α. Les relations (3) et (5) montrent que la fonction définie par (4) est majorée par $p + 1$.

De là on en déduit que la fonction

$$h = \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\substack{\gamma \in G' \\ c^t \leqq \chi(\gamma) < c^{t+1}}} (1_B \circ \gamma) dt$$

est $\mathscr{E}$-mesurable et que $0 < h \leqq p + 1$ sur l'ensemble G'-invariant $\bar{B}$ engendré par B.

Posons alors

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\substack{\gamma \in G' \\ c^t \leqq \chi(\gamma) < c^{t+1}}} (\chi(\gamma)^{-1} \times (1_B \circ \gamma)) dt$$

Les conditions satisfaites par h montrent que

1) F est $\mathscr{E}$-mesurable

2) $0 < \mathrm{F} < +\infty$ sur $\bar{\mathrm{B}}$

3) $\forall g \in \mathrm{G}'$ $\mathrm{F} \circ g' = (\chi(g))\mathrm{F}$

1) est évident ; 2) résulte du fait que la fonction, à valeur 0 ou 1

$$\mathrm{R} \ni t \to \sup_{\substack{\gamma \in \mathrm{G}' \\ c^t \leqq \chi(g) < c^{t+1}}} 1_{\mathrm{B}}(\gamma x),$$

x étant donné, est nulle hors d'un compact dépendant de x.

3) Soit $g \in \mathrm{G}'$. Ecrivons $\chi(g)$ sous la forme c^a, $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{F} \circ g &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\substack{\gamma \in \mathrm{G}' \\ c^t \leqq \chi(\gamma) < c^{t+1}}} (\chi(\gamma)^{-1} \cdot (1_{\mathrm{B}} \circ (\gamma g)))dt \\ &= \chi(g) \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\substack{\gamma \in \mathrm{G}' \\ c^{t+a} \leqq \chi(\gamma g) < c^{t+a+1}}} (\chi(\gamma g)^{-1}(1_{\mathrm{B}} \circ (\gamma g)))dt \\ &= \chi(g)\mathrm{F}. \end{aligned}$$

$\mathrm{F} \cdot \mu$ est donc une mesure G'-invariante et équivalente à μ sur $\bar{\mathrm{B}}$. Puisque G' est dense dans G un argument classique de continuité montre que $\mathrm{F} \cdot \mu$ est G-invariante et équivalente à μ sur l'ensemble $\bar{\mathrm{B}}$ G-invariant engendré par B. Si le complémentaire de $\bar{\mathrm{B}}$ n'est pas négligeable, la définition 2) montre que l'on peut déterminer une mesure G-invariante étrangère à $\mathrm{F}\mu$ et portée par $\bar{\mathrm{B}}^c$. Un argument d'extrémalité au sens de la théorie de la mesure montre alors qu'il existe une mesure σ-finie, équivalente à μ et G-invariante.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Supposons l'existence d'une telle mesure invariante. Il y a donc une fonction $\mathscr{E}$-mesurable F, $0 < \mathrm{F} < +\infty$ telle que

$$\forall g \in \mathrm{G} \qquad \mathrm{F} \circ g = \chi(g)\mathrm{F}.$$

Soit $g_0 \in \mathrm{G}$ avec $\chi(g_0) = c > 1$ (sinon on prendrait g_0^{-1}). Soit

$$\mathrm{B} = \{ c^{+\frac{1}{3}} a \leqq \mathrm{F} < c^{\frac{2}{3}} a \}$$

pour un $a \in \mathbb{R}$ choisi de telle sorte que $\mu(\mathrm{B}) > 0$. Soit

$$\mathrm{H} = \{ c^{\frac{1}{3}} \leqq \chi < c^{\frac{1}{3}} \} \subset \mathrm{G}$$

de telle sorte que $\chi(\mathrm{H})$ soit un voisinage de 1. Alors

$$\mathrm{H} \cdot \mathrm{B} \subset \{ a \leqq \mathrm{F} < ca \} = \mathrm{A},$$

et A est large et dissipatif pour g_0. ■

4. SYSTÈMES DYNAMIQUES ASSOCIÉS AUX CARACTÈRES RÉELS D'UN GROUPE DÉNOMBRABLE

I. Notations.

Dans un article récent (cf. [7]), A. Hajian, Y. Ito, et S. Kakutani ont démontré le résultat suivant : à tout caractère réel γ du groupe $G = Z$ (i. e. γ est un morphisme de G dans le groupe multiplicatif R_+) on peut associer un espace de Lebesgue $(M, \mathscr{B}, m)$ avec m-finie infinie, diffuse, une représentation π de $G \times Z$ dans le groupe Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ des automorphismes de $(M, \mathscr{B}, m)$ tels que :

(*i*) L'action de $\pi(\{0\} \times Z)$ est ergodique et préserve la mesure m.

(*ii*) Pour tout $g \in G$, on a $\pi((g, 0))m = \gamma(g)m$.

Le but de ce travail est d'étendre ce résultat à un groupe G dénombrable quelconque, la démonstration s'appuie sur la méthode de Hajian, Ito et Kakutani et sur les résultats de Krieger (cf. [8]).

Nous remarquons que si γ est non trivial (i. e. $\gamma \neq 1$) le système dynamique ergodique $(M, \mathscr{B}, m ; \pi(G \times Z))$ est de type III i. e. n'admettant aucune mesure invariante σ-finie équivalente à m (cf. [4] ; [7]).

Notations. — Soient $T, T' \in$ Aut $(M, \mathscr{B}, m)$, on définit la mesure Tm par

$$Tm(B) = m(T^{-1}B), \qquad \forall B \in \mathscr{B}.$$

On vérifie alors

$$\frac{dTT'm}{dm}(x) = \frac{dTm}{dm}(x)\,\frac{dT'm}{dm}(T^{-1}x) \qquad \mu\text{-p. p.} \tag{0}$$

II. Construction d'automorphismes associée à un système discret.

Nous allons généraliser une construction de Hajian, Ito et Kakutani qui nous sera utile dans la suite : soit $(M, \mathscr{B}, m ; 0)$ un système dynamique *séparable discret* (cf. [4] déf. III.2) soit Y un G-atome donc le G-support soit égal à M (cf. [4] Th. III.1), alors pour m-presque tout $x \in M$, $\mathrm{Orb}_G\, x$ rencontre Y exactement en un point (cf. [4] Prop. VII-2) en enlevant ensemble négligeable nous supposons que c'est le cas pour tout $x \in M$.

Soit $T \in$ Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ tel que

$$T[G]T^{-1} = [G] \tag{1}$$

ce qui équivaut à dire (cf. [8], [4]) que pour m-presque tout $x \in \mathrm{M}$ on ait

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{T}(\mathrm{Orb}_{\mathrm{G}}\, x) = \mathrm{Orb}_{\mathrm{G}}\, \mathrm{T}x.$$

L'ensemble des $\mathrm{T} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m)$ possédant les propriétés équivalentes (1) et (2) est *le groupe* $\mathscr{N}([\mathrm{G}])$ *des normalisateurs* de [G] dans Aut $(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m)$, il est clair que $\mathscr{N}([\mathrm{G}])$ contient [G] et tout automorphisme commutant avec les éléments de G.

Sur le G-atome Y on considère l'espace mesurable induit canonique $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}_{\mathrm{Y}}, m_{\mathrm{Y}})$.

DÉFINITION 1. — Soit $\mathrm{T} \in \mathscr{N}([\mathrm{G}])$, on définit un automorphisme $\tilde{\mathrm{T}}$ de $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}_{\mathrm{Y}}, m_{\mathrm{Y}})$ par :

$$\tilde{\mathrm{T}}y = (\mathrm{Orb}_{\mathrm{G}}\, \mathrm{T}y) \cap \mathrm{Y}, \qquad \forall y \in \mathrm{Y}.$$

L'automorphisme $\tilde{\mathrm{T}}$ est appelé *l'automorphisme* G-*induit de* T *sur* Y ; il est clair que si $\mathrm{T}, \mathrm{T}' \in \mathscr{N}([\mathrm{G}])$, alors

$$\widetilde{\mathrm{T}\mathrm{T}'} = \tilde{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{T}}'.$$

L'application $\sim : \mathrm{T} \to \tilde{\mathrm{T}}$ est donc un morphisme du groupe $\mathscr{N}([\mathrm{G}])$ dans le groupe $(\mathrm{Aut}\,\mathrm{Y}, \mathscr{B}_{\mathrm{Y}}, m_{\mathrm{Y}})$, le noyau Ker $(\sim)$ est l'ensemble des $\mathrm{T} \in \mathscr{N}([\mathrm{G}])$ tel que $\mathrm{T}x \in \mathrm{Orb}_{\mathrm{G}}\, x$ pour m-presque tout x de M i. e.

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{Ker}(\sim) = [\mathrm{G}].$$

Soit $\mathrm{M} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{M}_n$ la partition canonique de l'espace M telle que le système induit $(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m\,;\, \mathrm{G})_{\mathrm{M}_n}$ soit de type I_n (cf. [4] Prop. VII-1), chaque M_n est G-invariant et pour m-presque tout $x \in \mathrm{M}_n$ card $(\mathrm{Orb}_{\mathrm{G}}\, x) = n$ (cf. [4] Th. 1). Soit $\mathrm{Y}_n = \mathrm{M}_n \cap \mathrm{Y}$.

Il est clair que si $\mathrm{T} \in \mathscr{N}([\mathrm{G}])$ alors $\mathrm{TM}_n = \mathrm{M}_n$, et $\tilde{\mathrm{T}}\mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Considérons le groupe produit $\prod_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{Aut}(\mathrm{Y}_n, \mathscr{B}_{\mathrm{Y}_n}, m_{\mathrm{Y}_n})$ qu'on identifie à un sous-groupe de Aut $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}_{\mathrm{Y}}, m_{\mathrm{Y}})$; d'après ce qui précède, si $\mathrm{T} \in \mathscr{N}(\mathrm{G})$ alors

$$\tilde{\mathrm{T}} \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Aut}(\mathrm{Y}_n, \mathscr{B}_{\mathrm{Y}_n}, m_{\mathrm{Y}_n})$$

et réciproquement soit

$$\mathrm{U} \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Aut}(\mathrm{Y}_n, \mathscr{B}_{\mathrm{Y}_n}, m_{\mathrm{Y}_n}),$$

en utilisant le théorème de la structure d'un système de type I_n (cf. [4], Th. VII-1), on peut trouver un automorphisme $T \in \mathcal{N}([G])$ tel que $\tilde{T} = U$.

En résumé, nous avons démontré :

THÉORÈME 1. — L'application $\sim$ qui à un automorphisme $T \in \mathcal{N}([G])$ associe l'automorphisme G-induit $\tilde{T}$ sur Y est un morphisme de groupe et l'on a

$$\operatorname{Ker}(\sim) = [G]$$

$$\operatorname{Im}(\sim) = \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{Aut}(Y_n, \mathscr{B}_{Y_n}, m_{Y_n})$$

avec $Y_n = M_n \cap Y$ où M_n désigne la partie de type I_n de M. En particulier, le morphisme $\sim$ est surjectif si et seulement si le système $(M, \mathscr{B}, m ; G)$ est homogène i. e. de type I_n avec un $n \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$.

Nous allons généraliser un résultat de Hajian, Ito et Kakutani (cf. [7], Th. 1). Si H et G sont deux sous-groupes de $\operatorname{Aut}(M, \mathscr{B}, m)$ on notera $H \vee G$ le sous-groupe engendré algébriquement par H et G.

THÉORÈME 2. — Soit H un sous-groupe de $\mathcal{N}([G])$, $\tilde{H} = \{ \tilde{T}/T \in H \}$. Le système $(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y ; [\hat{H}])$ est le système induit $(M, \mathscr{B}, m ; G \vee H)_Y$ du système $(M, \mathscr{B}, m, G \vee H)$ sur Y (cf. [4]-IV) ; il en résulte que le système $(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y ; \tilde{H})$ est semi-fini (resp. purement infini, discret, continu) si et seulement si le système $(M, \mathscr{B}, m ; H \vee G)$ est semi-fini (resp. purement infini, discret, continu) (cf. [4], Th. IV-4), la σ-algèbre des ensembles mesurables sur Y invariants par $\tilde{H}$ est exactement la trace de la σ-algèbre des éléments $\mathscr{B}$ invariants par $G \vee H$.

Démonstration. — Nous démontrons seulement que

$$(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y ; [\tilde{H}]) = (M, \mathscr{B}, m, [G \vee H])_Y ;$$

or par construction de $\tilde{H}$ on a

$\operatorname{Orb}_{\tilde{H}} y = Y \cap \operatorname{Orb}_{H \vee G} y$ pour m-presque tout $y \in Y$.

Il en résulte que

$$[\tilde{H}] = [H \vee G]_Y \qquad \text{(cf. [4]-IV).}$$

Donc $(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y ; \tilde{H})$ est bien le système induit sur Y du système $(M, \mathscr{B}, m ; G \vee H)$; le reste du théorème résulte des propriétés générales des systèmes induits (cf. [4]) q. e. d. ■

III. Construction d'exemples.

Nous allons maintenant construire les systèmes annoncés dans l'introduction, nous utiliserons les notations de [7] et [8].

1) Soit Δ un sous-groupe dénombrable de R_+, d'après un résultat de Krieger (cf. [8], Corol. 4-2) il existe un espace de Lebesgue

$$(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y), \quad m_Y(Y) < \infty,$$

et un $\tilde{T} \in \text{Aut}(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y)$ tels que

a) $\tilde{T}$ contient m_Y (cf. [8], p. 84) i. e.

— $\{ S \in [\tilde{T}]/Sm_Y = m_Y \}$ opère ergodiquement.

— Pour tout $S \in [\tilde{T}]$ il existe une suite $\delta_n(S) \in R_+$ et une partition Y^n de Y telles que :

$$\frac{dSm_Y}{dm_Y} = \sum_{n \in N} \delta_n(S) \chi_{Y^n}. \tag{4}$$

b) Le groupe Δ est égal au sous-groupe $\Delta(\tilde{T}, m_Y)$ engendré par les $\delta_n(S)$, $S \in [\tilde{T}]$, dans R_+.

c) On a

$$\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y} = \sum_{\delta \in \Delta} \delta \chi_{M_\delta} \tag{5}$$

avec les Y_δ formant une partition de Y et $m_Y(Y_\delta) > 0$, $\forall \delta \in \Delta$.

Toujours d'après Krieger (cf. [8], Lemma 5.1), soit -

$$n(y) = \inf \left\{ n \in N \, \frac{d\tilde{T}^n m_Y}{dm_Y}(T^n y) = 1 \right\} \tag{6}$$

Alors pour m_Y-presque tout $y \in Y$ on a

$$n(y) < \infty.$$

On peut alors définir l'automorphisme $V \in [\tilde{T}]$:

$$Vy = T^{n(y)}y \quad \text{pour presque tout } y \in Y. \tag{7}$$

On a le résultat suivant

$$[V] = \{ S \in [\tilde{T}]/Sm_Y = m_Y \} \tag{8}$$

Comme le groupe $\{ S \in [\tilde{T}]/Sm_Y = m_Y \}$ opère ergodiquement, il en est de même pour V.

2) On munit Δ de sa σ-algèbre discrète $\mathscr{B}_\Delta$ et de la mesure σ-finie infinie m_Δ définie par

$$m_\Delta(\{ \delta \}) = \delta \qquad \text{pour tout } \delta \in \Delta$$

Soit $(M, \mathscr{B}, m) = (Y, \mathscr{B}_Y, m_Y) \times (\Delta, \mathscr{B}_\Delta, m_\Delta)$.

Chaque élément δ de Δ opère dans Δ par :

$$\delta' \to \delta^{-1}\delta', \qquad \forall \delta' \in \Delta.$$

Il en résulte une action canonique $\pi(\delta)$ de δ dans $(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m)$

(9) $$(y, \delta') \to (y, \delta^{-1}\delta'), \qquad \forall (y, \delta') \in \mathrm{Y} \times \Delta.$$

Il est clair que π est une *représentation fidèle* de Δ dans Aut $(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m)$ et on a :

(10) $$\pi(\delta)m = \delta m, \qquad \forall \delta \in \Delta.$$

3) On définit la transformation T sur $(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m)$ par :

(11) $$\mathrm{T}(y, \delta) = \left(\tilde{\mathrm{T}}y, \left(\frac{d\tilde{\mathrm{T}}m_{\mathrm{Y}}}{dm_{\mathrm{Y}}}(\tilde{\mathrm{T}}y)\right)^{-1} \cdot \delta\right), \qquad \forall (y, \delta) \in \mathrm{Y} \times \Delta.$$

d'après (5) l'application T est bien définie, mesurable non singulière et il en est de même pour T^{-1} défini par :

(12) $$\mathrm{T}^{-1}(y, \delta) = \left(\tilde{\mathrm{T}}^{-1}y\left(\frac{d\tilde{\mathrm{T}}^{-1}m_{\mathrm{Y}}}{dm_{\mathrm{Y}}}(\tilde{\mathrm{T}}^{-1}y)\right) \cdot \delta\right), \qquad \forall (y, \delta) \in \mathrm{Y} \times \Delta;$$

Il est clair que $\mathrm{T}\pi(\delta) = \pi(\delta)\mathrm{T}$, $\forall \delta \in \Delta$.

Montrons que $\mathrm{T}m = m$: comme M est union disjointe des $\mathrm{Y} \times \{\delta\}, \delta \in \Delta$, il suffit de montrer que si $\mathrm{E} \in \mathscr{B}_{\mathrm{Y}}, \delta \in \Delta$, alors $m(\mathrm{T}(\mathrm{E} \times \{\delta\})) = m(\mathrm{E} \times \{\delta\})$, soit

$$\mathrm{E}_{\delta'} = \left\{ y \in \mathrm{E} \Big/ \frac{d\tilde{\mathrm{T}}m_{\mathrm{Y}}}{dm_{\mathrm{Y}}}(\tilde{\mathrm{T}}y) = \delta' \right\} \qquad \delta' \in \Delta.$$

D'après (5) on a

$$\mathrm{E} = \sum_{\delta' \in \Delta} \mathrm{E}_{\delta'}$$

Or pour tout $y \in \mathrm{E}_{\delta'}$

$$\frac{d\tilde{\mathrm{T}}m_{\mathrm{Y}}}{dm_{\mathrm{Y}}}(\tilde{\mathrm{T}}y) = \delta'$$

Donc

$$\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{E}_{\delta'} \times \{\delta\}) = \tilde{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{g'} \times \{\delta'^{-1} \cdot \delta\}$$

Donc

$$\begin{aligned} m(\mathrm{T}(\mathrm{E}_{\delta'} \times \{\delta\})) &= m_{\mathrm{Y}}(\tilde{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{\delta'})m_{\Delta}(\delta'^{-1}\delta) \\ &= \delta' m_{\mathrm{Y}}(\mathrm{E}_{\delta'}) \times \delta'^{-1}m_{\Delta}(\delta) \\ &= m_{\mathrm{Y}}(\mathrm{E}_{\delta'} \times \{\delta\}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} m(\mathrm{T}(\mathrm{E} \times \{\delta\})) &= \sum_{\delta' \in \Delta} m(\mathrm{T}(\mathrm{E}_{\delta'} \times \{\delta\})) \\ &= \sum_{\delta' \in \Delta} m(\mathrm{E}_{\delta'} \times \{\delta\}) \\ &= m(\mathrm{E} \times \{\delta\}), \end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^{-1}m = m \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{T}m = m.$$

4) La propriété 1)-*c*), 3) et l'ergodicité de $\tilde{T}$ montrent que pour tout $x \in M$ et tout $\delta \in \Delta$, il existe un $n \geqslant 0$ tel que $T^n x \in Y \times \{ \delta \}$.

5) *La transformation induite de* T *sur* $Y \times \{ 1 \}$: pour simplifier les notations, on identifie Y à $Y \times \{ 1 \}$; soit $y \in Y \times \{ 1 \}$, d'après la formule (11) définissant T, dire que $T^p y \in Y \times \{ 1 \}$ revient à dire que

$$\frac{d\tilde{T}^p m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^p y) = 1 :$$

en effet, on a :

$$T(y, \delta) = \left(\tilde{T}y, \left(\frac{\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y) \right)^{-1} \delta \right)$$

$$T^2(y, \delta) = \left(\tilde{T}^2 y, \left(\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^2 y) \cdot \frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y) \right)^{-1} \delta \right)$$

or d'après la formule (0).

$$\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^2 y) = \frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^2 y) \frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y)$$

On obtient donc

$$T^2(y, \delta) = \left(\tilde{T}^2 y, \left(\frac{d\tilde{T}^2 m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^2 y) \right)^{-1} \delta \right)$$

en utilisant la formule (0) pour $T' = T^{p-1}$, on obtient par récurrence :

$$T^p(y, \delta) = \left(\tilde{T}^p y, \left(\frac{d\tilde{T}^p m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^p y) \right)^{-1} \delta \right) \tag{13}$$

d'où le résultat annoncé.

Donc d'après les formules (6), (7) et (8), V *est la transformation induite de* T *sur* Y : $V = T_Y$ et V opère ergodiquement. La transformation induite $T_{Y \times \{\delta\}}$ de T sur $Y \times \{ \delta \}$ est donnée par $\pi(\delta) V \pi(\delta)^{-1}$, $T_{Y \times \{\delta\}}$ *opère donc ergodiquement sur* $Y \times \{ \delta \}$, pour tout $\delta \in \Delta$.

6) Il résulte de 4) et de 5) que T est ergodique. Nous avons démontré le résultat suivant :

LEMME 1. — A tout sous-groupe dénombrable Δ de R_+ on peut associer un espace de Lebesgue $(M, \mathscr{B}, m)$, m σ-finie infinie diffuse et une représentation fidèle π de $\Delta \times Z$ dans Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ tels que :

(*i*) L'action de $\pi(\{ 1 \} \times Z)$ est ergodique et préserve la mesure m.

(*ii*) Pour tout $\delta \in \Delta$, on a $\pi(\delta, 0)m = \delta m$.

THÉORÈME 3. — Soit G un groupe dénombrable ; à tout caractère réel γ de G, on peut associer un espace de Lebesgue $(M, \mathscr{B}, m)$ avec m σ-finie infinie diffuse et une représentation π de $G \times Z$ dans Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ possédant les propriétés suivantes :

(*i*) L'action de $\pi(\{ e_G \} \times Z)$ est ergodique et préserve la mesure m, e_G étant l'élément neutre de G.

(*ii*) Pour tout $g \in G$, on a $\pi(g, 0)m = \gamma(g)m$.

Il en résulte que si γ n'est pas trivial, le groupe $\pi(G \times Z)$ n'admet pas de mesure σ-finie invariante équivalente à m.

Démonstration. — Soit $\Delta = \gamma(G)$; considérons l'espace $(M, \mathscr{B}, m)$ et la représentation $\tilde{\pi}$ de $\Delta \times Z$ donnés par le lemme 1, on prend alors $\pi = \tilde{\pi} \circ \gamma$ q. e. d. ■

IV. Généralisation de la construction.

Dans la construction précédente, l'automorphisme T commute avec les $\pi(g)$, $g \in G$, et T conserve la mesure m, nous allons construire des exemples où T commute avec les $\pi(g)$, $g \in G$ et T n'admet aucune mesure invariante équivalente à m.

1) Soient Δ_n, $n = 0, 1, 2 \ldots$ une suite de sous-groupes dénombrables de R_+ $\Delta_n \neq \{ 1 \}$ $\forall n \in N$, Δ le groupe (dénombrable) engendré par les Δ_n, $n \in N$. On dit que la suite $\{ \Delta_n \}_{n \in N}$ est *indépendante* si la relation

$$\prod_{n \in N} \delta_n = 1, \quad \delta_n \in \Delta_n, \quad \delta_n = 1$$

sauf pour un nombre fini de n implique $\delta_n = 1$, $\forall n \in N$.

Pour tout sous ensemble J de N, on considère le groupe Δ_J engendré par les Δ_n, $n \in J$. Il est clair que si les J_k, $k \in N$, forment une partition de N alors la suite $\{ \Delta_{Jk} \}_{k \in N}$ est indépendante. On identifie $\Delta_{\{n\}}$ à Δ_n.

Considérons la construction de Krieger associée à Δ dans III-1), nous utilisons encore les notations de III-1). Soit $J \subset N$, tout $\delta \in A$ admet une décomposition canonique *unique* :

$$\delta = \delta_{(J)}\delta_{(N-J)}\delta_{(J)} \in \Delta_J, \qquad \delta_{(N/J)} \in \Delta_{N \backslash J}$$

On note $\delta_{(J)}$ *la composante de* δ dans Δ_J.

Comme dans III-1)-*c*) on définit

$$(14) \qquad n_{\phi}(y) = 1, \qquad \forall y \in Y.$$

$$(14') \quad n_J(y) = \inf \left\{ n \in N_+ \Big/ \frac{d\tilde{T}^n m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^n y)_{(J)} = 1 \right\}, \qquad \forall y \in Y \quad \text{si} \quad J \neq 0$$

$$(15) \qquad n(y) = n_N(y) = \inf \left\{ n \in N_+ \Big/ \frac{d\tilde{T}^n m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^n y) = 1 \right\}, \quad y \in Y.$$

Il est clair que si $J \subset K \subset -N$ alors

(16) $$n_J(y) \leq n_k(y) \leq n(y) \qquad \forall y \in Y$$

comme $n(y) < \infty$ pour m_Y-presque partout $y \in Y$, on a :

(17) $$n_J(y) < \infty \; m_Y \qquad \text{p. p.}$$

On peut alors définir

(18) $$\tilde{T}_J y = \tilde{T}^{n_J(y)} y \qquad \text{pour presque tout } y \in Y.$$

(19) $$Vy = \tilde{T}_N y = \tilde{T}^{n(y)} y \qquad \text{pour presque tout } y \in Y.$$

Il est clair que si $J \subset K \subset N$ alors

(20) $$[T_\phi] \supset [\tilde{T}_J] \supset [\tilde{T}_K] \supset [\tilde{V}]$$

(21) $$[V] = \{ S \in [\tilde{T}_J] / S m_Y = m_Y \}.$$

2) Nous nous intéressons particulièrement à Δ_0 : on définit comme dans III-2) l'espace $(M, \mathscr{B}, m) = (Y, \mathscr{B}_Y, m_Y) \times (\Delta_0, \mathscr{B}_{\Delta_0}, m_{\Delta_0})$ où $\mathscr{B}_{\Delta_0}$ est la tribu des parties de Δ_0 et m_{Δ_0} la mesure discrète définie par

(22) $$m_{\Delta_0}(\{ \delta_0 \}) = \delta_0 \qquad \forall \delta_0 \in \Delta_0.$$

On définit de même la représentation π de Δ_0 dans Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ vérifiant

(23) $$\pi(\delta_0) m = \delta_0 m \qquad \forall \delta_0 \in \Delta_0.$$

3) Pour tout $J \subset N$ on définit $T_J \in \text{Aut}\,(M, \mathscr{B}, m)$ par

(24) $$T_J(y, \delta_0) = \left(\tilde{T}_J y, \frac{d\tilde{T}_J m_Y}{dm_Y} (\tilde{T}_J y)^{-1}_{(\{0\})} \cdot \delta_0 \right) \qquad \forall (y, \delta_0) \in Y \times \Delta_0$$

D'après (17) T_J est bien définie, mesurable non singulière et il en est de même pour T_J^{-1} définie par

(25) $$T_J^{-1}(y, \delta_0) = \left(\tilde{T}_J^{-1} y, \left(\frac{d\tilde{T}_J^{-1} m_Y}{dm_Y} (\tilde{T}_J^{-1} y) \right)_{(\{0\})} \cdot \delta \right) \qquad \forall (y, \delta_0) \in Y \times \Delta_0.$$

Il est clair que

(26) $$T_J \pi(\delta_0) = \pi(\delta_0) T_J \qquad \forall J \in N, \forall \delta_0 \in \Delta_0$$

(27) $$[T_\phi] \supset [T_J] \supset [\tilde{T}_K] \qquad \forall J \subset K \subset N.$$

4) Nous nous intéressons aux sous-ensembles $J \subset N_+ = N \setminus \{ 0 \}$; un raisonnement analogue à III-3), 4), 5), 6) montre que $T_{N \setminus \{0\}}$ est *ergodique* et laisse la *mesure m invariante*.

5) D'après (27), 4) et la définition des T_J, si $J \subset N - \{ 0 \}$ alors T_J contient la mesure m au sens de Krieger et

(28) $$\Delta(T_J, m) = \Delta_{N_+ \setminus J}$$

(29) $$[T_{N_+}] = \{ S \in [T_J] / Sm = m \}$$

6) Soit maintenant γ un caractère réel non trivial d'un groupe dénombrable G soit $\Delta_0 = \gamma(G)$ on trouve par récurrence une suite indépendante $\{ \Delta_n \}_{n \in N}$ de sous-groupes dénombrables non triviaux de R_+ (par exemple on choisit Δ_1 dans $R_+ \ \{ \delta^q \} \ \delta \in \Delta, q \in R$), on note encore π la représentation $\pi \circ \gamma$ de G. Soit $\mathscr{P}(N_+)$ l'ensemble des parties de N_+. On peut énoncer :

THÉORÈME 4. — Soit G un groupe dénombrable ; à tout caractère réel non trivial γ de G, on peut associer un espace de Lebesgue $(M, \mathscr{B}, m)$ avec m σ-finie infinie diffuse, une famille $\{ T_J \}_{J \in \mathscr{P}(N_+)}$ d'automorphismes de $(M, \mathscr{B}, m)$, une famille $\{ \Delta_J \}_{J \in \mathscr{P}(N_+)}$ de sous-groupes dénombrables de R_+ tels que :

(*i*) $\pi(g)m = \gamma(g)m \qquad \forall g \in g.$

(*ii*) $\pi(g)T_J = T_J\pi(g) \qquad \forall g \in G, \ J \in \mathscr{P}(N_+)$

(*iii*) $[T_\phi] \supset [T_J] \supset [T_K] \supset [T_{N_+}] \quad \text{si} \quad J \subset K \subset N_+$

(*iv*) T_{N_+} est ergodique et laisse m invariante.

(*v*) $[T_{N_+}] = \{ S \in [T_J]/Sm = m \}, \qquad \forall J \in \mathscr{P}(N_+)$

(*vi*) Si $J \neq N_+$, alors T_J contient m et $\Delta(T_J, m) = \Delta_{N_+ \setminus J}$

(*vii*) $\Delta_J \neq \Delta_{J'} \quad \text{si} \quad J, J' \in \mathscr{P}(N_+) \quad \text{et} \quad J \neq J'.$

(*viii*) Si $J_i, i \in I$ est une partition de N_+, alors la famille $\Delta_{J_i}, i \in I$ est une famille indépendante de sous-groupes de R_+.

5. CONSTRUCTION DE FLOTS SPÉCIAUX

On se donne un système dynamique $(M, \mathscr{B}, m ; Z^n)$ où m est une mesure σ-finie relativement invariante qui n'admet pas de mesure invariante équivalente (ce qui peut être fait d'après le théorème 3). Soient $S_1, \ldots, S_n$ les générateurs de l'action de Z^n. On a alors par définition que

$$S_i m = a_i m \qquad a_i > 0 \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Soit $K = [0, 1_n]^n$. On munit K de sa tribu borélienne B_K et de la mesure

$$d\lambda(s_i, \ldots, s_n) = \prod_1^n a_i^{s_i} d\mu(s_1, \ldots, s_n)$$

où $d\mu(s_1 \ldots s_n)$ désigne la mesure de Lebesgue sur le cube K.

On considère le flot $(\Omega, \mathscr{A}, \nu\,; R^n)$ défini comme suit :

$$\Omega = M \times K,$$
$$\mathscr{A} = \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}_K,$$
$$d\nu = dm \otimes d\lambda$$

et où l'action de R^n est donnée par l'application

$$R^n \times \Omega \to \Omega$$

$$((s_1, \ldots, s_n), (x, u_1, \ldots, u_n))$$
$$\to \left(\prod_1^n S_1^{[s_i + u_i]}x, u_1 + s_1 - [u_1 + s_1], \ldots, u_n + s_n - [u_n + s_n]\right)$$

L'action est mesurable et on a le

LEMME 1. — La mesure ν est relativement invariante i. e.

$$(s_1, \ldots, s_n)\nu = \chi(s_1 \ldots s_n)\nu \qquad \text{où} \qquad \chi(s_1, \ldots, s_n) = \prod_1^n a_i^{s_i}$$

Démonstration.

$$(s_1, \ldots, s_n)d\nu(x, u_1 \ldots u_n) = \prod_{i=1}^n a_i^{[u_i + s_i]} a_i^{s_i - [u_i + s_i]} d\nu(x, u_1, \ldots, u_n)$$
$$= \prod_1^n a_i^{s_i} d\nu(x, u_1, \ldots, u_n)$$

LEMME 2. — Si le système $(\Omega, \mathscr{A}, \nu\,; R^n)$ admet une mesure σ-finie ν' équivalente à ν et invariante par l'action de R^n ; alors il existe une mesure m' sur M, équivalente à m et invariante par l'action de Z^n sur M.

Démonstration. — Soit

$$f = \frac{d\nu'}{d\nu} \quad (\text{i. e. } d\nu'(x, u_1, \ldots, u_n) = f(x, u_1 \ldots u_n)dm(x)d\lambda(u_1 \ldots u_n)$$

l'identité $(s_1, \ldots, s_n)d\nu' = d\nu'$ entraîne alors que pour tout $(s_1, \ldots, s_n) \in R^n$ il existe $\Omega_{s_1 \ldots s_n} \subset \Omega$ tel que $\nu'(\Omega - \Omega_{s_1 \ldots s_n}) = 0$ et tel que l'égalité

$$(2) \quad f\left(\prod_1^n S_i^{[s_i + u_i]}x, u_1 + s_1 - [u_1 + s_1], \ldots, u_n + s_n - [u_n + s_n]\right)\chi(s_1, \ldots, s_n)$$
$$= f(x, u_1, \ldots, u_n)$$

soit satisfaite pour tout $(x, u_1 \ldots u_n) \in \Omega_{s_1 \ldots s_n}$.

Soit $g(x, u_1 \dots u_n) = \chi(u_1 \dots u_n) f(x, u_1 \dots u_n)$, alors (2) devient

$$(3) \quad \chi([s_1 + u_1], \dots, [s_n + u_n])(s_1 \dots s_n) g(x, u_1 \dots u_n) = g(x, u_1, \dots, u_n).$$

En appliquant le théorème de Fubini à $(\Omega \times \mathrm{R}^n, \nu' \otimes ds_1 \dots ds_n)$ on a qu'il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\nu'(\Omega - \Omega') = 0$ et tel que pour tout $(x, u_1, \dots, u_n) \in \Omega'$ il existe un ensemble $\mathrm{T}_{x,u_1 \dots u_n} \in \mathrm{R}^n$ de complémentaire négligeable (pour la mesure de Lebesgue) tel que (3) soit vrai pour tout $(x, u) \in \Omega'$ et pour tout $(s_1, \dots, s_n) \in \mathrm{T}_{x,u_1,\dots,u_n}$.

Le théorème de Fubini appliqué à Ω' montre l'existence d'un ensemble $\mathrm{M}' \subset \mathrm{M}$ tel que $m(\mathrm{M} - \mathrm{M}') = 0$ et tel que pour tout $x \in \mathrm{M}'$, on ait

$$\nu((\{x\} \times \mathrm{K}) \cap \Omega') = 1.$$

Soit $(x, u_1, \dots, u_n) \in \Omega'$ où $x \in \mathrm{M}'$, alors

$$g(x, u_1 + s_1 ; u_2 + s_2, \dots, u_n + s_n) = g(x, u_1 \dots u_n)$$

si

$$0 \leq u_i + s_i < 1, \ 1 \leq i \leq n \qquad \text{et} \qquad (s_1, \dots, s_n) \in \mathrm{T}_{x,u_1 \dots u_n}.$$

Donc pour tout $x \in \mathrm{M}'$, $g(x, u_1 \dots u_n)$ est constante pour presque tout $(u_1 \dots u_n) \in \mathrm{K}$. g est donc égale presque sûrement égale à une fonction g' qui ne dépend que de la variable x. L'égalité (3) appliquée à g' entraîne que la mesure $dm' = g'dm$ est invariante par l'action de Z^n.

THÉORÈME 5. — Soit G un groupe localement compact séparable admettant R ou Z comme facteur direct. Soit χ un caractère réel sur G trivial sur ce facteur. Alors il existe un système dynamique $(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m ; \mathrm{G})$ tel que

$$gm = \chi(g)m, \qquad \forall g \in \mathrm{G},$$

qui n'admet pas de mesure invariante équivalente à m.

Démonstration. — Soit $\mathrm{G} = \mathrm{H} \times \mathrm{R}$ (resp. $\mathrm{H} \times \mathrm{Z}$). Comme G est *séparable* $\chi(\mathrm{G})$ est soit R_*^+ tout entier, soit un sous-groupe *dénombrable* de R_*^+.

Alors on peut appliquer les résultats du théorème 3 et du lemme 2 (éventuellement en construisant le flot spécial sur certaines directions seulement).

Remarque. — Dans tous les exemples construits jusqu'à présent, le caractère associé à la mesure relativement invariante était non injectif. En fait on a le

LEMME 3. — Il existe un système dynamique $(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m ; \mathrm{Z}^3)$ avec m relativement invariante : $gm \in \chi(g)m$, $\forall g \in \mathrm{G}$ n'admettant aucune mesure équivalente invariante avec un caractère χ injectif.