ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN JACOD

Corrections et compléments à l'article : « Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes »

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 2 (1974), p. 201-209
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_201_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 2, 1974, p. 201-209.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Corrections et compléments à l'article : « Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes »

par

Jean JACOD (*)
Laboratoire de Probabilités,
Université de Rennes

A l'occasion d'un travail sur une version du théorème de renouvellement pour les chaînes semi-markoviennes [*2*], H. Kesten m'a communiqué un exemple (très simple) de chaîne semi-markovienne qui vérifie les hypothèses de la proposition 8 de [*1*] sans en vérifier les conclusions.... Comme la démonstration du théorème de renouvellement de [*1*] repose essentiellement sur cette proposition, il est nécessaire de la revoir entièrement.

Ci-dessous nous proposons donc une modification de la démonstration de ce théorème. Nous en profitons pour montrer qu'il reste valide sous des hypothèses un peu plus faibles que celles de [*1*]. Nous utilisons les notations et la numérotation des propositions de [*1*].

1. CORRECTIONS

Nous devons modifier les théorèmes 1 et 3, les propositions 8 et 9, et le lemme suivant la proposition 8.

Reprenons en effet la démonstration du théorème 1 (p. 92): (12) n'entraîne pas que $f(\varpi, x, n) = h(\varpi, n)$ pour tous ϖ, x, n, mais seulement que si $A_{\varpi,n} = \{ x ; f(\varpi, x, n) \neq h(\varpi, n) \}$, alors $\lambda(A_{\varpi,n}) = 0$. Par suite le théorème 1 de [*1*] est faux, et nous devons modifier son énoncé ainsi :

THÉORÈME 1. — *Soit* $\underset{\sim}{\mu}$ *une probabilité sur* $(E, \mathscr{E})$ *de la forme*

$$\underset{\sim}{\mu}(d\varpi, dx) = \mu(d\varpi)g(\varpi, x)\lambda(dx).$$

(*) Ce travail a été effectué durant un séjour de l'auteur au Département de Statistiques de l'Université de Princeton.

Sous la condition A *et si* $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, *la* $\tilde{\mathrm{P}}_{\underset{\sim}{\mu}}$*-*$\sigma$*-algèbre asymptotique de* $(\varpi_n, \mathrm{S}_n)_{n \geq 0}$ *est identique à la* P_μ*-*σ*-algèbre asymptotique de* $(\varpi_n)_{n \geq 0}$.

Démonstration. — Une variable bornée Y est $\mathscr{G}^{\infty}_{\underset{\sim}{\mu}}$-mesurable s'il existe une fonction f bornée, harmonique pour l'espace-temps construit sur (ϖ_n, S_n), telle que

$$\mathrm{Y} = \liminf_{(n)} f(\varpi_n, \mathrm{S}_n, n), \qquad \tilde{\mathrm{P}}_{\underset{\sim}{\mu}}\text{-p. s.}$$

Soit h la fonction bornée harmonique pour l'espace-temps de (ϖ_n), associée à f (cf. avant l'énoncé). La variable $\mathrm{Z} = \liminf_{(n)} h(\varpi_n, n)$ est $\mathscr{F}^{\infty}_{\mu}$-mesurable, et le résultat sera prouvé si on montre que $\tilde{\mathrm{P}}_{\underset{\sim}{\mu}} \{ \mathrm{Z} \neq \mathrm{Y} \} = 0$. Mais $\{ \mathrm{Z} \neq \mathrm{Y} \} \subset \bigcup_{(n)} \{ \mathrm{S}_n \in \mathrm{A}_{\varpi_n, n} \}$, et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{P}}_{\underset{\sim}{\mu}} \{ \mathrm{S}_n \in \mathrm{A}_{\varpi_n, n} \} &= \int \underset{\sim}{\mu}(d\varpi, dx) \underset{\sim}{\mathrm{P}}^{n*}(\varpi\,; d\varpi', dx') 1_{\mathrm{A}_{\varpi',n}}(x + x') \\ &= \int \mu(d\varpi) \underset{\sim}{\mathrm{P}}^{n*}(\varpi\,; d\varpi', dx') \int \lambda(dx) g(\varpi, x) 1_{\mathrm{A}_{\varpi',n}}(x + x') = 0\,. \end{aligned}$$

On doit ensuite modifier toute la fin du paragraphe II-4, à partir de l'énoncé de la proposition 8.

PROPOSITION 8. — *Soit* $\underset{\sim}{\mu}$ *une probabilité sur* $(\mathrm{E}_+, \mathscr{E}_+)$ *de la forme* $\underset{\sim}{\mu}(d\varpi, dx) = \mu(d\varpi) h(\varpi, x) \lambda_+(dx)$. *Sous la condition* A *et si* $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$, *la* $\tilde{\mathrm{P}}_{\underset{\sim}{\mu}}$*-*$\sigma$*-algèbre asymptotique pour le processus* $(\mathrm{Z}_t, \mathrm{V}_t)_{t \geq 0}$ *est triviale.*

LEMME. — *Si* g *est une fonction bornée harmonique pour la chaîne* $(\varpi'_n, \mathrm{S}'_n)_{n \geq 0}$, *il existe une constante* α *telle que pour tout* ϖ, *on ait* $g(\varpi, .) = \alpha$, λ*-p. p.*

Démonstration du lemme. — On reprend celle de [*1*], en modifiant ainsi la ligne 24 de la page 106 : il existe une fonction h sur Π telle que pour tout ϖ, on ait $g(\varpi, x) = h(\varpi)$ λ-p. p. en x.

Démonstration de la proposition. — Si Y est une variable bornée, mesurable pour $\tilde{\mathrm{P}}_{\underset{\sim}{\mu}}$-$\sigma$-algèbre asymptotique du processus $(\mathrm{Z}_t, \mathrm{V}_t)$, il existe une fonction f sur $\mathrm{E}_+ \times \mathbb{R}$, bornée, harmonique pour l'espace-temps construit à partir de ce processus, et telle que

$$\mathrm{Y} = \liminf_{(n)} f(\mathrm{Z}_n, \mathrm{V}_n, n), \qquad \tilde{\mathrm{P}}_{\underset{\sim}{\mu}}\text{-p. s.}$$

On montre alors comme en [*1*] qu'il existe une fonction g telle que $f(\varpi, x, t) = g(\varpi, x + t)$ et que $\underset{\sim}{\mathrm{H}}_0 * g = g$. D'après le lemme il existe alors une constante α telle que pour tout ϖ, $g(\varpi, .) = \alpha$, λ-p. p. Par suite pour tout t, $f(\varpi, ., t) = \alpha$, λ-p. p., et on montre comme au théorème 1 que $\tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}\{ f(Z_n, V_n, n) \neq \alpha \} = 0$. Donc $\tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}\{ Y \neq \alpha \} = 0$, d'où le résultat.

THÉORÈME 3 *(Renouvellement). — Soit une chaîne semi-markovienne vérifiant la condition* A *et telle que* $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$. *Si* A *est une partie de* Π *de potentiel borné et si* $m < \infty$ *(resp.* $m = +\infty$ *et* $\pi(A) < \infty$*), les mesures* $\underset{\sim}{U}(\varpi\,; A, t + .)$ *convergent vaguement vers* $\frac{1}{m}\pi(A)\lambda(.)$ *(resp.* 0*) quand* $t \uparrow \infty$.

(Il est facile de vérifier que si $m < \infty$ et si A est de potentiel borné, alors $\pi(A) < \infty$).

Nous allons distinguer deux cas :

a) *Il existe* ϖ_0 *tel que* $\pi(\{ \varpi_0 \}) > 0$. — Dans ce cas, si ν est le premier temps de passage de la chaîne (ϖ_n) dans l'état ϖ_0, on a $\nu < \infty$ p. s. Comme A est de potentiel borné, il est facile de voir qu'il existe une suite $t_n \uparrow \infty$ telle que les mesures $\underset{\sim}{U}(\varpi_0\,; A, t_n + .)$ convergent vaguement vers une mesure $V^A(.)$. On note $\tau_y f$ la fonction $f(. - y)$. On a :

$$\underset{\sim}{U}(\varpi\,; A, \tau_{t_n} f) = \tilde{E}_{\varpi,0}\left\{ 1_{t_n < S_\nu} \sum_{(p)} 1_A(\varpi_p) f(S_p - t_n) \right\}$$
$$+ \tilde{E}_{\varpi,0}\left\{ 1_{S_\nu \leqslant t_n}\left[\underset{\sim}{U}(\varpi_0\,; A, \tau_{t_n - S_\nu} f) + \sum_{(p)} 1_A(\varpi_p) f(S_p - t_n) 1_{S_p < S_\nu} \right] \right\},$$

qui d'après le théorème de Lebesgue converge vers

$$W^A(\varpi, f) = \tilde{E}_{\varpi,0}\{ V^A(\tau_{-S_\nu} f) \}$$

pour toute f continue à support compact (en particulier $V^A(.) = W^A(\varpi_0, .)$).

L'équation de renouvellement s'écrit

$$\underset{\sim}{U}(\varpi\,; A, \tau_t f) = f(-t) 1_A(\varpi) + \int \underset{\sim}{P}(\varpi\,; d\varpi', dx) \underset{\sim}{U}(\varpi'\,; A, \tau_{t-x} f).$$

D'après le théorème de Lebesgue, si $t = t_n \uparrow \infty$ on trouve $W^A = \underset{\sim}{P} * W^A$. Autrement dit, W^A vérifie les conditions du lemme 2 du paragraphe I-3, et on en conclut que $W^A(\varpi, .) = h^A(\varpi)\lambda(.)$, ou h^A est harmonique pour (ϖ_n), donc égale à une constante $\theta(A)$. D'autre part d'après (19),

$$\pi(A)\lambda(f) = \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx) \underset{\sim}{U}(\varpi\,; A, \tau_{t-x} f).$$

D'après le lemme de Fatou, si $t = t_n \uparrow \infty$ on obtient (pour f positive) :

$$m\theta(A)\lambda(f) = \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx) W^A(\varpi, \tau_{-x} f) \leqslant \pi(A)\lambda(f).$$

Si $m = +\infty$, on en déduit que $\theta(A) = 0$ et $W^A = 0$; si $m < \infty$, l'inégalité ci-dessus est une égalité (théorème de Lebesgue) et on a $\theta(A) = \frac{1}{m}\pi(A)$.

On en déduit d'abord que pour toute suite $t_n \uparrow \infty$ telle que $\underset{\sim}{U}(\varpi_0\,; A, t_n + .)$ converge, la limite est $\frac{1}{m}\pi(A)\lambda(.)$ (resp. 0) si $m < \infty$ (resp. $m = +\infty$). Comme l'ensemble $\{ U(\varpi_0\,; A, t + .)\,; t \geqslant 0 \}$ est relativement compact (pour la topologie de la convergence vague), on en déduit que $\underset{\sim}{U}(\varpi_0\,; A, t + .)$ converge vers la limite ci-dessus quand $t \uparrow \infty$. On en déduit enfin (comme au début de la démonstration) qu'il en est de même de $\underset{\sim}{U}(\varpi\,; A, t + .)$ pour tout ϖ.

b) *On a* $\pi(\{ \varpi \}) = 0$ *pour tout* ϖ. — C'est ici que nous allons utiliser la proposition 8. Commençons par une série de lemmes qui démarquent des résultats classiques. Nous posons $\mathscr{H}^t = \sigma(Z_s, V_s\,; s \geqslant t)$ et $\mathscr{P}$ désigne la classe des probabilités sur $(E_+, \mathscr{E}_+)$ de la forme

$$\underset{\sim}{\mu}(d\varpi, dx) = \mu(d\varpi)h(\varpi, x)\lambda_+(dx)\,;$$

on peut choisir (ce que nous ferons) h de sorte que

$$\int h(\varpi, x)\lambda_+(dx) = 1$$

pour tout ϖ.

LEMME A. — *Soient* $\underset{\sim}{\mu} \in \mathscr{P}$ *et* $B \in \mathscr{H}^0$; *on a* :

$$\lim_{t \uparrow \infty} \sup_{A \in \mathscr{H}^t} | \tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}(A \cap B) - \tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}(A)\tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}(B) | = 0\,.$$

La démonstration est classique (voir par exemple la référence [5] de [*1*]), car la σ-algèbre des classes d'équivalence de $\mathscr{H}^\infty$ pour la loi $\tilde{P}_{\underset{\sim}{\mu}}$ est triviale d'après la proposition 8.

LEMME B. — *Soient* $\underset{\sim}{\mu}$ *et* $\underset{\sim}{\mu}'$ *deux éléments de* $\mathscr{P}$ *vérifiant*

$$\int \mu(d\varpi)\mu'(d\varpi')1_{\varpi = \varpi'} = 0\,.$$

On a alors :

$$\lim_{t \uparrow \infty} \| \underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\Pi}_t - \underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Pi}_t \| = 0\,.$$

Démonstration. — Soient $\underset{\sim}{\nu}_\varpi(d\varpi', dx) = \delta_\varpi(d\varpi')h(\varpi, x)\lambda_+(dx)$, et $\underset{\sim}{\nu}'_\varpi$ définie de la même manière à partir de h'. Appliquons le lemme A aux ensembles $A = \{ (Z_t, V_t) \in \Gamma \}$ et $B = \{ Z_0 = \varpi \}$, avec la probabilité $\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\nu}_\varpi + \underset{\sim}{\nu}'_{\varpi'})$. Si $\varpi \neq \varpi'$ on trouve :

$$\lim_{t \uparrow \infty} \sup_{\Gamma \in \mathscr{E}_+} | \underset{\sim}{\nu}_\varpi\underset{\sim}{\Pi}_t(\Gamma) - \underset{\sim}{\nu}'_{\varpi'}\underset{\sim}{\Pi}_t(\Gamma) | = 0\,.$$

Soit alors Γ_t l'ensemble de mesure positive dans la décomposition de Jordan-Hahn de $\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\Pi}_t - \underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Pi}_t$. Il vient :

$$\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\Pi}_t(\Gamma_t) - \underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\Pi}_t(\Gamma_t) = \int (\underset{\sim}{\nu}_{\varpi}\underset{\sim}{\Pi}_t(\Gamma_t) - \underset{\sim}{\nu}'_{\varpi'}\underset{\sim}{\Pi}_t(\Gamma_t))\mu(d\varpi)\mu'(d\varpi'),$$

qui tend vers 0 d'après ce qui précède et d'après l'hypothèse faite sur μ et μ'. On fait de même pour l'ensemble de mesure négative de la décomposition de Jordan-Hahn, et on en déduit le résultat.

LEMME C. — *Supposons que* $\pi(\{\varpi\}) = 0$ *pour tout* ϖ. *Si* $\underset{\sim}{\mu} \in \mathscr{P}$ *et si* f *est une fonction mesurable bornée sur* E_+, *telle que* $\underset{\sim}{G}(f) < \infty$, *alors* $\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\Pi}_t f$ *converge vers* $\frac{1}{m}\underset{\sim}{G}(f)$ *(resp.* 0) *lorsque* $m < \infty$ *(resp.* $m = +\infty$), *quand* $t \uparrow \infty$.

Démonstration. — 1) Supposons $m < \infty$. On a $\frac{1}{m}\underset{\sim}{G} \in \mathscr{P}$ et comme $\underset{\sim}{G}(\{\varpi\} \times \mathbb{R}_+) = 0$ pour tout ϖ par hypothèse (cf. proposition 3), les lois $\underset{\sim}{\mu}$ et $\frac{1}{m}\underset{\sim}{G}$ vérifient les conditions du lemme B. On applique ce lemme, en remarquant que $\underset{\sim}{G}\underset{\sim}{\Pi}_t = \underset{\sim}{G}$.

b) Supposons $m = +\infty$. Si $\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\Pi}_t f$ ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, et une suite (t_n), tels que $\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\Pi}_{t_n} f \geqslant \delta(\varepsilon + \underset{\sim}{G}(f))$ pour tout n. Si $\mu(\{\varpi\}) = 0$, d'après le lemme B on a $g_n(\varpi, x) = \underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\Pi}_{t_n} f - \underset{\sim}{\Pi}_{t_n} f(\varpi, x) \to 0$ pour λ-presque tout x. Comme $\underset{\sim}{G}$ n'admet pas d'atomes on en déduit que g_n tend $\underset{\sim}{G}$-p. p. vers 0. Comme $\underset{\sim}{G}(E_+) = +\infty$, il existe d'après le théorème d'Egoroff un ensemble $B \in \mathscr{E}_+$ tel que $\underset{\sim}{G}(B) \geqslant \frac{1}{\delta}$ et que $|g_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\delta$ sur B pour un n assez grand. Mais alors :

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{G}(f) \geqslant \int_B \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)\underset{\sim}{\Pi}_{t_n} f(\varpi, x) &\geqslant \underset{\sim}{G}(B)\left(\underset{\sim}{\mu}\underset{\sim}{\Pi}_{t_n} f - \frac{\varepsilon}{2}\delta\right) \\ &\geqslant \underset{\sim}{G}(B)\left(\delta\underset{\sim}{G}(f) + \frac{\varepsilon}{2}\delta\right) \geqslant \underset{\sim}{G}(f) + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Fin de la démonstration du théorème 3. — Soit f une fonction continue à support compact dans $]0, \infty[$. La fonction $g(\varpi, x) = \underset{\sim}{U}(\varpi\,; A, \tau_{-x} f)$ est bornée, mesurable, et vérifie $\underset{\sim}{G}(g) = \underset{\sim}{G} * \underset{\sim}{U}(A, f) = \pi(A)\lambda(f) < \infty$. D'autre part, $\underset{\sim}{U}(\varpi\,; A, \tau_t f) = \underset{\sim}{H}_t g(\varpi)$. Enfin on remarque que si

$$h(\varepsilon) = \sup\,(\,|\,f(x+h) - f(x)\,|\,;\, x \in \mathbb{R},\, |\,h\,| \leqslant \varepsilon)$$

et si K est le support de f, on a :

$$\left| \frac{1}{r} \int_0^r \underset{\sim}{U}(\varpi ; A, \tau_{t-x}f)dx - \underset{\sim}{U}(\varpi ; A, \tau_t f) \right| \leqslant h(r)\underset{\sim}{U}(\varpi ; A, K \oplus [t - r, t[) ;$$

comme $h(r) \downarrow 0$ si $r \downarrow 0$ et comme A est de potentiel borné, l'expression précédente tend vers 0 quand $r \downarrow 0$, uniformément en t. Par suite si on montre que pour tout $r > 0$,

$$\frac{1}{r} \int_0^r \underset{\sim}{U}(\varpi ; A, \tau_{t-x}f)dx$$

converge vers $\frac{1}{m} \pi(A)\lambda(f)$ quand $t \uparrow \infty$, on en déduit que $\underset{\sim}{U}(\varpi ; A, \tau_t f)$ admet la même limite.

Pour achever, il nous reste alors à appliquer le lemme C à la mesure $\underset{\sim}{\mu}$ définie par $\underset{\sim}{\mu}(d\varpi', dx) = \delta_\varpi(d\varpi') \frac{1}{r} 1_{0<x\leqslant r}\lambda(dx)$, et à la fonction g définie ci-dessus, en remarquant que $\underset{\sim}{\Pi}_t g(\varpi, x) = \underset{\sim}{H}_{t-x} g(\varpi)$.

PROPOSITION 9. — *Soit une chaîne semi-markovienne vérifiant la condition* A *et telle que* $\sigma(\Sigma) = \mathbb{R} \times d\mathbb{Z}$. *Soit* A *une partie de* Π *telle que* $\underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+) < \infty$. *Les mesures* $\underset{\sim}{V}(\varpi ; A, t + .)$ *convergent vaguement vers* $\frac{1}{m} \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(.)$ *(resp.* 0*) si* $m < \infty$ *(resp.* $m = +\infty$*), quand* $t \uparrow \infty$.

Démonstration. — Comme dans le théorème 3, on distingue deux cas :

a) *Il existe* ϖ_0 *tel que* $\pi(\{ \varpi_0 \}) > 0$. — On suit pas à pas le théorème 3. On montre d'abord que si $\underset{\sim}{V}(\varpi_0 ; A, t_n + .)$ converge vaguement (quand $t_n \uparrow \infty$), alors $\underset{\sim}{V}(\varpi ; A, t_n + .)$ converge vaguement vers une limite $W^A(\varpi, .)$ pour tout ϖ, et il suffira de montrer que $W^A(\varpi, f) = \frac{1}{m} \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)$ ou 0 selon que $m < \infty$ ou $m = +\infty$.

On a l'équation de renouvellement :

$$\underset{\sim}{V}(\varpi ; A, \tau_t f) = \tilde{E}_{\varpi,0} \left\{ 1_{t<S_1} \int 1_A(Z_s) f(s - t)ds \right\} + \int \underset{\sim}{P}(\varpi ; d\varpi', dx)\underset{\sim}{V}(\varpi' ; A, \tau_{t-x}f) 1_{x\leqslant t} ,$$

qui entraîne $\underset{\sim}{P} * W^A = W^A$. Par suite il existe une constante $\theta(A)$ telle que $W^A(\varpi, .) = \theta(A)\lambda(.)$. D'autre part un calcul élémentaire, utilisant la relation du haut de la page 105, montre que pour toute fonction positive f,

$$(i) \quad \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)\underset{\sim}{V}(\varpi; A, \tau_{-x}f) + \int \underset{\sim}{G}(A \times]x, \infty[)\lambda_+(dx)f(x) = \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda_+(f).$$

Si g est continue à support compact, on applique (i) à $f = \tau_{t_n}g$ et le lemme de Fatou entraîne

$$m\theta(A)\lambda(g) = \int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)W^A(\varpi, \tau_{-x}g) \leqslant \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(g).$$

Donc si $m = +\infty$, on a $\theta(A) = 0$ et le résultat est prouvé. Si $m < \infty$, on obtient :

$$(ii) \quad m\theta(A)\lambda(g) + \lim_{(n)} \int \underset{\sim}{G}(A \times]x, \infty[)\lambda_+(dx)g(x - t_n) = \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(g).$$

D'après la proposition 7 (avec $B = \Pi$) et le théorème de Lebesgue, on voit que $\frac{1}{t}\int \underset{\sim}{G}(d\varpi, dx)\underset{\sim}{V}(\varpi; A,]0, t - x])$ tend vers $\underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)$ si $t \uparrow \infty$. En utilisant (i) avec $f = \frac{1}{t}1_{]0,b[}$, on en déduit que $\frac{1}{t}\int \underset{\sim}{G}(A \times]x, \infty[)1_{0<x\leqslant t}dx$ tend vers 0. Par suite, comme $\underset{\sim}{G}(A \times]x, \infty[)$ décroît quand x croît, pour tout compact K, $\int \underset{\sim}{G}(A \times]x, \infty[)1_{K+t}(x)dx$ décroît vers 0. Comme g est à support compact, (ii) devient $m\theta(A)\lambda(g) = \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(g)$, ce qui achève la démonstration du cas a).

b) *On a* $\pi(\{\varpi\}) = 0$ *pour tout* ϖ. — Soit f une fonction à support compact K, de module de continuité h. La fonction

$$g(\varpi, x) = 1_A(\varpi)\int_0^x f(s)ds + \underset{\sim}{V}(\varpi; A, \tau_{-x}f)$$

est bornée par $\lambda(f)$, mesurable, et en utilisant la fonctionnelle A'_t introduite page 104, on voit que $g(\varpi, x) = \tilde{E}_{\varpi,x}\left\{\int f(s)dA'_s\right\}$. Par suite

$$\underset{\sim}{G}(g) = \tilde{E}_{\underset{\sim}{G}}\left\{\int f(s)dA'_s\right\} = \nu_{A'}\lambda(f) = \underset{\sim}{G}(A \times \mathbb{R}_+)\lambda(f) < \infty.$$

D'autre part $\underset{\sim}{V}(\varpi\,;\,A,\,\tau_t f) = \underset{\sim}{H}_t g(\varpi)$. On termine alors comme au théorème 3, en utilisant le fait que

$$\left| \frac{1}{r} \int_0^r \underset{\sim}{V}(\varpi\,;\,A,\,\tau_{t-x} f)dx - \underset{\sim}{V}(\varpi\,;\,A,\,\tau_t f) \right| \leqslant h(r)\lambda(K)\,.$$

2. COMPLÉMENTS

Si on regarde de près la démonstration du lemme suivant la proposition 8, on voit qu'on ne fait usage de (12) que pour une famille (Q_n) de transitions indépendante de n. Cela va nous permettre d'affaiblir les hypothèses du théorème 3.

Pour tout $A \in \mathscr{E}$ on pose

$$L(\varpi,\,A) = \tilde{P}_{\varpi,0}\left\{ \bigcup_{n \geqslant 1} \{ (\varpi_n,\,S_n) \in A \} \right\}.$$

On note Σ' l'ensemble des points a de $\mathbb{R}$ tels que pour tout $\delta > 0$ il existe une partie $D \in \mathscr{N}$ de π-mesure positive et un nombre $\theta > 0$ tels que

$$\forall A \subset D, \quad \forall \varpi \in D, \qquad L(\varpi,\,A \times \delta(a)) \geqslant \theta\pi(A)\,.$$

On remarque que $\Sigma \subset \Sigma' \times d\mathbb{Z}$, et on note $\sigma(\Sigma')$ le sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ engendré par Σ'.

LEMME 1'. — *Sous la condition* A, *si f est une fonction sur* E *bornée harmonique pour la chaîne $(\varpi_n,\,S_n)_{n \geqslant 0}$ et telle que la famille $\{ f(\varpi,\,.)\,;\,\varpi \in \Pi \}$ de fonctions sur $\mathbb{R}$ soit uniformément équi-continue, pour tout point $a \in \sigma(\Sigma')$ on a :*

$$f(\varpi,\,x) = f(\varpi,\,x + a) \qquad \forall(\varpi,\,x) \in E\,.$$

La démonstration est une transcription de celle du lemme 1. La même démonstration qu'au lemme 2 permet alors de montrer le :

LEMME 2'. — *Sous la condition* A, *soit* Q *une mesure de transition positive de $(\Pi,\,\mathscr{N})$ dans $(\mathbb{R},\,\mathscr{R})$ vérifiant pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}$:

$$\sup \{ Q(\varpi\,;\,x + K)\,;\,x \in \mathbb{R},\,\varpi \in \Pi \} = \alpha(K) < \infty\,.$$

Si on a $\underset{\sim}{P} * Q = Q$, alors pour tout $a \in \sigma(\Sigma')$ on a $Q(\varpi,\,.) = Q(\varpi,\,a + \,.)$.

Par conséquent le théorème de renouvellement (théorème 3) reste valide *lorsque la chaîne semi-markovienne vérifie la condition* A *et* $\sigma(\Sigma') = \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. JACOD, Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. VII, n° 2, p. 83-129, 1971.

[*2*] H. KESTEN, Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space, *à paraître* (1973).