ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN LARISSE

Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, III

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n° 3 (1972), p. 229-240
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_3_229_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 3, 1972, p. 229-240. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Marches au hasard sur les demi-groupes discrets, III

par

Jean LARISSE
Euratom-Cetis. Ispra (Varese). Italie

INTRODUCTION

Cette étude fait suite aux deux précédentes [*7*], dont nous utilisons les notations et définitions. Ici, nous nous intéressons à la norme de convergence λ des matrices de transitions des marches unilatères et bilatère, dont nous donnons les propriétés. En particulier, nous montrons que si on se limite à un demi-groupe complètement simple S(G) et à une certaine classe de lois-produits, l'égalité $\lambda = 1$ équivaut à l'existence d'une moyenne invariante sur G, ce qui équivaut aussi à l'existence d'une moyenne invariante à droite (à gauche) sur les idéaux minimums à gauche (à droite) de S(G). Ce résultat étend aux demi-groupes complètement simples celui obtenu dans le cas des groupes [*4*, *5*].

Si M est une matrice de transitions de probabilités, on définit

$$\lambda(s, s') = \overline{\lim_{n \to \infty}} \, [m^{(n)}(s, s')]^{\frac{1}{n}}.$$

Cette limite existe toujours puisque $0 \leqslant m^{(n)}(s, s') \leqslant 1$, et c'est l'inverse du rayon de convergence de la série

$$\mathrm{M}(z\,;\, s, s') = \sum_{n=0}^{\infty} m^{(n)}(s, s') z^n, \qquad z \text{ réel positif.}$$

Nous désignerons par $\lambda_d(\mathrm{P}\,;\, s, s')$ la valeur de ce paramètre correspondant à une matrice de transitions de marche au hasard à droite définie par la distribution de probabilité P(A) chargeant tout A engendrant le demi-groupe S. Les définitions $\lambda_g(P ; s, s')$ pour la marche à gauche et $\Lambda(P ; s, s')$ pour la marche bilatère sont analogues.

Il est clair qu'en général $\lambda_d(P ; s, s') \neq \lambda_g(P ; s, s')$. Il suffit que S possède un élément neutre $e' \in A$ d'un côté, à droite par exemple, et ne possède pas d'élément neutre de l'autre côté. On a alors :

$$\lambda_d(P ; s, s) \geqslant p(e') \qquad \text{et} \qquad \lambda_g(P ; s, s) = 0.$$

LEMME III.1. — *i*) S'il existe un élément neutre à droite pour s de la forme asb, avec $a, b \in S \cup \emptyset$, $\emptyset$ étant l'élément vide, on a

$$\lambda_d(P ; s, s) = \overline{\lim_n} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

ii) S'il existe un élément neutre à gauche pour s de la forme $a'sb'$, avec $a', b' \in S \cup \emptyset$, on a

$$\lambda_g(P ; s, s) = \overline{\lim_n} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

iii) Si $s = a'sb'sasb$, avec $a', b', a, b \in S \cup \emptyset \mid a'sb' \mid = \mid asb \mid, \mid f \mid =$ longueur du mot $f \in S$, on a

$$\Lambda(P ; s, s) = \overline{\lim_n} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{2}{n}}.$$

En particulier, la conjonction des conditions *i*) et *ii*) entraîne *iii*) et dans ce cas on a

$$\lambda_d(P ; s, s) = \lambda_g(P ; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P ; s, s).$$

Démonstration. — Pour tout $s \in S$, et pour un m fini tel que $P^{(m)}(s) > 0$, on a

$$P^{(n+m)}(s) \geqslant P^{(m)}(s) m_d^{(n)}(s, s)$$

donc

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}} \geqslant \lambda_d(P, s, s).$$

Si, de plus, pour un $s \in S$, il existe $t = asb$; $a, b \in S$, tel que $s = st = sasb$, on a, pour $P^{(r_1)}(a) > 0$, $P^{(r_2)}(b) > 0$

$$m_d^{(r_1+n+r_2)}(s, s) \geqslant P^{(r_1)}(a) P^{(n)}(s) P^{(r_2)}(b)$$

puis

$$\lambda_d(P ; s, s) \geqslant \overline{\lim_n} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}},$$

d'où le résultat si $a, b \in S$. Les cas $a = \emptyset$, $b = \emptyset$, $a = b = \emptyset$ sont immédiats, et également le cas à gauche.

Supposons, maintenant, que pour $a, b, a', b' \in S \cup \emptyset$, $|asb| = |a'sb'|$ on ait $s = a'sb'sasb$. De $P^{(r_1)}(a')$, $P^{(r_2)}(b')$, $P^{(r_3)}(a)$, $P^{(r_4)}(b) > 0$,

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = m_0,$$

on tire

$$P^{(2n+m)}(s) \geqslant P^{(m)}(s) m_{dg}^{(n)}(s, s) \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \, [P^{(2n)}(s)]^{\frac{1}{2n}} \geqslant \Lambda^{\frac{1}{2}}(P ; s, s),$$

et aussi

$$m_{dg}^{(m_0+n)}(s, s) \geqslant P^{(r_1)}(a') P^{(n)}(s) P^{(r_2)}(b') P^{(r_3)}(a) P^{(n)}(s) P^{(r_4)}(b),$$

puis

$$\Lambda(P ; s, s) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{2}{n}},$$

d'où l'égalité du cas *iii*).

En particulier, si les conditions *i*) et *ii*) sont remplies, on a

$$s = a'sb'sasb = (a'sb')^n s (asb)^{n'},$$

n et n' entiers positifs quelconques et pour $n = |a'sb'|$, $n' = |asb|$ on est ramené à la condition *iii*). On a alors

$$\lambda_d(P ; s, s) = \lambda_g(P ; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P ; s, s)$$

Examinons alors le cas d'un état s essentiel dans une, ou plusieurs marches définies par P(A), et montrons que dans chaque cas le lemme III.1 est applicable.

i) s est essentiel bilatère, donc $s = a'sb'sasb$, avec $a', b', a, b \in S \cup \emptyset$ $|asb| = |a'sb'|$. Par conséquent,

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}(P ; s, s) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

ii) s est essentiel à droite, donc $s = sasb$; $a, b \in S \cup \emptyset$. Mais s est alors aussi essentiel bilatère (chap. I). Dès lors,

$$\lambda_d(P ; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P ; s, s) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

iii) Le raisonnement correspondant au cas à gauche donne

$$\lambda_g(P ; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P ; s, s) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

iv) Si s est essentiel à droite et aussi à gauche, ce qui équivaut à $s \in S(G)$, on obtient alors

$$\lambda_d(P ; s, s) = \lambda_g(P ; s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(P ; s, s) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \, [P^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(P ; s, s).$$

On remarquera que cette dernière égalité est aussi vraie dans un cas plus général. Supposons, en effet, que $s = sxs$ pour un $x \in \mathrm{S}$ (s est régulier au sens de [*1*], et on sait que tout $s \in \mathrm{S(G)}$ est régulier). Faisant $a = x$, $b = \emptyset$ ou bien $a' = \emptyset$, $b' = x$, les conditions *i*) et *ii*) du lemme III.1 sont satisfaites, donc aussi la condition *iii*).

Résumons les résultats obtenus :

PROPOSITION III.1. — *i*) Si s est essentiel bilatère, on a

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}\,;\, s, s) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [\mathrm{P}^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

ii) Si s est essentiel à droite, donc essentiel bilatère, on a

$$\lambda_d(\mathrm{P}\,;\, s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}\,;\, s, s) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [\mathrm{P}^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}$$

iii) Si s est essentiel à gauche, donc essentiel bilatère, on a

$$\lambda_g(\mathrm{P}\,;\, s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}\,;\, s, s) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [\mathrm{P}^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}}.$$

iv) Si $s = sxs$ pour un $x \in \mathrm{S}$, et, en particulier, si $s \in \mathrm{S(G)}$ ce qui équivaut à s essentiel à droite et aussi à gauche, on a

$$\lambda_d(\mathrm{P}\,;\, s, s) = \lambda_g(\mathrm{P}\,;\, s, s) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}\,;\, s, s) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [\mathrm{P}^{(n)}(s)]^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\mathrm{P}\,;\, s, s).$$

Lorsqu'une matrice de transitions M sur les états S d'un processus markovien est irréductible, ce qui équivaut au fait que S est la classe essentielle du processus, des inégalités classiques :

$$m^{(k+\nu+n)}(s, s) \geqslant m^{(k)}(s, s')m^{(\nu)}(s', s')m^{(n)}(s', s)$$
$$m^{(n+\nu+k)}(s', s') \geqslant m^{(n)}(s', s)m^{(\nu)}(s, s)m^{(k)}(s, s')$$
$$m^{(k+\nu)}(s, s') \geqslant m^{(k)}(s, s')m^{(\nu)}(s', s')\,; \quad m^{(\nu+n)}(s, s) \geqslant m^{(\nu)}(s, s')m^{(n)}(s', s)$$
$$m^{(n+\nu)}(s', s) \geqslant m^{(n)}(s', s)m^{(\nu)}(s, s)\,; \quad m^{(\nu+k)}(s', s') \geqslant m^{(\nu)}(s', s)m^{(k)}(s, s'),$$

on déduit aisément que $\lambda(\mathrm{P}\,;\, s, s')$ ne dépend pas de $s, s' \in \mathrm{S}$. Pour cette raison, on conviendra de définir $\lambda(\mathrm{P}, s, s)$ « norme de convergence » de la matrice M [*11*]. En particulier, si M est la matrice de transitions d'une marche à droite sur une classe essentielle R_i du demi-groupe S, $\lambda(\mathrm{P}, s, s)$, $s \in \mathrm{R}_i$ sera la norme de convergence de la classe essentielle R_i. La même remarque vaut évidemment pour toutes les autres classes essentielles unilatères et bilatères.

THÉORÈME III.1. — Les classes essentielles bilatères, lorsqu'elles existent, ont la même norme de convergence $\Lambda(\mathrm{P})$. Les classes essentielles à droite (à gauche), lorsqu'elles existent, ce qui entraîne l'existence de classes essentielles bilatères, ont la même norme de convergence $\lambda_d(\mathrm{P})$, $(\lambda_g(\mathrm{P}))$, et on a

$$\lambda_d(\mathrm{P}) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}), \qquad (\lambda_g(\mathrm{P}) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P})).$$

Si, de plus, S possède un idéal minimum qui soit complètement simple S(G), alors

$$\lambda_d(\mathrm{P}) = \gamma_g(\mathrm{P}) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}) = \lambda(\mathrm{P}).$$

Démonstration. — Soient R et R′ ($\neq$ R) deux classes essentielles distinctes dans la marche à droite sur S. On sait [*1*] que $s \in \mathrm{R}'$ entraîne $s\mathrm{R} = \mathrm{R}'$. De $sx = s' \in \mathrm{R}'$, $x \in \mathrm{R}$, on tire alors

$$m_d^{(n)}(s, s') \geqslant \mathrm{P}^{(n)}(x)$$
$$\Rightarrow \lambda_d(\mathrm{P}\,; s, s') = \lambda_d(\mathrm{P}\,; s, s) \geqslant \lambda_d(\mathrm{P}\,; x, x) \quad \text{(Proposition III.1).}$$

De $s''\mathrm{R}' = \mathrm{R}$, $s'' \in \mathrm{R}$, on déduit l'inégalité inverse $\lambda_d(\mathrm{P}\,; x, x) \geqslant \lambda_d(\mathrm{P}\,; s, s)$.

Le cas à gauche se discute de manière analogue. On déduit le résultat annoncé dans le cas bilatère en tenant compte de l'inégalité du théorème I.4

$$\mathrm{P}^{(r_1)}(i_1)\mathrm{P}^{(n_1)}(s_1)\mathrm{P}^{(n_2)}(s_2)m_{dg}^{(n)}(i_2, i_2)\mathrm{P}^{(n_x)}(x)\mathrm{P}^{(n_y)}(y) \leqslant \mathrm{P}^{(r_1)}(i_1)m_{dg}^{(m+n)}(i_1, i_1),$$

et de l'inégalité inverse obtenue en permutant i_1 et i_2.

D'autre part, et d'après la Proposition III.1, l'existence d'une classe essentielle à droite, ou à gauche, suffit pour entraîner les égalités

$$\lambda_d(\mathrm{P}) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}), \qquad \text{ou} \qquad \lambda_g(\mathrm{P}) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P})$$

respectivement.

Si S possède un $\mathrm{S(G)} = \bigcup_i \mathrm{R}_i = \bigcup_j \mathrm{L}_j$, de ce qui précède on tire

$$\lambda_d(\mathrm{P}) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{P}) = \lambda_g(\mathrm{P}) = \lambda(\mathrm{P}). \quad \blacksquare$$

Bien que nous n'aurons pas à utiliser le résultat qui suit, nous pensons intéressant de noter un autre cas de l'égalité $\Lambda = \lambda_d\lambda_g$ pour une chaîne markovienne sur un ensemble quelconque d'états.

Supposons, en effet, une chaîne markovienne réversible, à droite dont la matrice de transitions, irréductible, est W. Suivant Kendall [*3*], on peut toujours lui associer une mesure sous-invariante, c'est-à-dire une suite $\{ m_i \}$ de nombre réels positifs et finis tels que

$$\sum_i m_i w_{ij} \leqslant m_j \qquad \text{pour chaque } j \text{ et } w_{ij} = \|\mathrm{W}\|_{ij}\,;$$

(dans le cas de l'égalité on dira que la mesure est invariante). W peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} &\mathrm{W} = \mathrm{DTD}^{-1} \text{ avec} \\ &\mathrm{D} = \text{matrice diagonale d'élément } \|\mathrm{D}\|_{ii} = m_i^{-1/2} \\ &\mathrm{T} = \text{opérateur de contraction de l'espace de Hilbert.} \end{aligned}$$

T est hermitique si et seulement si il existe une mesure par rapport à laquelle W est réversible :

$$m_i w_{ij} = m_j w_{ji} \qquad \text{pour tout } i \text{ et } j,$$

cette mesure étant alors invariante.

On remarque que : si deux chaînes markoviennes, l'une à droite, l'autre à gauche, définies sur le même espace, réversibles par rapport à la même mesure, dont les matrices de transitions irréductibles ont le même support ($w_{d;ij} > 0 \Leftrightarrow w_{g;ij} > 0$), commuttent, alors la norme de convergence Λ du processus bilatère dont la matrice de transitions est $\mathrm{W}_{dg} = \mathrm{W}_d . \mathrm{W}_g$ $(= \mathrm{W}_g \mathrm{W}_d)$ vérifie la relation :

$$\Lambda = \lambda_d . \lambda_g$$

En effet, on a :

$$\mathrm{W}_d = \mathrm{DT}_d\mathrm{D}^{-1}\,; \qquad \mathrm{W}_g = \mathrm{DT}_g\mathrm{D}^{-1}.$$

Par définition, $\mathrm{W}_{dg} = \mathrm{W}_d\mathrm{W}_g = \mathrm{W}_g\mathrm{W}_d$, ce qui entraîne

$$\mathrm{W}_{dg} = \mathrm{DT}_d\mathrm{T}_g\mathrm{D}^{-1} = \mathrm{DT}_g\mathrm{T}_d\mathrm{D}^{-1}\,; \quad \mathrm{T}_{dg} = \mathrm{T}_d\mathrm{T}_g = \mathrm{T}_g\mathrm{T}_d\,; \quad \mathrm{W}_{dg} = \mathrm{DT}_{dg}\mathrm{D}^{-1}.$$

Les deux opérateurs linéaires bornés T_d et T_g commutant, les rayons spectraux r_d, r_g et r_{dg} de T_d, T_g et T_{dg} respectivement vérifient, l'inégalité [9] :

$$r_{dg} \leqslant r_d . r_g \Big(r = \lim_{n\to\infty} \|\mathrm{T}^n\|^{\frac{1}{n}}, \qquad \|\mathrm{T}^n\| = \text{norme de } \mathrm{T}^n\Big).$$

D'autre part, T_d étant hermitique, on a la représentation spectrale :

$$\|\mathrm{T}_d^{(n)}\|_{ij} = \int_{\lambda'_d}^{\lambda_d} \mu^n d\sigma_{d;ij}(\mu)\,;$$

$\sigma_d(\mu) =$ matrice spectrale, $[\lambda'_d\,;\,\lambda_d]$ spectre réel de T_d ; puis

$$w_{d;ij}^{(n)} = \left(\frac{m_j}{m_j}\right)^{1/2} \int_{\lambda'_d}^{\lambda_d} \mu^{(n)} d\sigma_{d;ij}(\mu).$$

On a un résultat identique pour T_g et T_{dg}. W_d et W_g ayant le même support ont la même période v.

Il suit de [4] que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ [w_{d;ii}^{(n)}]^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [t_{d;ii}^{(n)}]^{\frac{1}{n}} = \lambda_d = r_d.$$

Mais on sait [6] que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ [t_{d;ii}^{(n)}]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\ [t_{d;ii}^{(n\nu)}]^{\frac{1}{n\nu}}.$$

Ces remarques valent pour W_g et W_{dg}. On obtient alors de $w_{dg;ii}^{(n)} \geqslant w_{d;ii}^{(n)} w_{g;ii}^{(n)}$ l'inégalité inverse $r_{dg} \geqslant r_d . r_g$, ce qui établit le résultat.

Il se pose ensuite le problème des relations qui pourraient exister entre la norme de convergence λ(S, P) des classes essentielles unilatères du demi-groupe S, et la norme de convergence $\lambda(G, Q_1)$ du sous-groupe G de S. Il est clair qu'il faut, de plus, définir les deux distributions P(A) et Q_1(B) dont il s'agit. Pour établir le résultat principal de ce chapitre, nous n'aurons à nous intéresser qu'aux cas où ces deux normes sont égales. Nous allons montrer qu'il suffit pour cela de définir Q_1(B) et P(A) comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent. Les résultats préliminaires que nous établierons ne sont donc que des conséquences du chapitre II.

De l'inégalité, établie dans [7, II]

$$P^{(r)}(e_{11})P^{(n)}(e_{11})P^{r}(e_{11}) \leqslant P^{(r)}(e_{11})Q^{(n)}(\overline{e})P^{(r)}(e_{11}) \leqslant \Sigma \left\{ P^{(n+2r)}(s)/s \in N \right\}$$

on déduit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ [P^{(n)}(e_{11})^{\frac{1}{n}}] \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [Q^{(n)}(\overline{e})]^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\ [\Sigma P^{(n+2r)}(s)/s \in N]^{\frac{1}{n}}.$$

Puisque chaque série $\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(s)z^n$, $s \in N$, a le même rayon de convergence $\lambda^{-1}(P)$, lorsque N est fini, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \Sigma \left\{ P^{(n)}(s)/s \in N \right\} z^n$ aura aussi $\lambda^{-1}(P)$ comme rayon de convergence.

Donc, on a

$$\lambda(S, P) = \lambda(G/N, Q).$$

D'autre part, de l'existence de l'homomorphisme $\varphi : G \to G/N$, nous savons définir, chapitre II, une distribution $Q_1(B_1)$ chargeant B_1 engendrant G à partir d'une distribution Q(B) chargeant B engendrant G/N et inversement. Entre Q_1 et Q nous avons la relation

$$Q^{(n)}(\overline{e}) = \Sigma \left\{ Q^{(n)}(g)/g \in \varphi^{-1}(\overline{e}) = N \right\}.$$

Pour la même raison que précédemment nous aurons

$$\lambda(G/N, Q) = \lambda(G, Q_1) \qquad \text{donc aussi} \qquad \lambda(S, P) = \lambda(G, Q_1).$$

Ainsi, pour tout couple de distributions P(A) et $Q_1(B_1)$ déduites l'une de l'autre au moyen des homomorphismes $\theta : S \to G/N$ et $\varphi : G \to G/N$ on a le

THÉORÈME III.2. — *Lorsque le sous-groupe* N *de* G *engendré par* JI *est fini, on a* :

$$\lambda(S, P) = \lambda(G, Q_1).$$

THÉORÈME III.3. — *Dans les conditions du Théorème* II.3, *on a*

$$\lambda(S, P) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, [m^{*(n)}(\bar{u}, \bar{v})]^{\frac{1}{n}}$$

pour une classe essentielle unilatère, et l'égalité correspondante dans le cas bilatère.

Démonstration. — Des inégalités *i*) et *ii*) [7, page 145] la deuxième étant écrite dans le cas où la distribution initiale est P(A), en appliquant la Proposition III.1 et le Théorème III.1, on obtient :

$$i) \qquad q(\bar{u})m^{*(n)}_{\bar{u}\,\bar{v}}P^{(r)}(1) \leqslant \sum_j P(u_j)m^{(n+r)}_{u_j,v_1} \leqslant P^{(n+r+1)}(v_1)$$

d'où

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, [m^{*(n)}_{\bar{u}\,\bar{v}}]^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, [P^{(n+r+1)}(v_1)]^{\frac{1}{n}} = \lambda(S, P),$$

puis

$$ii) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, [m^{*(n)}_{\bar{u}\,\bar{v}}]^{\frac{1}{n}} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, [m^{(n)}_{u_j,v_1}]^{\frac{1}{n}} = \lambda(S, P)$$

i) et *ii*) établissent le Théorème dans le cas à droite. Les cas à gauche et bilatère se discutent de manière analogue. ■

Dans le cas des demi-groupes complètement simples S(G), et des lois produits $P_1(I) \times P_2(\bar{A}) \times P_3(J)$ on a le

COROLLAIRE III.2. — *Dans les conditions de la Proposition* II.5,

$$\lambda[S(G); P_1 \times P_2 \times P_3] = \lambda[G; P_{31} * P_2].$$

Démonstration. — Elle résulte du Théorème III.3 et de la Proposition II.5, ou même directement des inégalités établies dans la démonstration de cette Proposition. ■

Enfin, dans le cas $S(G) = G/N \times T$, on obtient

COROLLAIRE III.3. — Dans les conditions de la Proposition II.8, on a

$$\lambda(S, Q) = \lambda(G/N, P_1) \times \lambda(T, P_2).$$

Démonstration. — On sait [6] que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, m^{(n)}(s, s) = \lim\limits_{n\to\infty} m^{(nd)}(s, s)$ où d est la période de l'état s. Dès lors si d_1 et d_2 sont celles des marches unilatères sur G/N et T respectivement, de $q^{(n)}(e_{11}, e_{11}) = m_1^{(n)}(\bar{e}, \bar{e}) \times m_2^{(n)}(t_{11}, t_{11})$ on tire :

$$\lambda(S, Q) = \lim_{n\to\infty} [q^{(nd_1d_2)}(e_{11}, e_{11}]^{\frac{1}{nd_1d_2}} = \lim_{n\to\infty} \left[m_1^{(nd_1d_2)}(\bar{e}, \bar{e})\right]^{\frac{1}{nd_1d_2}}$$
$$\times \lim_{n\to\infty} \left[m_2^{(nd_1d_2)}(t_{11}, t_{11})\right]^{\frac{1}{nd_1d_2}} = \lambda(G/N, P_1).\lambda(T, P_2) \quad \blacksquare$$

Lorsqu'on se limite à la classe C_1 des distributions symétriques Q(B) chargeant les éléments d'un ensemble générateur de B de G, ($q(g) = q(g^{-1})$; $\forall g \in B$) Kesten [4] a montré que si $\lambda(G, Q) = 1$ pour un $Q \in C_1$ alors cette égalité vaut pour tout $Q \in C_1$, ce que l'on exprimera par la notation $\lambda(G) = 1$. De plus, dans [5] le même auteur a montré que l'égalité $\lambda(G) = 1$ équivaut à l'existence sur G d'une moyenne invariante, c'est-à-dire d'une fonctionnelle L sur l'espace C(G) de toutes les fonctions réelles bornées sur G vérifiant :

— $\inf\limits_{x\in G} f(x) \leqslant Lf \leqslant \sup\limits_{x\in G} f(x)$, $f(x), g(x) \in C(G)$.
— $L\{ f(yxz) \} = L\{ f(x) \}$ pour tout $y, z \in G$.
— $L\{ \alpha f \} = \alpha Lf$, α réel.
— $L\{ f + g \} = Lf + Lg$ (notations de [5]).

Nous avons vu dans la démonstration du Corollaire II.2 qu'il est toujours possible de construire sur S(G) une classe C_2 de lois produits $P(S) = P_1(I) \times P_2(D) \times P_3(J)$ classe pour laquelle, d'après le Corollaire III.2, on a $\lambda[S(G), P] = \lambda(G, Q)$, $Q \in C_1$. Il suit alors que si $\lambda[S(G), P] = 1$ pour un $P \in C_2$, l'égalité vaut pour tout $P \in C_2$, ce que nous noterons $\lambda[S(G)] = 1$, et on a alors le

THÉORÈME III.4. — Pour la classe C_2 des lois produits, $\lambda[S(G)] = 1$ si et seulement si G admet une moyenne invariante.

Mais il faut remarquer que contrairement au cas des groupes, $\lambda[S(G)] = 1$ n'équivaut pas, en général, à l'existence d'une moyenne invariante sur S(G). En effet, faisant G fini, $|I| = |J| = 2$, S(G) est alors fini et $\lambda[S(G)] = 1$, or, d'après Rosen [*10*] S(G) n'admet pas de moyenne invariante. Cependant on a le :

COROLLAIRE III.4. — $\lambda[S(G)] = 1$ équivaut à l'existence d'une moyenne invariante à gauche sur R_i, à droite sur L_j pour tout $i \in I$, $j \in J$.

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'une moyenne invariante sur G équivaut à l'existence d'une moyenne invariante à gauche sur R_i, à droite sur L_j.

Considérons le cas de L_1. L_1 est simplifiable à droite ($s_1, s_2, s \in L_1$ et $s_1 s = s_2 s \Rightarrow s_1 = s_2$). D'après le Corollaire III.6 de Namioka [*8*], si L_1 admet une moyenne invariante à droite, alors F étant un sous-ensemble fini arbitraire de $H_{11} = G$, et k un nombre tel que $0 < k < 1$, il existe un sous-ensemble fini A tel que, pour chaque $s \in F$ on ait :

$$c(As \cap A) \geqslant kc(A), \; c(A) = \text{nombre d'éléments de A}.$$

Désignons l'ensemble des éléments de A par

$$A = \{(i\bar{a}(i, n)1)\}, \qquad i \in I_0 \text{ fini}, \qquad n \in N(i) \text{ fini pour chaque } i.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} As \cap A &= \left\{ \bigcup_{i \in I_0} \bigcup_{n \in N(i)} (i\bar{a}(i, n)1).(1\bar{s}1) \right\} \cap \left\{ \bigcup_{i' \in I_0} \bigcup_{n' \in N(i')} (i'\bar{a}(i', n')1) \right\} \\ &= \bigcup_{i \in I_0} \left\{ \bigcup_{n, n' \in N(i)} (i\bar{a}(i, n)\bar{s} \cap \bar{a}(i, n')1) \right\} \\ &= \bigcup_{i \in I_0} (i\bar{A}_i s \cap \bar{A}1), \qquad (\text{où } \bar{A}_i \text{ est la trace de A dans } R_i) \\ &\subset \bigcup_{i \in I_0} (i\bar{A}\,\bar{s} \cap \bar{A}1). \end{aligned}$$

Donc

$$c(As \cap A) \leqslant \sum_{i \in I_0} (ic(\bar{A}\,\bar{s} \cap \bar{A})1) = c(I_0) \times c(\bar{A}\,\bar{s} \cap \bar{A}),$$

et puisque $c(A) \geqslant c(\bar{A})$, nous avons

$$c(I_0) \times c(\bar{A}\,\bar{s} \cap \bar{A}) \geqslant c(As \cap A) \geqslant kc(A) \geqslant kc(\bar{A}),$$

$$c(\bar{A}\,\bar{s} \cap \bar{A}) \geqslant \frac{k}{c(I_0)} c(\bar{A}).$$

Mais la condition sur k et l'inégalité $1 \leqslant c(\mathrm{I}_0) < \infty$ entraînent

$$0 \leqslant k/c(\mathrm{I}_0) = k' < 1,$$

et

$$c(\bar{\mathrm{A}}\,\bar{s} \cap \bar{\mathrm{A}}) \geqslant k'c(\bar{\mathrm{A}}).$$

La même inégalité vaut pour tout $s \in \mathrm{F}$, puisque k et $c(\mathrm{I})$ ne dépendent pas de s. Donc

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} c(\bar{\mathrm{A}}\,\bar{s}_\nu \cap \bar{\mathrm{A}}) \geqslant k'c(\bar{\mathrm{A}}) \qquad \text{avec} \qquad s_\nu \in \mathrm{F},\ c(\mathrm{F}) = n,$$

Nous avons montré qu'il existe k', $0 < k' < 1$ tel que pour un sous-ensemble fini arbitraire d'éléments F de G, il existe un sous-ensemble fini $\bar{\mathrm{A}}$ de G tel que l'inégalité précédente soit vérifiée. Par application de la condition suffisante, et d'ailleurs aussi nécessaire, de Folner [2], G admet une moyenne invariante.

Inversement supposons un tel G, et soit $b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{S(G)}$ un sous-ensemble fini d'éléments non nécessairement distincts. Les b_ν et c_ν, $v = 1, \ldots, n$, sont de la forme

$$b_\nu = (i_\nu \bar{b}_\nu 1)$$
$$c_\nu = (i'_\nu \bar{c}_\nu 1).$$

Posons $\bar{a}_\nu = \bar{b}_\nu(\bar{c}_\nu)^{-1}$. Alors [2], il existe k, $0 < k < 1$ tel que pour $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$, il existe un sous-ensemble fini $\bar{\mathrm{A}}$ de G pour lequel vaut l'inégalité :

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} c(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{A}}\,\bar{a}_\nu) \geqslant kc(\bar{\mathrm{A}}).$$

Mais alors

$$c(\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{A}}\,\bar{a}_\nu) = c[\bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{A}}\,\bar{b}_\nu(\bar{c}_\nu)^{-1}] = c[\bar{\mathrm{A}}\,\bar{c}_\nu \cap \bar{\mathrm{A}}\,\bar{b}_\nu] = c[\bar{\mathrm{A}}b_\nu \cap \bar{\mathrm{A}}c_\nu],$$

donc

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} c(\bar{\mathrm{A}}c_\nu \cap \bar{\mathrm{A}}b_\nu) \geqslant kc(\bar{\mathrm{A}}),$$

et d'après le Théorème 4.1 de [8] L_1 admet une moyenne invariante à droite.

Le cas de R_1 se démontre avec les inégalités correspondantes

$$c(sA \cap A) \geqslant kc(A),$$

$$n^{-1}\sum_{v=1}^{n} c(c_v\bar{A} \cap b_v\bar{A}) \geqslant kc(\bar{A}),$$

et le raisonnement s'étend à tout R_i, $i \in I$ et tout L_j, $j \in J$, en prenant pour F et E les ensembles d'idempotents de R_i et L_j respectivement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, The Algebraic Theory of Semi-Groups. *Am. Math. Soc.*, vol. **1**, 1961.

[2] E. FOLNER, On groups with full Banach mean value. *Math. Scand.*, t. **3**, 1955.

[3] D. G. KENDALL, *Unitary dilations of markov transition operators*. Probability and Statistics, H. Cramer, 1959.

[4] H. KESTEN, Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **92**, 1959.

[5] H. KESTEN, Full Banach mean values on countable groups. *Math. Scand.*, t. **7**, 1959.

[6] J. F. C. KINGMAN, The exponential decay of markov transition probabilities. *Proc. London Math. Soc.*, t. **13** (3), 1963.

[7] J. LARISSE, Marches au hasard sur les demi-groupes discrets ; I, II. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **8** (2), 1972.

[8] I. NAMIOKA, Folner's conditions for amenable semi-groups. *Math. Scand.*, t. **15**, 1964.

[9] F. RIESZ et B. S. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthiers-Villars, Paris, 1955.

[10] W. G. ROSEN, On invariant means over compact semi-groups. *Proceed. Amer. Math. Soc.*, vol. **7**, 1956.

[11] D. VERE JONES, Geometric ergodicity in denumerable markov chains. *Quartely Journals of Math.*, t. **13**, 1962.

(Manuscrit reçu le 13 novembre 1971).