ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MIGUEL ANGEL GARCIA ALVAREZ

Représentation des noyaux excessifs

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, n° 3 (1973), p. 277-283
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_3_277_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IX, n° 3, 1973, p. 277-283.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Représentation des noyaux excessifs

par

Miguel Angel GARCIA ALVAREZ [1]

Institut de Recherche mathématique avancée,
7, rue René Descartes, 67-Strasbourg, Bas-Rhin

SUMMARY. — Let X be a transient Hunt Process with state space E. We characterize, under duality hypotheses, those kernels N on E for which an additive fonctional A exists such that $U_A = N$.

1. INTRODUCTION

Soit X un processus de Hunt à valeurs dans un espace localement compact à base dénombrable E et soient A, B deux fonctionnelles additives dont les potentiels $U_A 1$, $U_B 1$ sont finis. Nous savons que chacun des noyaux U_A, U_B caractérise une fonctionnelle additive, c'est-à-dire, l'égalité $U_A = U_B$ entraîne l'égalité $A = B$. Nous nous proposons alors de résoudre le problème suivant : caractériser, parmi les noyaux, ceux qui sont de la forme U_A, où A est une fonctionnelle additive. Cela nous permettra d'établir une correspondance biunivoque entre une classe de noyaux et les fonctionnelles additives de X. Nous ferons cette caractérisation sous l'hypothèse que le processus donné admet un processus dual. Nous aurons de même, avec cette hypothèse, une représentation des noyaux dit excessifs au moyen d'une mesure sur le produit $E \times E$. En particulier, nous pourrons établir une correspondance biunivoque entre une classe de mesures sur $E \times E$ et les fonctionnelles additives de X.

[1] Ce travail a été financé par le Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (Mexique). Il a fait l'objet d'une note aux *C. R.* sans démonstrations, t. **272**, p. 494-497, 15 février 1971.

2. NOTATIONS, DÉFINITIONS, RAPPELS

X est un processus de Hunt transient à valeurs dans un espace localement compact à base dénombrable E. Son semi-groupe est noté (P_t), son noyau potentiel U. On suppose qu'il admet une mesure de référence, et on supposera plus loin qu'il admet un processus dual. On désigne par $\mathscr{B}(E)$, $\mathscr{B}(E \times E)$ les tribus boréliennes sur E et $E \times E$ respectivement ; par $\mathscr{G}(E)$, $\mathscr{G}(E \times E)$ les espaces de fonctions boréliennes bornées sur E et $E \times E$ respectivement. On appellera simplement mesures (bimesures) les mesures positives sur E (resp. $E \times E$), et noyaux (binoyaux) les noyaux positifs de E dans E (resp. de E dans $E \times E$).

On dit qu'un noyau (binoyau) N est *excessif* si Nf est un potentiel de la classe (D) pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{G}^+(E)$ [resp. $\mathscr{G}^+(E \times E)$]. N est alors dit *naturel* (resp. *naturel à gauche*) si pour tout couple (K, G) où K est compact dans E et G est un ouvert contenant K, on a $P_G NI_K = NI_K$ (resp. $P_G NI_{K \times E} = NI_{K \times E}$).

Soit A une fonctionnelle additive dont le potentiel $U_A 1$ est fini. On introduit le binoyau excessif suivant, appelé *bipotentiel* de A ([2]).

$$\tilde{U}_A F = E\left[\int_0^\infty F(X_{s-}, X_s) dA_s \right]$$

C'est un binoyau excessif, naturel à gauche, et tel que $\tilde{U}_A(1 \otimes f) = U_A f$ pour tout $f \in \mathscr{G}(E)$.

Nous dirons qu'un ensemble $A \in \mathscr{B}(E \times E)$ est *bipolaire* si le temps d'arrêt

$$T_A = \inf \{ t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in A \}$$

est P^x-p. s. infini, quel que soit $x \in E$.

Nous savons que les noyaux de la forme U_A, où A est une fonctionnelle additive dont le potentiel $U_A 1$ est fini, sont excessifs, mais l'exemple suivant montre qu'il existe des noyaux excessifs qui ne sont pas de cette forme. Supposons que X ait des trajectoires continues. Alors toutes les fonctionnelles additives sont naturelles, et tous les noyaux excessifs de la forme U_A sont naturels ([3]). Soient w un potentiel de la classe (D) partout > 0, m une mesure bornée qui charge tous les ouverts non vides. Le noyau N défini par $Nf = \langle f, m \rangle w$ est excessif, et on vérifie aussitôt qu'il n'est pas naturel :

([2]) M. J. SHARPE, Discontinuous additive functionals of dual processes *(à paraître)*.
([3]) R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, Markov processes and potentiel theory, p. 155, New York, Academic Press, 1968.

il ne peut donc être de la forme U_A. Nous nous proposons alors de caractériser, parmi les noyaux excessifs, ceux qui sont de la forme U_A.

Nous utiliserons dans la suite les deux résultats suivants :

THÉORÈME 1. — Soit H une fonction d'ensemble définie sur $\mathscr{B}(E) \times \mathscr{B}(E)$, telle que $H(A, .)$ et $H(., A)$ soient des mesures pour tout $A \in \mathscr{B}(E)$. Alors il existe une bimesure n et une seule telle que $H(A, B) = n(A \times B)$ pour $A \in \mathscr{B}(E)$, $B \in \mathscr{B}(E)$ (4).

THÉORÈME 2. — Soient w un potentiel de la classe (D), A la fonctionnelle additive naturelle engendrant w. Si C est un noyau excessif naturel tel que $C1 = w$, on a $C = U_A$ (5).

Ce théorème entraine aussitot que si les trajectoires du processus X sont continues, alors un noyau excessif N est de la forme U_A si et seulement si N est naturel.

3. BINOYAU ASSOCIÉ A UN NOYAU EXCESSIF

Soient $f \in \mathscr{G}^+(E)$, $g \in \mathscr{G}^+(E)$, N un noyau excessif. Désignons par A_g la fonctionnelle additive naturelle engendrant le potentiel de la classe (D)Ng, et considérons pour x fixé la fonction d'ensemble $(f, g) \to U_{A_g}(x, f)$: pour tout f, c'est une mesure en g, et pour tout g une mesure en f. Il résulte alors aussitôt du théorème 1 qu'il existe un binoyau $\tilde{N}$ et un seul tel que l'on ait, quelles que soient f et g,

$$\tilde{N}(x, f \otimes g) = U_{A_g}(x, f)$$

Nous dirons que $\tilde{N}$ est le *binoyau associé* au noyau excessif N. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — $\tilde{N}$ est excessif et naturel à gauche. C'est le seul binoyau excessif naturel à gauche satisfaisant à la relation

$$\tilde{N}(1 \otimes g) = Ng \qquad \text{pour tout } g \in \mathscr{G}^+(E)$$

Démonstration. — D'après la définition du binoyau $\tilde{N}$, l'application $x \to \tilde{N}(x, f \otimes g)$ est une fonction excessive, quelles que soient $f \in \mathscr{G}^+(E)$, $g \in \mathscr{G}^+(E)$. Un argument de classes monotones entraîne alors que $\tilde{N}F$ est

(4) Ph. MORANDO, Mesures aléatoires, Séminaire de Probabilités III, Université de Strasbourg, *Lecture Notes in M*, t. **88**, 1969, p. 221.

(5) J. AZEMA, *Ann. Inst. Fourier*, t. **19**, 1970, p. 505.

surmédiane pour tout $F \in \mathscr{G}^+(E \times E)$. Posons $RF = \text{reg } \tilde{N}F$ pour $F \in \mathscr{G}^+(E \times E)$, alors $RF = \tilde{N}F$ p. p. Soit H la famille des ensembles $B \in \mathscr{B}(E \times E)$ tels que $\tilde{N}I_B$ soit excessive. Si B_1 et B_2 sont deux ensembles de H tels que $B_1 \subset B_2$, soit $B = B_2 - B_1$, alors $\tilde{N}I_B = \tilde{N}I_{B_2} - \tilde{N}I_{B_1}$. Par conséquent $RI_B + \tilde{N}I_{B_1} = \tilde{N}I_{B_2}$ p. p., donc partout, puisque les deux membres sont des fonctions excessives. Donc H est un d-système contenant $\mathscr{B}(E) \times \mathscr{B}(E)$ et on a, d'après un théorème de classes monotones ([6]), $H = \mathscr{B}(E \times E)$. Il est alors immédiat que $\tilde{N}F$ est un potentiel de la classe (D) pour tout $F \in \mathscr{G}^+(E \times E)$, c'est-à-dire, $\tilde{N}$ est un binoyau excessif. Il est clair qu'il est naturel à gauche et satisfait à la relation $\tilde{N}(1 \otimes g) = Ng$ pour tout $g \in \mathscr{G}^+(E)$. Pour démontrer l'unicité soient $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ deux binoyaux satisfaisant à l'énoncé. Fixons $f \in \mathscr{G}^+(E)$ et définissons les noyaux excessifs naturels suivants : $M_1 g = \tilde{M}_1(g \otimes f)$, $M_2 g = \tilde{M}_2(g \otimes f)$. On a $M_1 1 = M_2 1$, donc, d'après le théorème 2, $M_1 = M_2$. Et par conséquent $\tilde{M}_1 = \tilde{M}_2$.

Notre résultat principal est le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — Supposons que X admette un processus dual standard. Alors un noyau excessif N est de la forme U_A, ou A est une fonctionnelle additive de X, si et seulement si $\tilde{N}I_B = 0$ pour tout ensemble bipolaire $B \subset E \times E$.

L'existence d'un dual intervient seulement par l'intermédiaire du lemme suivant :

LEMME 1. — Supposons que X admette un processus dual, et soit λ une mesure de référence bornée ([7]). Soient C et D deux noyaux excessifs naturels tels que l'on ait $\lambda C = \lambda D$. On a alors $C = D$.

Nous démontrons d'abord le lemme :

λ étant une mesure de référence bornée, la mesure $m = \lambda U$ est alors une mesure de référence excessive σ-finie, et il est bien connu que si X admet un dual standard, il admet un dual standard par rapport à m. Notons $u(x, y)$ la fonction de Green par rapport à m. On démontre ([8]) que si w est un potentiel de la classe (D) il existe une unique mesure σ-finie v telle que

$$w = Uv = \int u(., y)v(dy)$$

En vertu de la relation $P_G u(., y) = u(., y)$ pour tout y et tout ouvert G

([6]) R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, Markov processes and potentiel theory, p. 155, New York, Academic Press, 1968.

([7]) Il suffit même que λU soit une mesure de référence. Voir la démonstration ci-dessous.

([8]) D. REVUZ, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **148**, 1970, p. 517.

contenant y, le noyau $N : f \to U(fv)$ est alors un noyau excessif naturel — le seul noyau excessif naturel N tel que $N1 = w$ — et on a $v = \lambda N$. En effet, comme $m = \lambda U$, on a

$$\int \lambda(dx)u(x, .) = 1,$$

et

$$\langle \lambda N, f \rangle = \langle \lambda, U(fv) \rangle = \int\int \lambda(dx)u(x, y)f(y)v(dy) = \langle v, f \rangle$$

Autrement dit, on a montré que si N est un noyau excessif naturel, on a $Nf = U(f.\lambda N)$. Cela entraîne aussitôt le lemme.

Nous démontrons maintenant le théorème 3 :

Soit d une distance sur E, $\leqslant 1$, compatible avec la topologie de E. Posons

$$I_\infty = I_\Delta \qquad \Delta \text{ étant la diagonale}$$
$$I_n = I_{\{(x,y)\ 2^{-n-1} < d(x,y) \leqslant 2^{-n}/\}}$$

et introduisons les binoyaux excessifs $\tilde{N}_p f = \tilde{N}(f I_p)$. Ils sont tous naturels à gauche, aucun ne charge les ensembles bipolaires, de plus $\tilde{N} = \sum_{p \geqslant 0} \tilde{N}_p$.

Il suffit donc de démontrer que chacun d'eux est bipotentiel d'une fonctionnelle additive. $\tilde{N}_\infty$ est porté par la diagonale, il est naturel à gauche. Le théorème 2 entraîne aussitôt que c'est le bipotentiel d'une fonctionnelle additive naturelle. Maintenant soit λ une mesure de référence bornée et introduisons la mesure H_p sur $E \times E$, portée par la bande

$$B_p = \{ (x, y) : I_p(x, y) \neq 0 \}$$

$$H_p(F) = E^\lambda\left[\sum_0^\infty F(X_{s-}, X_s)I_p(X_{s-}, X_s)\right]$$

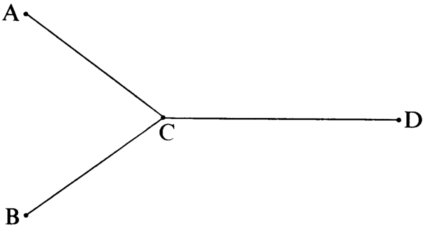
La bimesure H_p est σ-finie ([9]), et un ensemble contenu dans B_p est bipolaire si et seulement s'il est H_p-négligeable. Notons alors F_p une densité de la mesure $\lambda\tilde{N}_p$ par rapport à H_p, nulle en dehors de la bande. Notons A_p la fonctionnelle additive $\sum_0^t F_p(X_{s-}, X_s)$. Nous avons, si F est positive sur $E \times E$

$$\langle \lambda, \tilde{U}_{A_p}F \rangle = E^\lambda[\Sigma F_p(X_{s-}, X_s)F(X_{s-}, X_s)] = \langle H_p, F_pF \rangle$$
$$= \langle \lambda\tilde{N}_p, F \rangle = \langle \lambda, \tilde{N}_pF \rangle$$

([9]) P. A. MEYER, Processus de Markov : la frontière de Martin. *Lecture Notes in M.*, t. 77, 1968, p. 151.

Prenons $F = f \otimes g$, où g est fixé : nous avons en f deux noyaux excessifs naturels satisfaisant à l'hypothèse du lemme, donc $\tilde{U}_{A_p} = \tilde{N}_p$. Dans l'autre sens le théorème étant trivial, la démonstration est achevée.

Remarque (Due à Azéma). — Une hypothèse de dualité est nécessaire pour le lemme, comme on le montre par l'exemple suivant : soit X le processus de translation à droite sur l'espace suivant



Soit λ la mesure définie par $\lambda = \varepsilon_A + \varepsilon_B$, elle est une mesure de référence pour le processus X. Considérons alors les noyaux excessifs naturels M et N définis par

$$\begin{aligned} Mf^x &= f(c) && \text{si } x \in [A, C[\cup [B, C[\\ &= 0 && \text{si } x \in [C, D] \\ Nf^x &= 2f(c) && \text{si } x \in [A, C[\\ &= 0 && \text{si } x \in [B, D] \end{aligned}$$

L'égalité $\lambda N = \lambda M$ est satisfaite, mais $N \neq M$. Il faut aussi remarquer que malgré la fausseté du lemme, le théorème 3 est encore vrai pour le processus considéré. En effet, ce théorème est vrai pour tous les processus à trajectoires continues, même s'ils n'admettent pas un processus dual. Cela est une conséquence du théorème 2 et du fait qu'un noyau excessif est naturel si et seulement si son binoyau associé est porté par la diagonale, ce qui est vrai, dans le cas où les trajectoires sont continues, s'il ne charge pas les ensembles bipolaires. Il est donc possible qu'une hypothèse de dualité ne soit pas nécessaire pour le théorème 3.

4. REPRÉSENTATIONS DES NOYAUX EXCESSIFS

Nous avons pour les binoyaux excessifs naturels à gauche (donc pour tous les noyaux excessifs) le théorème de représentation suivant (sous les hypothèses de dualité ci-dessus).

THÉORÈME 4. — Soit M un binoyau excessif naturel à gauche. Il existe alors une bimesure σ-finie η unique, telle que l'on ait pour $f \in \mathscr{G}(E \times E)$

$$Mf = \int u(., y)f(y, z)\eta(dy, dz)$$

Démonstration. — Pour toute fonction $g \in \mathscr{G}^+(E)$, soit μ_g l'unique mesure satisfaisant à $M(1 \otimes g) = U(\mu_g)$. Le noyau $f \to M(f \otimes g)$ est un noyau excessif naturel, et on a donc, d'après les considérations qui précèdent,

$$M(f \otimes g) = U(f.\mu_g) = \int u(., y)f(y)\mu_g(dy)$$

L'application $g \to \mu_g$ étant complètement additive, il existe d'après le théorème 1 une bimesure η et une seule telle que

$$\mu_g(f) = \eta(f \otimes g) \qquad \text{pour } f \in \mathscr{G}^+(E),\ g \in \mathscr{G}^+(E)$$

Mais alors la formule précédente s'écrit

$$M(f \otimes g) = \int u(., y)f(y)g(z)\eta(dy, dz)$$

et un argument de classes monotones entraîne l'énoncé.

Soit η' une seconde bimesure satisfaisant à l'énoncé, et soit, pour $g \in \mathscr{G}^+(E)$, μ'_g la mesure définie par $\mu'_g(f) = \eta'(f \otimes g)$. Nous avons alors

$$M(f \otimes g) = U(f.\mu'_g) = U(f.\mu_g)$$

Il en résulte que $\mu'_g = \mu_g$, et enfin que $\eta' = \eta$.

En particulier nous avons, d'après le théorème 3, que M est le bipotentiel d'une fonctionnelle additive si et seulement si η ne charge pas les ensembles bipolaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ce travail a été financé par le Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Mexique). Il a fait l'objet d'une note aux *C. R.* sans démonstration, t. **272**, 15 février 1971, p. 494-497.

[2] M. J. SHARPE, *Discontinuous additive functionals of dual processes* (à paraître).

[3] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, *Markov processes and potentiel theory*, p. 155, New York, Academic Press, 1968.

[4] Ph. MORANDO, Mesures aléatoires, Séminaire de Probabilités III, Université de Strasbourg, *Lecture Notes in M.*, t. **88**, 1969, p. 221.

[5] J. AZEMA, *Ann. Inst. Fourier*, t. **19**, 1970, p. 505.

[6] *Idem* que [3], p. 5.

[7] Il suffit même que λU soit une mesure de référence. Voir la démonstration ci-dessous.

[8] D. REVUZ, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **148**, 1970, p. 517.

[9] P. A. MEYER, Processus de Markov : la frontière de Martin, *Lecture Notes in M.*, t. **77**, Berlin-Heidelberg, New York, Springer, 1968, p. 151.

(Manuscrit reçu le 10 avril 1973).