ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MONIQUE LAFON

Géométries combinatoires finies

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 4 (1972), p. 307-317
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_4_307_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 4, 1972, p. 307-317.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Géométries combinatoires finies

par

Mme Monique LAFON
U. E. R. de Mathématiques,
Université Paul Sabatier, 31-Toulouse.

RÉSUMÉ. — Nous construisons tout d'abord la géométrie combinatoire complémentaire d'une géométrie combinatoire donnée de matrice d'incidence N. N* est la matrice d'incidence de cette nouvelle géométrie.

Puis nous démontrons que, partant de deux géométries combinatoires de matrices d'incidences N_1 et N_2, on peut construire deux nouvelles géométries ayant respectivement pour matrice d'incidence

$$N_1 \otimes N_2$$

et

$$N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$$

Nous étudions un type de géométrie *stable* pour cette dernière opération.

1. INTRODUCTION

Dans [*4*], nous avons associé à l'algèbre des nombres triaux sur le corps des entiers modulo 2 une géométrie à partir d'un ensemble de points et d'un ensemble de droites satisfaisant à des relations d'incidence. Les caractéristiques de cette géométrie étaient les suivantes :

1) nombre de points : 112
2) nombre de droites : 112
3) toute droite contient 12 points distincts ;
4) tout point appartient à 12 droites distinctes ;
5) par deux points distincts, il passe soit une droite, soit deux droites, soit quatre droites ;

6) étant donné un point quelconque ξ, il existe 96 points η tels que par ξ et η passe une seule droite, 12 points η tels que par ξ et η passent exactement deux droites, 3 points η tels que par ξ et η passent exactement quatre droites.

Nous nous proposons d'introduire ici les géométries combinatoires qui comprennent comme cas particulier le cas étudié ci-dessus et de montrer comment, à partir de deux telles géométries, on peut en obtenir d'autres.

2. DÉFINITION D'UNE GÉOMÉTRIE COMBINATOIRE

Définition

Une *géométrie combinatoire* est définie par un ensemble fini S dont les éléments sont appelés *points* et un sous-ensemble $\underline{D}$ de l'ensemble $\underline{P}(S)$ des parties de S dont les éléments sont appelés les *droites* de la géométrie vérifiant les axiomes suivants :

1) toute droite contient k points distincts et k seulement ;
2) tout point appartient à r droites distinctes et r seulement ;
3) il existe 3 points non alignés ;
4) par deux points distincts il passe λ_i droites ($i = 1, \ldots, s$), $\lambda_i \geqslant 1$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$;
5) pour tout point ξ, il existe n_i points η tels que par ξ et η passent λ_i droites ($i = 1, \ldots, s$).

Dans ces conditions, si v est le cardinal de S et b celui de $\underline{D}$, un dénombrement conduit aux égalités

$$vr = bk$$
$$v = 1 + \Sigma_{i=1}^{s} n_i$$
$$r(k-1) = \Sigma_{i=1}^{s} \lambda_i n_i$$

Cette définition généralise les (k, r) plans combinatoires étudiés par M. Lesieur.

Matrices d'incidence

A une géométrie combinatoire, on peut associer une matrice N, appelée *matrice d'incidence*, comme suit : on indexe les points de 1 à v, les droites de 1 à b.

La matrice N est la matrice (a_{ij}) à v lignes et b colonnes où $a_{ij} = 1$ si le point d'indice i appartient à la droite d'indice j et $a_{ij} = 0$ sinon. Une telle matrice est telle que la somme des éléments de chaque ligne (resp. chaque colonne est r (resp. k)). Il est faux que toute matrice dont les éléments sont des 0 ou des 1 et possédant la propriété ci-dessus soit une matrice d'incidence.

Une géométrie combinatoire sera désignée dans la suite par les paramètres $(v, b, r, k, \lambda_i, n_i)$. Toutefois la donnée de tels paramètres satisfaisant aux relations écrites plus haut ne définit pas forcément une géométrie combinatoire. Mais l'existence d'une telle géométrie est équivalente à la possibilité d'expliciter une matrice d'incidence, d'où la nécessité de construire une telle matrice.

Géométrie complémentaire

PROPOSITION 1

Soit N *la matrice d'incidence d'une géométrie combinatoire. La matrice* $N^* = J - N$, *où* J *est la matrice à v lignes et b colonnes dont tous les éléments sont des 1, est la matrice d'incidence d'une géométrie combinatoire dite complémentaire de la géométrie initiale, et dont les paramètres sont les suivants :*

$$\textit{nombre de points } b^* = v$$
$$\textit{nombre de droites } v^* = b$$

Toute droite contient $r^* = v - k$ *points*

Tout point appartient a $k^* = b - r$ *droites.*

Par deux points distincts il passe $\lambda_i^* = b - 2r + \lambda_i$ *droites* $(i = 1, \ldots, a)$. *Ainsi la complémentaire de la géométrie combinatoire* $(v, b, r, k, \lambda_i, n_i)$ *est la géométrie* $(b, v, v - k, b - r, b - 2r + \lambda_i, n_i)$.

Exemple

Soit la géométrie $v=6$, $b=8$, $k=3$, $r=4$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $n_1=3$, $n_2=2$ de matrice d'incidence

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et de droites} \quad \begin{matrix} (1, 2, 3), (1, 2, 5) \\ (1, 4, 6), (1, 3, 4) \\ (2, 3, 6), (2, 4, 5) \\ (3, 5, 6), (4, 5, 6) \end{matrix}$$

La géométrie complémentaire est la géométrie $v^* = 8$, $b^* = 6$, $k^* = 3$, $r^* = 4$, $\lambda_1^* = 2$, $\lambda_2^* = 1$, $n_1^* = 3$, $n_2^* = 2$ de matrice d'incidence

$$N^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et de droites} \quad (4, 5, 6), (3, 4, 6), (2, 3, 5)$$

3. COMPOSITION DES GÉOMÉTRIES

1. Proposition 2

Soient deux géométries combinatoires $(v_1, b_1, r_1, k_1, \lambda'_i, n'_i)$ *et* $(v_2, b_2, r_2, k_2, \lambda''_j, n''_j)$ *admettant respectivement pour matrices d'incidence* N_1 *et* N_2.

La matrice produit tensoriel $N = N_1 \otimes N_2$ *est une matrice d'incidence définissant une géométrie combinatoire dite produit ayant pour caractéristiques*

$$\begin{aligned} b &= b_1 b_2 \\ v &= v_1 v_2 \\ r &= r_1 r_2 \\ k &= k_1 k_2 \\ \mu_j &= r_1 \lambda''_j \quad (j = 1, \ldots, t) \\ \mu_{t+i} &= r_2 \lambda'_i \quad (i = 1, \ldots, s) \\ \mu_{t+s+ij} &= \lambda'_i \lambda''_j \\ n_j &= n''_j \quad (j = 1, \ldots, t) \\ n_{t+i} &= n'_i \quad (i = 1, \ldots, s) \\ n_{t+s+ij} &= n'_i n''_j \end{aligned}$$

où certaines des μ_u *peuvent être égaux.*

— Une démonstration directe de cette proposition sera exposée dans le 2.

Exemples : $v_1 = b_1 = 6$, $r_1 = 2$, $k_1 = 3$, $\lambda'_1 = 2$, $\lambda''_1 = 1$, $n'_1 = 1$, $n''_1 = 4$.

La matrice d'incidence est

$$N_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Les droites de la géométrie sont, avec des notations évidentes (1, 2, 3) ; (1, 2, 4) ; (1, 5, 6) ; (2, 5, 6) ; (3, 4, 5) ; (3, 4, 6)

$$v_2 = b_2 = 3, \; r_2 = k_2 = 2, \; \lambda_2 = 1$$

La matrice d'incidence est

$$N_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Les droites de la géométrie sont (1, 2) ; (1, 3) ; (2, 3).

La matrice $N_1 \circ N_2$ est

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & 0 & 0 \\
\hline
\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} \\
\hline
0 & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & 0 & 0 & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} \\
\hline
0 & 0 & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix}
\end{array}\right|$$

Les caractéristiques de la géométrie produit sont :

$$v = b = 18,\ r = 4,\ k = 6,\ \mu'_1 = 2,\ \mu'_2 = 2.2 = 4,\ \mu'_3 = 2.1 = 2,\ \mu'_4 = 2.1 = 2,$$
$$\mu'_5 = 1.1 = 1,\ \nu'_1 = 2,\ \nu'_2 = 1,\ \nu'_3 = 4,\ \nu'_4 = 2,\ \nu'_5 = 2.4 = 8$$
$$n_1 = \nu'_1 + \nu'_3 + \nu'_4 = 8$$
$$n_2 = \nu'_4 = 2$$
$$n_3 = \nu'_5 = 8$$

Les droites de la géométrie sont :

(1, 2, 4, 5, 7, 8)	(1, 2, 13, 14, 16, 17)	(7, 8, 10, 11, 13, 14)
(1, 3, 4, 6, 7, 9)	(1, 3, 13, 15, 16, 18)	(7, 9, 10, 12, 13, 15)
(2, 3, 5, 6, 8, 9)	(2, 3, 14, 15, 17, 18)	(8, 9, 11, 12, 14, 15)
(1, 2, 4, 5, 10, 11)	(4, 5, 13, 14, 16, 17)	(7, 8, 10, 11, 16, 17)
(1, 3, 4, 6, 10, 12)	(4, 6, 13, 15, 16, 18)	(7, 9, 10, 12, 16, 18)
(2, 3, 5, 6, 11, 12)	(5, 6, 14, 15, 17, 18)	(8, 9, 11, 12, 17, 18)

Remarque. — Un problème intéressant est celui de la recherche des géométries indécomposables.

2. **Résultat principal : étude d'une « somme » de géométries combinatoires**

THÉORÈME

Soient deux géométries combinatoires $(v_1, b_1, r_1, k_1, \lambda'_i, n'_i)$ et $(v_2, b_2, r_2, k_2, \lambda''_j, n''_j)$ *admettant respectivement pour matrices d'incidence* N_1 *et* N_2. *Soient* N_1^* *et* N_2^* *les matrices d'incidence des géométries complémentaires.*

La matrice

$$N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$$

est la matrice d'incidence d'une géométrie combinatoire dont les caractéristiques sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned}
v &= v_1 v_2 \\
b &= b_1 b_2 \\
r &= r_1 r_2 + (b_1 - r_1)(b_2 - r_2) \\
k &= k_1 k_2 + (v_1 - k_1)(v_2 - k_2) \\
\nu_j &= (b_1 - r_1)(b_2 - 2r_2) + b_1 \lambda''_j \qquad (j = 1, \ldots, t) \\
\nu_{t+i} &= (b_2 - r_2)(b_1 - 2r_1) + b_2 \lambda'_i \qquad (i = 1, \ldots, s) \\
\nu_{t+s+i+j} &= \lambda'_i \lambda''_j + (r_2 - \lambda''_j)(r_1 - \lambda'_i) + (b_2 - 2r_2 + \lambda''_j)(b_1 - 2r_1 + \lambda'_i) \\
&\quad + (v_1 + 2r_1 - k_1 - b_1 - \lambda'_i)(v_2 + 2r_2 - k_2 - b_2 - \lambda''_j) \\
n_j &= n''_j \\
n_{t+i} &= n'_i \\
n_{t+s+ij} &= n'_i n''_j
\end{aligned}$$

a) Bien que la somme de deux matrices d'incidence ne soit pas en général une matrice d'incidence, il en est ainsi pour la somme N des deux matrices $N_1 \otimes N_2$ et $N_1^* \otimes N_2^*$. Considérons, en effet, un élément de la matrice N_1 :

α) si c'est 0, il est remplacé dans $N_1 \otimes N_2$ par la matrice nulle à v_2 lignes et b_2 colonnes ;

il lui correspond l'élément 1 dans N_1^* et cet élément est remplacé par N_2^* dans $N_1^* \otimes N_2^*$.

Donc l'élément 0 de N_1 est remplacé dans N par la matrice N_2^*.

β) On verrait de même qu'un élément 1 de N_1 est remplacé dans N par la matrice N_2.

Il en résulte que N est une matrice de 0 et de 1 à v lignes et b colonnes avec $v = v_1 v_2$ (nombre de points de la géométrie), $b = b_1 b_2$ (nombre de droites de la géométrie);

chaque ligne de N_1 contient r_1 fois l'élément 1, donnant lieu à r_1 occurences de N_2 et chaque ligne de N_1 contient $(b_1 - r_1)$ fois l'élément 0, donnant lieu à $(b_1 - r_1)$ occurences de N_2^*. La somme des éléments de chaque ligne sera donc

$$r = r_1 r_2 + (b_1 - r_1)(b_2 - r_2)$$

Un décompte analogue montre que

$$k = k_1 k_2 + (v_1 - k_1)(v_2 - k_2)$$

b) Nous allons maintenant déterminer les différentes catégories de droites. Pour cela nous allons étudier d'abord $N_1 \otimes N_2$. Prenons deux points distincts ξ et η de la géométrie de matrice d'incidence $N_1 \otimes N_2$ et cherchons le nombre de droites passant par ξ et η.

α) Supposons qu'ils proviennent du même point de la géométrie N_1. Cet élément étant répété r_1 fois dans la ligne, il a été remplacé par la matrice N_2 ; par ces deux points distincts dans la géométrie N_2 passent donc λ_j'' droites distinctes.

Donc, dans ce cas, dans la géométrie $N_1 \otimes N_2$, il passe $r_1 \lambda_j''$ droites distinctes par les deux points ξ et η.

β) Supposons qu'ils proviennent de deux points distincts de N_1 mais du même point de N_2. L'élément de N_2 est répété r_2 fois dans la ligne. Par les deux points distincts de N_1 passent λ_i' droites distinctes.

Donc, dans ce cas, dans la géométrie $N_1 \otimes N_2$, il passe $r_2 \lambda_i'$ droites distinctes par les deux points ξ et η.

γ) Supposons qu'ils proviennent de deux points distincts de N_1 et de deux points distincts de N_2.

Par les deux points distincts de N_1 passent λ_i' droites distinctes. Par les deux points distincts de N_2 passent λ_j'' droites distinctes. Donc, dans ce cas, dans la géométrie $N_1 \otimes N_2$, il passe $\lambda_i\lambda_j'$ droites distinctes par les deux points ξ et η.

Etudions maintenant $N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$. Introduisons les notations évidentes r_1^*, r_2^*, $\lambda_i'^*$, $\lambda_j''^*$.

Prenons deux points distincts de la géométrie N, ξ et η, et étudions le nombre de droites passant par ξ et η dans cette géométrie.

α) Ils proviennent du même point de N_1 et donc du même point de N_1^*. Alors

$$\begin{aligned} v_j &= r_1\lambda_j'' + r_1^*\lambda_j''^* \\ &= r_1\lambda_j'' + (v_1 - k_1)(b_2 - 2r_2 + \lambda_j'') \qquad (j = 1, \ldots, t) \end{aligned}$$

β) Ils proviennent de deux points distincts de N_1 (donc de N_1^*) mais du même point de N_2 (donc de N_2^*)

$$\begin{aligned} v_{t+i} &= r_2\lambda_i' + r_2^*\lambda_i'^* \\ &= r_2\lambda_i' + (v_2 - k_2)(b_1 - 2r_1 + \lambda_i') \qquad (i = 1, \ldots, s) \end{aligned}$$

γ) Ils proviennent de deux points distincts de N_1 et deux points distincts de N_2. Nous allons d'abord déterminer le nombre de droites distinctes passant par ξ et η, en supposant que ces droites proviennent d'une colonne présentant deux 1 comme éléments engendrant ξ et η. Il y a λ_i' colonnes ainsi dans N_1 et, chaque 1 étant remplacé par N_2, il y a finalement $\lambda_i'\lambda_j''$ droites de ce type.

Déterminons le nombre de droites distinctes passant par ξ et η, en supposant que ces droites proviennent d'une colonne présentant deux 0 comme éléments engendrant ξ et η. A ces deux éléments correspondent deux 1 dans N_1^* qui sont remplacés par N_2^*. Il y a $\lambda_i'^*$ colonnes ainsi dans N_1^* et λ_j'' dans N_2^*.

Donc il y a $\lambda_i'^*\lambda_j''^*$ droites de ce type, soit $(b_1 - 2r_1 + \lambda_i)(b_2 - 2r_2 + \lambda_j'')$.

Supposons maintenant que ces droites proviennent d'un 1 et d'un 0 dans cet ordre de N_1. Le 1 est remplacé par N_2 et le 0 par N_2^*. Il nous faut donc déterminer combien de fois apparaissent au rang ξ mod (v_2) et η mod (v_2) 1 et 0 ensembles dans la même colonne de N_2 ; c'est $(r_2 - \lambda_j'')$, puis 1 et 0 ensembles dans la même colonne de N_1 ; c'est $(r_1 - \lambda_i')$. Finalement il y a $(r_1 - \lambda_i')(r_2 - \lambda_j'')$ droites de ce type.

Supposons que ces droites proviennent d'un 0 et d'un 1 (dans cet ordre) de N_1. Un calcul analogue montre qu'il existe $(r_1^* - \lambda_i'^*)(r_2^* - \lambda_j''^*)$ droites de ce type.

Le nombre total de droites passant par les deux points distincts et est la somme de ces 4 nombres, d'où le résultat annoncé.

3. Cas particulier : un type de géométrie stable pour l'opération

Dans [5], Silitto a étudié les blocks designs qui correspondent à des géométries combinatoires avec $\lambda_i = \lambda$ et $b = 4(r - \lambda) \qquad (i = 1)$.

Soient deux géométries $(v_1, 4(r_1 - \lambda_1), r_1, k_1, \lambda_1)$ et $(v_2, 4(r_2 - \lambda_2), r_2, k_2, \lambda_2)$. Pour la géométrie correspondant à la matrice

$$N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$$

on a

$$\begin{aligned} v_1 &= (4(r_1 - \lambda_1) - r_1)(4(r_2 - \lambda_2) - 2r_2) + b_1\lambda_2 \\ &= 6r_1r_2 - 8r_1\lambda_2 - 8r_2\lambda_1 + 12\lambda_1\lambda_2 = \lambda \end{aligned}$$

et on vérifie de même que $v_2 = v_3 = \lambda$ en sorte que la géométrie de matrice d'incidence N est du même type que les géométries initiales et

$$\begin{aligned} r &= r_1r_2 + 16(r_1 - \lambda_1)(r_2 - \lambda_2) \\ b &= 16(r_1 - \lambda_1)(r_2 - \lambda_2) = 4(r - \lambda) \end{aligned}$$

Ce type de géométrie est donc stable par l'opération envisagée.

4. Exemple de construction d'une géométrie par cette méthode

Soient la géométrie $(v_1 = b_1 = 3, r_1 = k_1 = 2, \lambda' = 1)$ de matrice d'incidence

$$N_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et la géométrie $(v_2 = b_2 = 5, r_2 = k_2 = 3, \lambda_1'' = 2, \lambda_2'' = 1, n_1'' = n_2'' = 2)$ de matrice d'incidence

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La géometrie composée a pour matrice d'incidence

$$N = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

Les paramètres de cette géométrie sont

$$v = b = 15$$
$$r = k = r_1 r_1 + (b_1 - r_1)(b_2 - r_2) = 8$$
$$v_j = (b_1 - r_1)(b_2 - 2r_2) + b_1 \lambda_j'' \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 2 \end{cases}$$
$$v_3 = (b_2 - r_2)(b_1 - 2r_1) + b_2 \lambda_i' = 3$$
$$v_{3+ij} = \lambda_i' \lambda_j'' + (r_2 - \lambda_j'')(r_1 - \lambda_i') + (b_2 - 2r_2 + \lambda_j'')(b_1 - 2r_1 + \lambda_i') + (v_1 + 2r_1 - k_1 - b_1 \lambda_i')(v_2 + 2r_2 - k_2 - b_2 + \lambda_j'')$$

soit
$$v_4 = 5\,; \quad v_5 = 5$$

Remarquons que $v_1 = v_5 = 5$ en sorte que nous n'obtenons que quatre types distincts de droites. Le nombre de points correspondants est

$$n_1 = n_1'' = 2$$
$$n_2 = n_2'' = 2$$
$$n_3 = n_1' = 2$$
$$n_4 = n_1' n_1'' = 4$$
$$n_5 = n_1' n_2'' = 4$$

et, en définitive, $s_1 = n_1 + n_5 = 6$, $n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = 4$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CRAPO et G. ROTA, Combinatorial geometres. University of Waterloo and MIT, déc. 1968.
[2] P. DEMBOWSKI, Finite Geometries. *Ergebnisse der Math.*, **44**, 1968.
[3] MARSHALL HALL Jr., Combinatorial Theory. Gmn Blausdell.
[4] M. LAFON, Construction d'une géométrie projective finie sur une algèbre. *J. de Math. Pures et Appliquées*, 1968.
[5] G. P. SILLITO, An extension property of a class of. B. BD *Biometitra*, Vol. **44**, p. 278.
[6] M. N. VARTAK, in on application of Kronecker product of matrices to statistical designs. *Ann. Math. Statistics*, Vol. **26**, n° 3, p. 420.

(Manuscrit reçu le 12 mars 1971).