

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

NICOLE EL KAROUI

HERVÉ REINHARD

BERNARD ROYNETTE

## **Processus de Markov : retournement des trajectoires à un temps d'entrée dans un presque-borélien**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 7, n° 2 (1971), p. 131-144

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1971\\_\\_7\\_2\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_2_131_0)

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**Processus de Markov :  
retournement des trajectoires  
à un temps d'entrée  
dans un presque-borélien**

par

**Nicole EL KAROUI (\*)**, **Hervé REINHARD (\*\*)**  
et **Bernard ROYNETTE (\*)**

---

**SUMMARY.** — We show that, under certain duality hypothesis, a standard Markov process reversed to the first entry time  $T_A$  in a nearly borel set  $A$ , is a homogeneous Markov process. We give an expression of his transition semi-group. Then we give a necessary and sufficient condition so that this semi-group be the dual semi-group. The paper ends with the special case when  $T_A$  is a return time.

---

**INTRODUCTION**

Soit  $X$  un processus de Markov standard à valeurs dans  $E$ . Il est bien connu que, sous certaines hypothèses de dualité, le processus retourné à un temps  $\tau$  de retour est un processus de Markov dont le semi-groupe de transition s'exprime simplement en fonction du semi-groupe dual (voir par exemple [2] et [3]).

---

(\*) Bâtiment de Mathématiques. Faculté des Sciences, Orsay 91.

(\*\*) Laboratoire de Probabilité. Faculté des Sciences, Paris V<sup>e</sup>. Tour 56.

Soit alors  $A$  un presque-borélien,  $T_A$  le temps d'entrée dans  $A$ . Nous nous proposons de montrer que, sous les mêmes hypothèses, le processus retourné au temps  $T_A$  est un processus homogène dont nous donnons le semi-groupe de transition.

Nous nous intéressons ensuite au cas où le semi-groupe de retour est le semi-groupe dual et énonçons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Enfin, nous exprimons une condition nécessaire et suffisante pour que le temps  $T_A$  soit presque-sûrement un temps de retour.

## I. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Nous utiliserons les notations usuelles de [1]. Soient :

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in E}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$$

et

$$\hat{X} = \{ \Omega, \hat{\mathcal{F}}, (\hat{P}_x)_{x \in E}, (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, (\hat{X}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, (\hat{\theta}_t)_{t \in \mathbb{R}^+},$$

deux processus standards à valeurs dans  $E$ , dont les résolvantes seront notées respectivement  $U^\alpha, \hat{U}^\alpha$ .

Nous supposons que les processus  $X$  et  $\hat{X}$  sont en dualité au sens suivant :

- 1) il existe une mesure  $\xi, \sigma$ -finie sur  $E$  telle que  $\langle U^\alpha f, g \rangle_\xi = \langle f, \hat{U}^\alpha g \rangle_\xi$  pour toutes  $f$  et  $g$  boréliennes, bornées et pour tout  $\alpha > 0$ ;
- 2) les mesures  $f \mapsto U^\alpha f(x)$  et  $f \mapsto \hat{U}^\alpha f(x)$  sont absolument continues par rapport à  $\xi$  pour tout  $\alpha > 0$  et pour tout  $x$  de  $E$ ;
- 3) la mesure de référence  $\xi$  est de la forme  $\nu U$ , où  $\nu$  est une probabilité sur  $E$ .

Soit  $A$  un presque-borélien de  $E$ ,  $T_A$  (resp.  $\hat{T}_A$ ) le temps d'entrée du processus  $X$  (resp.  $\hat{X}$ ) dans  $A$ . Nous noterons  $X_A$  (resp.  $\hat{X}_A$ ) le processus tué de  $X$  (resp.  $\hat{X}$ ) au temps  $T_A$  (resp.  $\hat{T}_A$ ),  $U_A^\alpha$  (resp.  $\hat{U}_A^\alpha$ ) la résolvante de ce processus, i. e.

$$U_A^\alpha f(x) = E_x \int_0^{T_A} e^{-\alpha s} f(X_s) ds$$

pour  $f$  borélienne bornée ou positive  $P_t^A$  (resp.  $\hat{P}_t^A$ ) le semi-groupe de ce processus i. e.

$$P_t^A f(x) = E_x(f(X_t); t < T_A).$$

## II. LE PROCESSUS RETOURNÉ AU TEMPS $T_A$

DÉFINITION 1. — Nous définissons le processus retourné au temps  $T_A$ ,  $Y_t$  par la formule :

$$Y_t = \begin{cases} X_{(T_A(\omega)-t)^-}(\omega) & \text{si } 0 < t < T_A(\omega) \\ \delta & \text{sinon.} \end{cases}$$

LEMME 1. — Soit  $\mathcal{G}_t$  ( $t \geq 0$ ) la tribu constituée par les  $B \in \mathcal{F}$  tels que :

$$\forall u \geq 0 \quad \theta_u^{-1}(B) \cap \{t + u < T_A\} = B \cap \{t + u < T_A\}.$$

La famille de tribus  $\mathcal{G}_t$  est croissante et continue à droite et  $Y_t$  est  $\mathcal{G}_t$  mesurable.

En effet, il suffit de remarquer que  $T_A$  est le temps de mort du processus  $X_A$  et que  $Y_t$  est identique au processus retourné de  $X_A$  au temps de mort de  $X_A$ . On peut alors appliquer le lemme 3 de [2].

De même, nous montrerons le caractère homogène et markovien du processus  $Y_t$  en démontrant que le processus  $X_A$  satisfait aux hypothèses du théorème principal de [2].

Soit  $w$  une fonction excessive du processus  $\hat{X}_A$ . Soit  ${}^w\hat{P}_t$  le  $w$ -semi-groupe défini par :

$${}^w\hat{P}_t f(x) = \begin{cases} \frac{1}{w(x)} \hat{P}_t^\Delta f(x) & \text{si } w(x) \neq 0, \quad w(x) \neq \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est bien connu que  ${}^w\hat{P}_t$  est un semi-groupe sous-markovien, et qu'il existe un processus  ${}^w\hat{X}$  de markov, continu à droite, limité à gauche de semi-groupe de transition  ${}^w\hat{P}_t$  et de loi d'entrée  $(\varepsilon_x {}^w\hat{P}_t; t > 0)$ .

Nous noterons  ${}^w\hat{U}_A^\alpha$  les résolvantes associées au  ${}^w\hat{P}_t$  semi-groupe.

THÉORÈME 1. — Soit  $w(x) = \hat{E}_x(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)$   $w$  est excessive pour le processus  $\hat{X}_A$  et les résolvantes  $U_A^\alpha$  et  ${}^w\hat{U}_A^\alpha$  satisfont à la relation :

$$\langle U_A^\alpha f, g \rangle_{\nu U_A} = \langle f, {}^w\hat{U}_A^\alpha g \rangle_{\nu U_A}$$

si  $f$  et  $g$  sont universellement mesurables et positives.

$w$  est la densité de  $\nu U_A$  par rapport à  $\nu U$ .

Remarque 1. —  $\nu U$  étant  $\sigma$ -finie,  $\nu U_A$  est  $\sigma$ -finie et le théorème 1 implique que le processus  $X_A$  satisfait aux hypothèses du théorème principal de [2].

*Démonstration.*

Après avoir lu notre manuscrit, M. Walsh nous a fait remarquer que le fait de pouvoir retourner un processus au temps d'entrée dans un presque-borélien était, sans hypothèse de dualité, une conséquence de l'article de Chung et Walsh (*Acta Math.* t. 123). Nous le remercions des remarques qu'il a bien voulu nous communiquer.

### III. ÉTUDE DU SEMI-GROUPE DE RETOUR

Quand on retourne à un temps de retour, le semi-groupe de retour est égal au semi-groupe dual. Peut-il en être de même quand on retourne à  $T_A$ ? La réponse est fournie par la proposition suivante :

**THÉORÈME 3.** — Pour que le semi-groupe dual soit le semi-groupe de retour, il faut et il suffit que la fonction  $w$  ne prenne que les valeurs 0 ou 1.

Avant de prouver ce théorème, nous allons établir quelques propriétés des processus  $X$  et  $\hat{X}$ , impliquées par l'hypothèse de dualité.

**PROPOSITION 3.** —  $\hat{P}_x(\zeta < +\infty) = 1$  pour tout  $x$  de  $E$ .

En effet,  $\nu U$  étant une mesure de Radon, il existe une fonction  $g$  continue,  $g > 0$ , telle que  $\nu U(g) < +\infty$ .

Ceci implique donc que :  $\nu U(g) - \nu U^\alpha(g) \rightarrow 0$  quand  $\alpha$  tend vers zéro. D'après l'équation résolvante,  $\nu U(g) - \nu U^\alpha(g) = \nu U(\alpha U^\alpha g) = \nu U(g\alpha \hat{U}^\alpha 1)$ , d'après l'hypothèse de dualité.

Or  $\alpha \hat{U}^\alpha 1(x)$  décroît vers  $\hat{E}_x(\zeta = \infty)$  lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. Donc :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \nu U(g\alpha \hat{U}^\alpha 1) = \nu U[g\hat{E}(\zeta = \infty)] = 0.$$

$g$  étant strictement positive, ceci implique donc que :  $\hat{E}_x(\zeta = \infty) = 0$   $\nu U$  p. s. La fonction  $\hat{E}_x(\zeta = \infty)$  étant invariante, elle est donc identiquement nulle.

**PROPOSITION 4.** — Soit  $G = \{x; \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1\}$  (\*). Alors,  $P_\nu$  presque-sûrement,  $T_A \wedge T_G = 0$ .

*Démonstration :* soit  $\hat{\Phi}_A(x) = \hat{E}_x(e^{-\hat{T}_A})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous définissons  $K_\varepsilon = A \cup \{\hat{\Phi}_A < \varepsilon\}$ .

(\*) Pour la démonstration de cette proposition, nous suivrons ici [I] (p. 240 à 248). Nous reproduisons cette dernière pour des commodités de lecture.

$$\begin{aligned}
& \int v(dx)[u(x, y) - P_{T_A}u(x, y)] \\
&= \int v(dx)[u(x, y) - u\hat{P}_{\hat{T}_A}(x, y)] = \hat{P}_y(\hat{\zeta} > 0) - \hat{P}_y(\hat{T}_A < \hat{\zeta}) \\
&= \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)
\end{aligned}$$

par suite

$$vU_A(B) = \int 1_B(y)\hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)\xi(dy)$$

et

$$\xi \text{ p. s. } \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0) = \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty).$$

Soit  $w(y) = \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)$ ,  $w$  est  $A$ -coexcessive. En effet :

$$\hat{P}_t^\Lambda w(y) = \hat{E}_y[(t < \hat{T}_A w(\hat{X}_t)] = \hat{E}_y(t < \hat{T}_A \wedge \hat{\zeta}; \hat{T}_A = \infty) \leq \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)$$

et si  $t \rightarrow 0$ ,

$$\hat{P}_t^\Lambda w(y) \rightarrow \hat{E}_y(0 < \hat{\zeta} \cap \hat{T}_A = \infty) = w(y).$$

c) Montrons le théorème : soient  $f, g \in (b\mathcal{E}^*)^+$ .

$$\begin{aligned}
\langle f1_{\{w>0\}}, {}^w\hat{U}_{A\mathcal{G}}^\alpha \rangle_{vU_A} &= \langle f1_{\{w>0\}}, \hat{U}_A^\alpha(gw) \rangle_\xi = \langle U_A^\alpha(f1_{\{w>0\}}), gw \rangle_\xi \\
&= \langle U_A^\alpha(f1_{\{w>0\}}), g \rangle_{vU_A}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
& \langle f1_{\{w=0\}}, {}^w\hat{U}_{A\mathcal{G}}^\alpha \rangle_{vU_A} = 0 \\
& \langle U_A^\alpha(f1_{\{w=0\}}), g \rangle_{vU_A} \\
&= \langle f1_{\{w=0\}}, \hat{U}_A^\alpha(gw) \rangle_\xi \leq \frac{\|g\|_\infty}{\alpha} \langle f1_{\{w=0\}}, w \rangle_\xi = 0,
\end{aligned}$$

car  $w$  est  $A$ -coexcessive, donc :

$$\langle f1_{\{w=0\}}, {}^w\hat{U}_{A\mathcal{G}}^\alpha \rangle_{vU_A} = \langle U_A^\alpha f1_{\{w=0\}}, g \rangle_{vU_A} = 0.$$

Ceci entraîne que

$$\langle U_A^\alpha f, g \rangle_{vU_A} = \langle f, {}^w\hat{U}_{A\mathcal{G}}^\alpha \rangle_{vU_A}.$$

**THÉOREME 2.** — Si on munit  $\Omega$  de la loi  $P_v$ , le processus  $Y_v$  continu à droite est markovien par rapport à la famille de tribus  $\mathcal{G}_v$ , et admet  ${}^w\hat{P}_t^\Lambda$  comme semi-groupe de transition.

C'est l'application du théorème principal de [2] au processus  $X_A$ .

Après avoir lu notre manuscrit, M. Walsh nous a fait remarquer que le fait de pouvoir retourner un processus au temps d'entrée dans un presque-borélien était, sans hypothèse de dualité, une conséquence de l'article de Chung et Walsh (*Acta Math.* t. 123). Nous le remercions des remarques qu'il a bien voulu nous communiquer.

### III. ÉTUDE DU SEMI-GROUPE DE RETOUR

Quand on retourne à un temps de retour, le semi-groupe de retour est égal au semi-groupe dual. Peut-il en être de même quand on retourne à  $T_A$ ? La réponse est fournie par la proposition suivante :

**THÉORÈME 3.** — Pour que le semi-groupe dual soit le semi-groupe de retour, il faut et il suffit que la fonction  $w$  ne prenne que les valeurs 0 ou 1.

Avant de prouver ce théorème, nous allons établir quelques propriétés des processus  $X$  et  $\hat{X}$ , impliquées par l'hypothèse de dualité.

**PROPOSITION 3.** —  $\hat{P}_x(\zeta < +\infty) = 1$  pour tout  $x$  de  $E$ .

En effet,  $\nu U$  étant une mesure de Radon, il existe une fonction  $g$  continue,  $g > 0$ , telle que  $\nu U(g) < +\infty$ .

Ceci implique donc que :  $\nu U(g) - \nu U^\alpha(g) \rightarrow 0$  quand  $\alpha$  tend vers zéro. D'après l'équation résolvante,  $\nu U(g) - \nu U^\alpha(g) = \nu U(\alpha U^\alpha g) = \nu U(g\alpha \hat{U}^\alpha 1)$ , d'après l'hypothèse de dualité.

Or  $\alpha \hat{U}^\alpha 1(x)$  décroît vers  $\hat{E}_x(\zeta = \infty)$  lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. Donc :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \nu U(g\alpha \hat{U}^\alpha 1) = \nu U[g\hat{E} . (\zeta = \infty)] = 0.$$

$g$  étant strictement positive, ceci implique donc que :  $\hat{E}_x(\zeta = \infty) = 0$   $\nu U$  p. s. La fonction  $\hat{E}_x(\zeta = \infty)$  étant invariante, elle est donc identiquement nulle.

**PROPOSITION 4.** — Soit  $G = \{x; \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1\}$  (\*). Alors,  $P_\nu$  presque-sûrement,  $T_A \wedge T_G = 0$ .

*Démonstration :* soit  $\hat{\Phi}_A(x) = \hat{E}_x(e^{-\hat{T}_A})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous définissons  $K_\varepsilon = A \cup \{\hat{\Phi}_A < \varepsilon\}$ .

---

(\*) Pour la démonstration de cette proposition, nous suivrons ici [I] (p. 240 à 248). Nous reproduisons cette dernière pour des commodités de lecture.

a) Nous nous proposons de montrer que  $\forall x \in E \quad \hat{P}_x(\hat{T}_{K_\varepsilon} = \infty) = 0$ .

Soit  $b$  assez grand pour que  $e^{-b} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_A(x) &= \hat{E}_x(e^{-\hat{T}_A}) = \hat{E}_x[e^{-\hat{T}_A}; \hat{T}_A \leq b] + \hat{E}_x[e^{-\hat{T}_A}; \hat{T}_A > b] \\ &\leq \hat{P}_x(\hat{T}_A \leq b) + e^{-b}.\end{aligned}$$

Donc si  $x \in K_\varepsilon^c$ ,

$$\hat{P}_x(\hat{T}_A \leq b) \geq \hat{\Phi}_A(x) - e^{-b} > \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc puisqu'alors

$$\hat{T}_A = \hat{T}_{K_\varepsilon} \quad , \quad \hat{P}_x(\hat{T}_{K_\varepsilon} \leq b) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\hat{P}_x[\hat{T}_{K_\varepsilon} > (n+1)b] = \hat{E}_x[\hat{P}_{X_{nb}}(\hat{T}_{K_\varepsilon} > b); \hat{T}_{K_\varepsilon} > nb].$$

Or si  $nb < \hat{T}_{K_\varepsilon}$ ,  $\hat{X}_{nb} \in K_\varepsilon^c$  si  $nb < \hat{\zeta}$ . Donc :

$$\hat{P}_x[\hat{T}_{K_\varepsilon} > (n+1)b] \leq \hat{P}_x(\hat{T}_{K_\varepsilon} > nb) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et par suite

$$\hat{P}_x[\hat{T}_{K_\varepsilon} > (n+1)b] \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Ceci tend vers zéro si  $n$  tend vers  $+\infty$  donc  $\hat{P}_x(\hat{T}_{K_\varepsilon} = \infty) = 0$ .

b) Soit  $\hat{T}_n = \hat{T}_{K_{1/n}}$  où  $K_{1/n} = A \cup \left\{ \hat{\Phi}_A < \frac{1}{n} \right\}$ . La suite  $\hat{T}_n$  est une suite croissante de temps d'arrêt, tous majorés par  $\hat{T}_{A \cup G}$  puisque

$$\left\{ \hat{\Phi}_A < \frac{1}{n} \right\} \supseteq \{ \hat{\Phi}_A = 0 \} = G.$$

On se propose de montrer que si  $\hat{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{T}_n$  alors  $\hat{T} = \hat{T}_{A \cup G}$ .

Soit  $\tilde{A}$  la fermeture cofine de  $A$ . Si il existe  $n$  tel que  $\hat{X}_{\hat{T}_n} \in \tilde{A} \cup G$ , alors  $\hat{T}_n = \hat{T}_{A \cup G} = \hat{T}_m \quad \forall m \geq n$  et donc  $\hat{T} = \hat{T}_{A \cup G} = \hat{T}_{\tilde{A}} \wedge \hat{T}_G = \hat{T}_A \wedge \hat{T}_G$  puisque  $\tilde{A}$  est la fermeture cofine de  $A$ . Supposons que  $\forall n \quad \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A}$ . Alors

$$\hat{E}_{\hat{X}_{\hat{T}_n}}(e^{-\hat{T}_A}) \leq \frac{1}{n}.$$

Puisque

$$\hat{T} + \hat{T}_A \circ \hat{\theta}_{\hat{T}} \geq \hat{T}_n + \hat{T}_A \circ \hat{\theta}_{\hat{T}_n},$$



on a :

$$\begin{aligned} \hat{E}_x[e^{-\hat{T}}\hat{\Phi}_A(\hat{X}_{\hat{T}}); \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A} \quad \forall n] &= \hat{E}_x[e^{-\hat{T}+\hat{T}_A\theta_{\hat{T}}}; \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A} \quad \forall n] \\ &\leq \hat{E}_x[e^{-T_n}\hat{\Phi}_A(\hat{X}_{\hat{T}_n}); \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A}] \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Donc  $\hat{\Phi}_A(\hat{X}_{\hat{T}}) = 0$  sur l'ensemble  $\{\hat{T} < +\infty; \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A} \quad \forall n\}$ .

Sur cet ensemble  $\hat{X}_{\hat{T}} \in G$ , et donc  $\hat{T} \geq \hat{T}_{A \cup G}$ . Dans tous les cas, on a donc bien  $\hat{T} = \hat{T}_{A \cup G} = \hat{T}_{A \cup G}$ .

c) Montrons que  $P_{\nu}$  p. s.  $T_A \wedge T_G = 0$ .  $\hat{P}_x$  p. s.  $\hat{T}_n \leq \zeta < +\infty$ . Par suite,  $\hat{P}_x$  p. s.  $\hat{T} \leq \zeta < +\infty$ . Donc  $\hat{P}_x(\hat{T}_{A \cup G} = \infty) = 0 \quad \forall x \in E$ . Or :

$$\nu U_{A \cup G}(f) = \nu U(f \hat{P}_x(\zeta > 0 \cap \hat{T}_{A \cup G} = \infty)) = \nu U[f \hat{P}_x(\hat{T}_{A \cup G} = \infty)]$$

$\forall f$  borélienne bornée. Donc  $P_{\nu}$  presque sûrement  $T_{A \cup G} = T_A \wedge T_G = 0$ .

PROPOSITION 5. — Pour tout  $x$  de  $E$ ,  $P_x(T_{G^c} + T_G \circ \theta_{T_{G^c}} = +\infty) = 1$ . En effet, nous avons vu que  $G$  était absorbant pour  $\hat{X}$ . Donc :

$$\begin{aligned} u^{\alpha} \hat{P}_{G^c}^{\alpha} \hat{P}_G^{\alpha}(x, y) &= 0 \quad \forall x \quad \text{et} \quad \forall y \in E_{\Delta}, \\ \hat{E}_y[(e^{-\alpha \hat{T}_G} u^{\alpha} \hat{P}_{G^c}^{\alpha}(x, \hat{X}_{T_G}))] &= \hat{E}_y[e^{-\alpha \hat{T}_G} P_{G^c}^{\alpha} u^{\alpha}(x, \hat{X}_{T_G})] \\ &= E_x[(e^{-\alpha T_{G^c}} P_G^{\alpha} u^{\alpha}(X_{T_{G^c}}, y))] \\ &= P_{G^c}^{\alpha} P_G^{\alpha} u^{\alpha}(x, y), \end{aligned}$$

pour toute  $f$  borélienne, on a donc :

$$\begin{aligned} \int P_{G^c}^{\alpha} P_G^{\alpha} u^{\alpha}(x, y) f(y) \zeta(dy) &= P_{G^c}^{\alpha} P_G^{\alpha} U^{\alpha} f(x) \\ &= E_x \int_{T_{G^c} + T_G \circ \theta_{T_{G^c}}}^{+\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt = 0. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que pour tout  $x$  de  $E$ ,  $P_x(T_{G^c} + T_G \circ \theta_{T_{G^c}} = \infty) = 1$ .

En conséquence si  $H$  est un ensemble absorbant pour  $\hat{X}$ ,  $H^c$  est absorbant pour  $X$ .

#### IV. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

a) La condition est suffisante :

$$\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_G(x).$$

D'après la proposition 5,

$$E_x \int_{T_{G^c}}^{+\infty} 1_G(X_t) f(X_t) dt = 0.$$

Par suite,  $1_G$  étant une densité de  $\nu U_A$  par rapport à  $\nu U$  :

$$E_\nu \int_0^{T_A} f(X_t) dt = E_\nu \int_0^{T_{G^c}} f(X_t) dt$$

ce qui entraîne, pour  $f = 1_{G^c}$  que

$$E_\nu \left( \int_{T_{G^c}}^{T_A} 1_{G^c}(X_t) dt \right) = 0.$$

Or  $G^c$  est un ensemble absorbant donc,  $P_\nu$  p. s.  $T_A = T_{G^c}$ , ce qui entraîne que  $P_\nu$  presque-sûrement,

$$X_s \in G \quad \text{si} \quad s < T_A.$$

Soit  $H = \{x; \hat{P}_x \{ \hat{\zeta} = 0 \} = 1\}$ ,  $H$  est absorbant pour  $\hat{X}$ , donc  $H^c$  est absorbant pour  $X$  (cf. Proposition 5). Or  $1_{H^c}$  est égale à  $\nu U$  p. s. à 1 ce qui entraîne que  $P_\nu$  p. s.  $T_{H^c} = 0$ .

Nous pouvons donc conclure que  $P_\nu$  p. s.

$$w(X_s) = \hat{P}_{x_s}(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0) = 1 \quad \text{si} \quad s < T_A.$$

Or pour presque tout  $s$   $X_s = X_{s-}$ . Donc pour presque tout  $s$ ,  $w(X_{s-}) = 1$  si  $s < T_A$ . Montrons que la fonction  $\hat{P}_x(\hat{T}_A < +\infty)$  est coexcessive.

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(\hat{T}_A \circ \theta_t < +\infty) \\ = \hat{E}_x(t < \hat{T}_A < +\infty) + 1_{A^c} + 1_{(A^c)^c} \hat{E}_x(t \geq \hat{T}_A > 0) \leq \hat{E}_x(\hat{T}_A < +\infty) \end{aligned}$$

si  $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(t < \hat{T}_A < +\infty) &\rightarrow \hat{E}_x(0 < \hat{T}_A < +\infty) \\ \hat{E}_x(t \geq \hat{T}_A > 0) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(\hat{T}_A \circ \theta_t < +\infty) &\rightarrow \hat{E}_x(0 < \hat{T}_A < +\infty) + 1_{A^c} \\ &= \hat{E}_x(\hat{T}_A < +\infty). \end{aligned}$$

Par suite  $\hat{P}_x(\hat{\zeta} > 0) - \hat{P}_x(\hat{T}_A < +\infty)$  est continue à gauche sur les trajectoires. i. e. que  $s \rightarrow w(X_{s-}) = \hat{P}_{x_s}(\hat{\zeta} > 0 \cap \hat{T}_A = \infty)$  est continue à gauche. Donc  $w(X_{s-}) = 1$  si  $s < T_A$ .

On en déduit alors que :

$$\frac{1}{w(X_{(T_A-t)-})} \hat{P}_v^A(fw)(X_{(T_A-t)-}) = \hat{E}_{X_{(T_A-t)-}}[f(\hat{X}_v(\cdot; \hat{T}_A = \infty \cap \nu < \hat{\zeta})] P_\nu \text{ p. s.}$$

puisque

$$X_{(T_A-t)-} \in G = \hat{E}_{X_{(T_A-t)-}}[f(\hat{X}_v)] = \hat{P}_v f(X_{(T_A-t)-}) P_\nu \text{ p. s.}$$

b) *Réciproquement.* Supposons que :

$$P_v \text{ p. s. } \frac{1}{w(X_{(T_A-t)^-})} \hat{P}_v^A[f w](X_{(T_A-t)^-}) = \hat{P}_v f(X_{(T_A-t)^-})$$

Soit  $x$  un point tel que :

$$\frac{1}{w(x)} \hat{P}_v^A(f w)(x) = \hat{P}_v f(x).$$

$w(x) \neq 0$ , sinon  $\hat{P}_v f(x) = 0$  pour toute  $f$  ce qui est absurde. On a donc :

$$\hat{E}_x[f(\hat{X}_v); \hat{T}_A = \infty \cap v < \hat{\zeta}] = \hat{E}_x(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0) \hat{E}_x[f(\hat{X}_v)]$$

puisque  $w(x) \neq 0$ ,  $x \in H^c = \{x; \hat{P}_x(\hat{\zeta} > 0) = 1\}$  donc cette égalité s'écrit :

$$\hat{E}_x[f(\hat{X}_v); \hat{T}_A = \infty] = \hat{E}_x(\hat{T}_A = \infty) \hat{E}_x[f(\hat{X}_v)].$$

L'événement  $\hat{T}_A = \infty$  est donc  $\hat{P}_x$ -indépendant de la tribu engendrée par  $\hat{X}_v$  pour tout  $v$ ;  $\{T_A = \infty\}$  est donc indépendant de la tribu engendrée par  $\bigcup_v (\hat{X}_v)$ , donc aussi de lui-même.  $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = (\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty))^2$  et

comme  $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) \neq 0$  ceci entraîne que  $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1$ .

On a  $w(X_{s-}) = 1$   $P_v$  presque-sûrement  $\forall s < T_A$ .

Or  $vU_A(f) = vU(wf)$ , ce qui entraîne que  $P_v$  p. s.  $w(X_s) = 0$  pour presque tout  $s$ . Par suite l'ensemble  $\{0 < w < 1\}$  n'est pas chargé par  $vU$ .

Or  $\{0 < w < 1\} = H^c \cap \{0 < \hat{P}_x(\hat{T}_A < \infty) < 1\}$ .  $vU$  ne chargeant pas  $H = \{x; \hat{P}_x(\hat{\zeta} = 0) = 1\}$  puisque  $\hat{P}_x(\hat{\zeta} = 0) = 1$   $vU$  presque-sûrement,  $vU$  ne charge pas  $\{0 < \hat{P}_x(\hat{T}_A < \infty) < 1\}$  qui est un ouvert cofin, puisque  $\hat{P}_x(\hat{T}_A < +\infty)$  est coexcessive. Cet ensemble est donc vide.  $\{0 < w < 1\}$  est vide.

La fonction  $w$  ne prend donc que les valeurs 0 ou 1. Or

$$w(x) = 1_{H^c} \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty).$$

Donc  $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty)$  ne prend que les valeurs 0 ou 1.

**THÉORÈME 4.** —  $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty)$  ne prend que les valeurs 0 ou 1, est équivalent à :  $\forall x \in G^r \ P_x(T_A = T_{A \cup G^c}) = 1$ .

a) Condition nécessaire: soit  $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_G$ . Ceci entraîne que  $\hat{U}_A^\alpha(f 1_G) = 1_G \hat{U}_A^\alpha f$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \langle U_A^\alpha f, 1_G \rangle_\xi &= \langle U_A^\alpha f, (1_G)^2 \rangle_\xi = \langle f, \hat{U}_A^\alpha (1_G)^2 \rangle_\xi = \langle f 1_G, \hat{U}_A^\alpha 1_G \rangle_\xi \\ &= \langle U_A^\alpha(f 1_G), 1_G \rangle_\xi \end{aligned}$$

Donc  $\xi$  p. s.

$$1_G U_A^\alpha f = 1_G U_A^\alpha (f 1_G).$$

Montrons que ceci entraîne que  $1_{G^c} U_A^\alpha f = 1_{G^c} U_A^\alpha (f 1_G)$ . En effet  $\forall \beta > \alpha$

$$\begin{aligned} \beta U_{G^c \cup A}^\beta (1_G U_A^\alpha f) &= \beta E_x \int_0^{T_{G^c} \wedge T_A} 1_G(X_t) e^{-\beta t} U_A^\alpha f(X_t) dt \\ &= \beta 1_{G^c}(x) E_x \int_0^{T_{G^c} \wedge T_A} e^{-\beta t} U_A^\alpha f(X_t) dt \\ &= 1_{G^c}(x) \beta E_x \int_0^{T_{G^c} \wedge T_A} e^{-(\beta-\alpha)t} dt \int_t^{T_A} e^{-\alpha s} f(X_s) ds \\ &= 1_{G^c}(x) \frac{\beta}{\beta-\alpha} \left[ E_x \int_0^{T_{G^c} \wedge T_A} (e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}) f(X_u) du \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_A \wedge T_{G^c}}^{T_A} e^{-\alpha u} f(X_u) (1 - e^{-(\beta-\alpha)T_A \wedge T_{G^c}}) \right] \end{aligned}$$

Lorsque  $\beta$  tend vers  $+\infty$ , ceci tend donc vers :

$$1_{G^c}(x) E_x \left( T_A \wedge T_{G^c} > 0; \int_0^{T_A} e^{-\alpha u} f(X_u) du \right);$$

or tout point irrégulier pour  $G^c$  est régulier pour  $G$ .

D'après la proposition 5, si  $x \in (G^c)^r$ ,  $x$  est irrégulier pour  $G$ .

$$(G^c)^r \subseteq (G^r)^c \subseteq (G^c)^r.$$

Par suite  $G^r$  est identique à l'ensemble des points irréguliers pour  $G^c$

$$1_{G^r}(x) E_x \left[ T_A \wedge T_{G^c} > 0; \int_0^{T_A} e^{-\alpha u} f(X_u) du \right] = 1_{G^r}(x) U_A^\alpha f(x).$$

L'égalité :

$$\xi \text{ p. s. } 1_G U_A^\alpha f = 1_G U_A^\alpha (f 1_G)$$

entraîne donc :

$$\forall x \in E \quad 1_{G^r}(x) U_A^\alpha f(x) = 1_{G^r}(x) U_A^\alpha (f 1_G)(x),$$

soit encore :

$$1_{G^r}(x) U_A^\alpha (f 1_{G^c})(x) = 0.$$

Ceci entraîne, puisque  $G^c$  est absorbant, que :

$$\forall x \in G^r \quad P_x(T_A = T_{A \cup G^c}) = 1.$$

b) Condition suffisante :

$$\forall x \in G' \quad P_x(T_A = T_{A \cup G^c}) = 1.$$

$$1_{G'}(x)P_{T_A \cup G^c}u(x, y) = 1_{G'}(x)P_{T_A}u(x, y)$$

$$1_{A'}(x)P_{T_A \cup G^c}u(x, y) = 1_{A'}(x)P_{T_A}u(x, y)$$

Comme  $v$  ne charge que  $A' \cup G'$ , nous déduisons donc que :

$$\begin{aligned} \int v(dx)u(x, y) - \int v(dx)P_{T_{G^c \cup A}}u(x, y) &= \hat{P}_y(\hat{T}_{G^c \cup A} = \infty \cap \hat{\zeta} > 0) \\ &= \int v(dx)u(x, y) - \int v(dx)P_{T_A}u(x, y) = \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0), \end{aligned}$$

ce qui entraîne, puisque  $(\hat{\zeta} > 0) \in \mathcal{F}^0$  que :

$$\hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty) = \hat{P}_y(\hat{T}_{G^c \cup A} = \infty).$$

$G$  est un fermé cofin, absorbant, disjoint de  $A$ , donc

$$\forall x \in G, \quad \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1$$

et

$$\hat{P}_x(\hat{T}_{G^c} = \infty) = 1$$

donc

$$\hat{P}_x(\hat{T}_{A \cup G^c} = \infty) = 1.$$

Si  $x \in G^c$ , ouvert cofin, alors  $\hat{P}_x(\hat{T}_{G^c} = 0) = 1$  donc  $\hat{P}_x(\hat{T}_{G^c \cup A} = \infty) = 0$ .

Par suite,  $\forall y \in E \quad \hat{P}_y(\hat{T}_{G^c \cup A} = \infty) = 1_G(y)$ .

## V. ÉTUDE DU CAS OU $T_A$ EST UN TEMPS DE RETOUR

Les théorèmes généraux nous prouvent qu'alors le semi-groupe dual est égal au semi-groupe de retour, donc d'après le théorème 3, la fonction  $w$  est égale à 0 ou 1. Nous allons étudier la vraie valeur de  $w$  dans un cadre un peu plus général.

DÉFINITION. —  $T_A$  est  $P_v$ -presque sûrement un temps de retour si :  $T_A \circ \theta_t = 0$   $P_v$ -presque-sûrement sur l'ensemble  $\{T_A \leq t\}$ .

Comme  $T_A$  est un temps d'entrée, sur l'ensemble  $\{t < T_A\}$ ,

$$T_A \circ \theta_t = T_A - t.$$

Donc  $P_v$ -presque sûrement  $T_A \circ \theta_t = (T_A - t)^+$  et  $T_A < +\infty \Rightarrow T_A \leq \zeta$ , ce qui est la définition d'un temps de retour (cf. [2]).

THÉOREME 5. — Pour que  $T_A$  soit  $P_v$ -presque sûrement un temps de retour, il faut et il suffit que  $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_{(r_A)^c}$ .

a) Condition nécessaire :  $P_v$  p. s.  $T_A \circ \theta_t = 0$  sur  $T_A \leq t$ .

$$\begin{aligned} vU(U_A^\alpha f) &= E_v \int_0^{+\infty} dt E_{X_t} \int_0^{T_A} e^{-\alpha s} f(X_s) ds = E_v \int_0^{+\infty} dt \int_0^{(T_A - t)^+} e^{-\alpha s} f(X_s) ds \\ &= E_v \int_0^{T_A} dt \int_0^{T_A - t} e^{-\alpha s} f(X_{s+t}) ds = vU_A(U_A^\alpha f). \end{aligned}$$

Par suite,

$$vU((1 - w)U_A^\alpha f) = 0,$$

ce qui entraîne, d'après la dualité que :

$$vU[f, \hat{U}_A^\alpha(1 - w)] = 0$$

c'est-à-dire,  $\xi$  p. s.  $\hat{U}_A^\alpha(1 - w) = 0$ .

Or

$$1 - w \geq \hat{E} \cdot (0 < \hat{T}_A < +\infty), \quad \xi \text{ p. s. } \hat{U}_A^\alpha[E \cdot (0 < \hat{T}_A < +\infty)] = 0.$$

Cette fonction étant  $\hat{X}_A$   $\alpha$ -coexcessive,  $\hat{U}_A^\alpha[E \cdot (0 < T_A < +\infty)] = 0$  partout. Mais la fonction  $E \cdot (0 < \hat{T}_A < +\infty)$  est aussi  $\hat{X}_A$  excessive, donc :

$$E_x(0 < \hat{T}_A < +\infty) = 0 \quad \forall x \in E,$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \hat{P}_x(\hat{T}_A = 0) + \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) &= 1 \\ \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) &= 1_{(r_A)^c}. \end{aligned}$$

b) Réciproquement :  $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_{(r_A)^c}$ .

$$\hat{U}_A^\alpha(\hat{P} \cdot (\hat{T}_A = 0))(y) = \hat{E}_y \int_0^{\hat{T}_A} \hat{P}_{X_t}(\hat{T}_A = 0) dt = 0,$$

car pour  $t < \hat{T}_A$ ,  $\hat{X}_t \notin A$  p. s., donc :

$$\hat{U}_A^\alpha[\hat{P} \cdot (\hat{T}_A = \infty)](y) = \hat{U}_A^\alpha 1(y).$$

Par dualité,

$$\begin{aligned} \langle U_A^\alpha 1, 1 - w \rangle_\xi &= \langle U_A^\alpha 1, \hat{P} \cdot (\hat{T}_A < +\infty) \rangle_\xi \\ &= \langle 1, \hat{U}_A^\alpha(\hat{P} \cdot (\hat{T}_A < +\infty)) \rangle_\xi = 0, \end{aligned}$$

car  $\xi$  p. s.  $1 - w = \hat{P} \cdot (\hat{T}_A < +\infty)$ .

Donc  $vU(U_A^\alpha 1) = vU_A(U_A^\alpha 1)$ , ce qui s'écrit :

$$E_v \int_0^{+\infty} dt E_{X_t} \int_0^{T_A} e^{-\alpha s} ds = E_v \int_0^{T_A} dt E_{X_t} \int_0^{T_A} e^{-\alpha s} ds.$$

Il existe donc  $\Omega'$  tel que  $P_v(\Omega') = 1$  et tel que :

$$\forall \omega \in \Omega' \quad \int_{T_A(\omega)}^{+\infty} dt \int_0^{T_A \circ \theta_t(\omega)} e^{-as} ds = 0$$

d'où :

$$T_A \circ \theta_t(\omega) = 0 \text{ p. s.}$$

presque-surement pour la mesure de Lebesgue, si  $t \geq T_A$ . Mais si il existait  $t_0$  tel que  $T_A \circ \theta_{t_0}(\omega) > 0$ , d'après la continuité à droite des trajectoires, il existerait  $\varepsilon > 0$ , tel que  $\forall t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ ,  $X_t(\omega) \notin A$ , ce qui est contradictoire avec  $T_A \circ \theta_t(\omega) = 0$  presque-sûrement pour la mesure de Lebesgue. Donc :

$$T_A \circ \theta_t = 0 \quad P_v \text{ p. s. pour } t \geq T_A.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLUMENTHAL et GETTOOR, *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, New York, London, 1968.
- [2] CARTIER, MEYER et WEIL, *Séminaire de Probabilités II*, Springer Verlag, 1968.
- [3] KUNITA et WATANABE, On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory, *J. of. Math. and Mech.*, vol. XV, n° 3, 1966.
- [4] CHUNG et WALSH, *Acta Math.*, t. 123, 1969.

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1970).