

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. ROUDIER

Chaîne de Markov μ -continue à l'infini

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n° 3 (1972), p. 241-248

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_3_241_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Chaîne de Markov μ -continue à l'infini

par

J. ROUDIER

Recherche Opérationnelle et Informatique.

Institut de Recherche des Transports, 2, Avenue du Général Malleret-Joinville.

B. P. 28. 94-Arcueil.

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous nous intéressons à une chaîne de Markov qui, partant de tout état x , quitte presque sûrement en un temps fini la partie singulière par rapport à la mesure initiale μ de la probabilité de transition : une telle chaîne est dite μ -continue à l'infini et constitue une généralisation des chaînes dont la probabilité de transition est μ -continue.

On montre que le fait d'être μ -continue à l'infini est équivalent à l'absolue continuité, sur la σ -algèbre stationnaire de l'espace des trajectoires, des probabilités \mathbb{P}_x (qui correspond à l'état initial x) par rapport à \mathbb{P}_μ (qui correspond à la mesure initiale μ).

Alors la σ -algèbre des événements invariants contenus dans la partie conservatrice de l'espace des états est atomique.

SUMMARY. — In this article, our main purpose is to generalize the case of a μ -continuous Markov chain: a chain will be said asymptotic μ -continuous if, for all state x , the singular part of the n -step transition probability converges to 0 as n increases.

We show the equivalence between asymptotic μ -continuity and the following condition about the invariant σ -algebra: for all state x , the probability \mathbb{P}_x (corresponding to an initial distribution ε_x) is absolutely continuous relative to the probability \mathbb{P}_μ (corresponding to the initial distribution μ).

Under this condition, the σ -algebra of all closed subsets of the conservative part of the state space is atomic.

I. DONNÉES

Nous considérons une probabilité de transition $P = P(x, dy)$ sur un espace mesurable à base dénombrable (E, \mathcal{F}) .

Nous noterons $P^n(x, dy)$ les itérés de P , définies par la formule de récurrence :

$$\text{pour } A \in \mathcal{F} \quad P^{n+1}(x, A) = \int_E P(x, dy)P^n(y, A)$$

Pour toutes les interprétations probabilistes, nous utiliserons la suite $(X_n, n \in \mathbb{N})$ des applications coordonnées de l'espace des trajectoires $(\Omega, \mathcal{A}) = (E, \mathcal{F})^{\otimes \mathbb{N}}$ dans (E, \mathcal{F}) . Si μ est une probabilité sur (E, \mathcal{F}) , \mathbb{P}_μ et \mathbb{P}_x désigneront les probabilités uniques sur (Ω, \mathcal{A}) pour lesquelles $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition P et respectivement de loi initiale μ et d'état initial x . On a en particulier les relations :

$$\text{pour } B \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_\mu(B) = \int_E \mu(dx)\mathbb{P}_x(B)$$

$$\begin{aligned} \text{pour } x \in E, A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}_x(X_n \in A) &= P^n(x, A) \\ \mathbb{P}_\mu(X_0 \in A) &= \mu(A) \end{aligned}$$

Dans toute la suite, nous prendrons pour μ une probabilité telle que si A , élément de \mathcal{F} , est μ -négligeable,

$$\mu P(A) = \int_E \mu(dx)P(x, A) = 0.$$

Alors, si $\mu(A) = 0$, $P^n(x, A)$ est nul sauf sur un ensemble μ -négligeable.

Nous noterons θ l'opérateur translation sur (Ω, \mathcal{A}) défini par :

$$\omega \in \Omega \quad X_n \circ \theta(\omega) = X_{n+1}(\omega) \quad (\forall_N \geq 0).$$

La sous σ -algèbre de \mathcal{A} des événements invariants par θ est appelée σ -algèbre des événements stationnaires et notée \mathcal{S} .

II. PARTIE RÉGULIÈRE ET PARTIE SINGULIÈRE DE LA PROBABILITÉ DE TRANSITION

On peut décomposer la probabilité de transition $P^n(x, dy)$ en ses parties régulière et singulière par rapport à μ :

$$P^n(x, dy) = p_n(x, y)\mu(dy) + P_1^n(x, dy)$$

$P_1^n(x, dy)$ est une mesure singulière de support N_x^n , μ -négligeable. Posons $N_x = \bigcup_n N_x^n$: c'est aussi un ensemble μ -négligeable. Comme \mathcal{F} est à base dénombrable, on peut trouver une version de $p_n(x, y)$ qui soit bi-mesurable (cf. [2], p. 612) : c'est une telle version que nous prendrons dans la suite.

Pour A fixé dans \mathcal{F} ,

$$P_1^n(x, A) = P^n(x, A) - \int_A p_n(x, y)\mu(dy)$$

est une fonction \mathcal{F} -mesurable. C'est le cas en particulier de

$$g_n(x) = P_1^n(x, N_x) = P_1^n(x, E) = P^n(x, N_x)$$

Soit A dans \mathcal{F} ; par la propriété de Markov

$$P^{n+m}(x, A) = \int_E P^n(x, dy)P^m(y, A)$$

Décomposons $P^m(y, A)$ en $\int_A p_m(y, z)\mu(dz) + P^m(y, A \cap N_y)$; il vient :

$$P^{n+m}(x, A) = \int_E P^n(x, dy) \int_A p_m(y, z)\mu(dz) + \int_E P^n(x, dy)P^m(y, A \cap N_y).$$

Décomposons de même $P^n(x, dy)$; il vient alors

$$P^{n+m}(x, A) = \int_{N_x} P^n(x, dy)P^m(y, A \cap N_y) + \int_E p_n(x, y)\mu(dy)P^m(y, A \cap N_y) + \int_E P^n(x, dy) \int_A p_m(y, z)\mu(dz).$$

Si $\mu(A) = 0$, on a

$$\int_A p_m(y, z)\mu(dz) = 0 \quad \forall y \in E$$

et $P^m(y, A \cap N_y)$ est nul p. s. car $0 \leq P^m(y, A \cap N_y) \leq P^m(y, A)$.

Il reste alors que

$$P^{n+m}(x, A) = \int_{N_x} P^n(x, dy)P^m(y, A \cap N_y).$$

En particulier :

$$P^{n+m}(x, N_x) = \int_{N_x} P^n(x, dy)P^m(y, N_x \cap N_y);$$

d'où il résulte que $g_{n+m}(x) \leq g_n(x)$. Posons $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow g_n(x)$.

PROPOSITION 1. — *La fonction g est une fonction positive, bornée par 1, telle que*

$$g(x) \leq \int_E P(x, dy)g(y) \quad \forall x \in E$$

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned} g(x) \leq g_{n+1}(x) &= P^{n+1}(x, N_x) = \int_{N_x} P(x, dy)P^n(y, N_x \cap N_y) \\ &\leq \int_{N_x} P(x, dy)P^n(y, N_y) \leq \int P(x, dy)g_n(y) \end{aligned}$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on a $g(x) \leq \int P(x, dy)g(y)$. ■

Considérons d'autre part l'événement stationnaire suivant :

$$A_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ X_n \in N_x \}.$$

Cet événement A_x représente l'ensemble des trajectoires qui vont une infinité de fois dans l'ensemble N_x .

PROPOSITION 2. — a) *Pour $n < m$ et x dans E :*

$$\{ X_m \in N_x \} \subset \{ X_n \in N_x \} \quad \mathbb{P}_x\text{-p. s.}$$

$$b) \quad g(x) = \mathbb{P}_x(A_x) \quad \forall x \in E$$

La proposition 2 s'interprète simplement de la façon suivante : si, partant de x , la chaîne se trouve à l'instant n dans la partie singulière N_x , elle s'y trouvait presque sûrement à tous les instants antérieurs à n ; $g(x)$ est la probabilité que la chaîne, partant de x , reste tout le temps dans la partie singulière N_x .

Démonstration. — a) Calculons $\mathbb{P}_x(X_n \notin N_x; X_m \in N_x)$ en utilisant la propriété de Markov

$$\mathbb{P}_x(X_n \notin N_x; X_m \in N_x) = \int_{N_x^c} P^n(x, dy)P^{m-n}(y, N_x)$$

Comme $\mu(N_x) = 0$, on a $P^{m-n}(y, N_x) = 0$ μ -p. s.

Sur N_x^c , $P^n(x, dy)$ est absolument continue par rapport à μ , de densité $p_n(x, y)$. Ainsi

$$\mathbb{P}_x(X_n \notin N_x; X_m \in N_x) = \int_{N_x^c} p_n(x, y)\mu(dy)P^{m-n}(y, N_x) = 0$$

b) Par définition $A_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m \in N_x\}$; mais d'après (a)

$$A_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow \{X_n \in N_x\} \text{ } \mathbb{P}_x\text{-p. s.}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(A_x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(X_n \in N_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, N_x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

III. CHAÎNE μ -CONTINUE A L'INFINI

DÉFINITION. — Nous dirons que la chaîne est μ -continue à l'infini si $g(x) = 0$ quel que soit x dans E .

THÉORÈME 1. — Soit x appartenant à E . Alors la condition « $g(x) = 0$ » est équivalente à « \mathbb{P}_x absolument continue par rapport à \mathbb{P}_μ sur \mathcal{S} ».

Démonstration. — La démonstration va être basée sur une identité. Soit A un événement stationnaire tel que $\mathbb{P}_\mu(A) = 0$; alors

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}_x(A \cap A_x) \quad \forall x \in E$$

Calculons $\mathbb{P}_x(A \cap A_x^c)$. Nous avons

$$A_x^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \notin N_x\} \quad \mathbb{P}_x\text{-p. s. ;}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(A \cap A_x^c) &= \mathbb{P}_x\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \notin N_x\}\right)\right) \\ &\leq \sum_n \mathbb{P}_x(A \{X_n \notin N_x\}). \end{aligned}$$

Comme A est stationnaire, $A = \theta^{-n}(A)$: cela permet de calculer chaque terme en appliquant la formule de Markov.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x[A \cap \{X_n \notin N_x\}] &= \mathbb{P}_x[\theta^{-n}(A) \cap \{X_n \notin N_x\}] \\ &= \int_{N_x^c} P^n(x, dy)\mathbb{P}_y(A). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}_\mu(A) = 0$, on a $\mathbb{P}_y(A) = 0$ (μ -p. s.); or sur N_x^c , $P^n(x, dy)$ est absolument continue par rapport à μ , de densité $p_n(x, y)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}_x[A \cap \{X_n \notin N_x\}] = \int_{N_x^c} p_n(x, y) \mu(dy) \mathbb{P}_y(A) = 0,$$

ce qui permet de trouver la formule annoncée.

— Si $g(x) = 0$; soit A stationnaire tel que $\mathbb{P}_\mu(A) = 0$

$$0 \leq \mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}_x(A \cap A_x) \leq \mathbb{P}_x(A_x) = g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_x \ll \mathbb{P}_\mu \quad \text{sur} \quad \mathcal{S}.$$

— Si $\mathbb{P}_x \ll \mathbb{P}_\mu$ sur \mathcal{S} : A_x est un événement stationnaire \mathbb{P}_μ -négligeable car N_x est μ -négligeable. Dans ces conditions $g(x) = \mathbb{P}_x(A_x) = 0$. ■

COROLLAIRE. — *La chaîne est μ -continue à l'infini si et seulement si, quel que soit x dans E , \mathbb{P}_x est absolument continue par rapport à \mathbb{P}_μ sur la σ -algèbre \mathcal{S} des événements stationnaires.*

IV. σ -ALGÈBRE INVARIANTE D'UNE CHAÎNE μ -CONTINUE A L'INFINI

Appelons C et D les parties conservative et dissipative de l'espace des états E (cf. [3], p. 178 et suiv.). L'hypothèse que la chaîne est μ -continue à l'infini donne une structure particulière à la σ -algèbre \mathcal{C} des événements de C invariants : rappelons qu'un événement B contenu dans C appartient à \mathcal{C} si $P(x, B) = 1_B(x)$ sur C et seulement si $P(x, B) = 1_B(x)$ sur B .

THÉORÈME 2. — *Si la chaîne est μ -continue à l'infini, la σ -algèbre \mathcal{C} des événements invariants est atomique.*

Démonstration. — Soit A un sous-ensemble de C , invariant, non atomique tel que $\mu(A) > 0$. Pour tout entier n , il existe une partition $E_1^{(n)}, \dots, E_{k_n}^{(n)}$ de A dans \mathcal{C} telle que

$$0 < \mu(E_i^{(n)}) \leq \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, k_n.$$

On peut même supposer ces partitions croissantes avec n . Comme A et $E_i^{(n)}$ sont des ensembles invariants, pour tout entier m supérieur à 1, on a

$$\begin{aligned} P^m(x, E_i^{(n)}) &= 1_{E_i^{(n)}}(x) \quad \text{sur} \quad C && (\mu\text{-p. s.}), \\ P^m(x, A) &= 1_A(x) \quad \text{sur} \quad C && (\mu\text{-p. s.}). \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_A P^m(x, A)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_A P^m(x, E_i^{(n)})\mu(dx) \\ \mu(A) &= \sum_{i=1}^{k_n} \int_{E_i^{(n)}} \mu(dx)P^m(x, E_i^{(n)}). \end{aligned}$$

Si nous calculons chaque terme en utilisant la décomposition :

$$P^m(x, E_i^{(n)}) = P_1^m(x, E_i^{(n)}) + \int_{E_i^{(n)}} p_m(x, y)\mu(dy),$$

nous obtenons que

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{E_i^{(n)} \times E_i^{(n)}} p_m(x, y)\mu(dx)\mu(dy) + \sum_{i=1}^{k_n} \int_{E_i^{(n)}} \mu(dx)P_1^m(x, E_i^{(n)}).$$

De $0 \leq P_1^m(x, E_i^{(n)}) \leq P^m(x, E_i^{(n)})$, on déduit que

$$\begin{aligned} P_1^m(x, E_i^{(n)}) &= 0 \text{ sur } C - E_i^{(n)} && (\mu\text{-p. s.}), \\ P_1^m(x, A) &= 0 \text{ sur } C - A && (\mu\text{-p. s.}). \end{aligned}$$

Posons $B_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} E_i^{(n)} \times E_i^{(n)}$: les B_n forment une suite décroissante d'ensembles dans $(E^2, \otimes^2 \mathcal{F})$, de limite B^∞ .

Nous avons la relation :

$$\mu(A) = \int_{B_n} p_m(x, y)\mu(dx)\mu(dy) + \int_A P_1^m(x, A)\mu(dx)$$

et, par passage à la limite,

$$\mu(A) = \int_{B^\infty} p_m(x, y)\mu(dx)\mu(dy) + \int_A P_1^m(x, A)\mu(dx).$$

Or

$$(\mu \otimes \mu)(B_n) = \sum_{i=1}^{k_n} (\mu \otimes \mu)(E_i^{(n)} \times E_i^{(n)}) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(E_i^{(n)}) = \frac{1}{n} \mu(A) \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Par suite $(\mu \otimes \mu)(B^\infty) = 0$ et $\int_{B^\infty} p_m(x, y)\mu(dx)\mu(dy) = 0$. Il reste donc que

$$\mu(A) = \int_A \mu(dx)P_1^m(x, A) \leq \int_A \mu(dx)g_m(x)$$

Les fonctions $g_m(x)$ décroissent vers 0 par hypothèse ; donc

$$\int_A \mu(dx) g_m(x) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad \text{et} \quad \mu(A) = 0$$

Il y a contradiction avec le fait que $\mu(A) > 0$; ce qui montre que \mathcal{C} est atomique. ■

Remarque. — Un cas particulier de ce qui précède est celui d'une chaîne de Markov μ -continue où $P(x, dy)$ est absolument continue par rapport à μ pour tout x de E : alors $g_1(x) = 0$. C'est ce cas particulier qu'étudie Shu-Teh-Moy dans [5].

RÉFÉRENCES

- [1] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Note sur la mesure invariante des processus de Markov récurrents. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. III, n° 4, 1967.
- [2] DOOB, *Stochastic processes*. Wiley and Sons, 1953.
- [3] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, Paris, 1963.
- [4] S. OREY, *Lecture Notes on limit theorem for Markov chain Transition Probability functions*. University of Minnesota, 1968.
- [5] SHU-TEH-MOY, λ -continuous Markov chains. *T. A. M. S.*, t. 117, n° 5, 1965, p. 68-91.

(Manuscrit reçu le 14 février 1972).