ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

FRANÇOIS LEDRAPPIER

Des produits de Riesz comme mesures spectrales

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, nº 4 (1970), p. 335-344
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_4_335_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VI, n° 4, 1970, p. 335-344. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Des produits de Riesz comme mesures spectrales

par

François LEDRAPPIER (*)

SOMMAIRE. — On montre que certains produits de Riesz sur le tore peuvent s'interpréter comme mesures spectrales d'opérateurs que l'on peut décrire simplement et qui apparaissent en théorie ergodique.

SUMMARY. — It is shown that some Riesz products on the torus may be seen as the spectral measures of some operators which can be simply described and can appear in the ergodic theory.

INTRODUCTION

On considère un produit de Riesz $\mu(t) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 + \cos(2^n t + \theta_n))$ ou t appartient au tore $T = R/2\pi Z$ ainsi que les θ_n, $n \geqslant 0$. C'est une probabilité. Si on considère l'espace $L^2(\mu)$ et dans cet espace l'opérateur de multiplication par e^{it}, c'est un opérateur dont la mesure spectrale est justement $\mu(t)$. On peut se demander s'il n'est pas équivalent à un autre opérateur que l'on peut décrire simplement, c'est-à-dire s'il existe un espace de Hilbert connu $\mathscr{H}$ et un isomorphisme de $L^2(\mu)$ sur $\mathscr{H}$ qui envoie la multiplication par e^{it} sur un opérateur T.

La réponse est le théorème.

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités » associée au C. N. R. S.

THÉORÈME. — Soit $\mu(t) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 + \cos(2^n t + \theta_n)$ un produit de Riesz où t appartient au tore $R/2\pi Z$. Soit G le groupe compact des entiers diadiques, φ la translation par 1 sur G. $\mu(t)$ est la mesure spectrale d'un opérateur T sur $L^2(G)$: T s'écrit $Tf = \lambda_0 f \circ \varphi$ ou λ_0 est une fonction sur G définie par :

$$\lambda_0 = e^{-i\theta_0} \qquad \text{sur} \qquad A_0 = \{ g \,;\, g_0 = 1 \}$$

$$\lambda_0 = \frac{e^{i(\theta_0 + \ldots + \theta_{m-1})}}{e^{i\theta_m}} \qquad \text{sur} \qquad A_m = \{ g \,;\, g_i = 0 \ i < m, \ g_m = 1 \} \forall_m > 0.$$

En fait on va montrer que $(L^2(G), T)$ est équivalent à $(L^2(\mu), M_{e^{it}})$.

1. ÉTUDE DIRECTE DE $L^2(\mu)$

On désigne par Γ le sous-groupe discret des diadiques du tore. Soit γ un diadique : son ordre est le plus petit entier m tel que $2^m\gamma$ soit multiple de 2π.

On dit qu'une mesure v ayant une propriété est ergodique avec cette propriété si toute mesure ayant la même propriété et absolument continue par rapport à v est en fait équivalente à v.

Soit $\mu^n(t)$ la fonction définie par :

$$\mu^n(t) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 + \cos(2^k t + \theta_k)) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

On a la proposition suivante qui définit μ :

PROPOSITION 1. — Les probabilités $\mu^n(t)\dfrac{dt}{2\pi}$ convergent vaguement vers une probabilité que l'on note $\mu(t)$; $\mu(t)$ est quasi-invariante par les translations de tout élément de Γ et ergodique avec cette propriété.

Démonstration :

i) Les $\mu^n(t)\dfrac{dt}{2\pi}$ convergent vaguement si leurs coefficients de Fourier convergent.

On pose alors $f_{n,k}(t) = e^{ikt}\mu^n(t)$.

On peut remarquer que la suite $s_{n,k}(t)$, avec

$$s_{n,k}(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} f_{n,k}(t + \gamma)$$

converge déjà vers une limite d_k quand n tend vers l'infini, indépendante de t. Alors $\int f_{n,k}(t) \frac{dt}{2\pi} = \int s_{n,k}(t) \frac{dt}{2\pi}$ tend vers d_k quand n tend vers l'infini.

ii) Soit γ un élément de Γ, et n son ordre.

On voit immédiatement que $\mu(t - \gamma)$ et $\mu(t)$ sont équivalentes.

On a même la formule :

$$\frac{d(\mu * \varepsilon_\gamma)}{d\mu}(t) = \frac{\mu(t - \gamma)}{\mu(t)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + \cos(2^k(t - \gamma) + \theta_k)}{1 + \cos(2^k t + \theta_k)}$$

iii) Soit $\mathscr{B}_n$ la σ-algèbre des boréliens du tore invariants par les translations de tout γ d'ordre inférieur à n.

L'image de μ dans l'application identique de $(\mathrm{T}, \mathscr{B}_0)$ sur $(\mathrm{T}, \mathscr{B}_n)$ est la mesure

$$\mu_n(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \mu(t - \gamma).$$

Il est facile de voir que c'est égal à

$$\mu_n(t) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 + \cos(2^k t + \theta_k)).$$

Les désintégrations de μ par rapport à cette application sont les mesures discrètes

$$\mu_{t,n} = \frac{1}{2^n} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 + \cos(2^k(t + \gamma) + \theta_k)) \right) \varepsilon_{t+\gamma}$$

ou ε_x est la mesure de Dirac au point x.

Soit $\mathscr{B}_\infty$ la limite décroissante des σ-algèbres $\mathscr{B}_n$; $\mathscr{B}_\infty$ est la σ-algèbre des boréliens invariants par les translations de Γ. La désintégration de μ par rapport à l'application identique de $(\mathrm{T}, \mathscr{B}_0)$ sur $(\mathrm{T}, \mathscr{B}_\infty)$ est, d'après le théorème des martingales, en μ-presque tout point t, la limite faible des mesures $\mu_{t,n}$. Le calcul, par exemple des coefficients de Fourier de $\mu_{t,n}$, qui sont les fonctions $s_{n,k}(t)$, montre que cette limite existe et est indépendante de t. Il y a donc une seule désintégration de μ sur $\mathscr{B}_\infty$ qui ne peut être que μ elle-même. Ceci revient à dire que μ est ergodique pour la propriété de quasi-invariance par les translations de Γ.

Grâce à cette propriété on peut maintenant bien décrire $L^2(\mu)$ par la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — Il existe deux représentations unitaires V et U de respectivement Γ et Z dans $\mathscr{L}(L^2(\mu))$ telles que :

a) $U(z)V(\gamma)U(z^{-1})V(-\gamma) = Ie^{iz\gamma}$ pour tous z dans Z, γ dans Γ.

b) Les seuls sous-espaces invariants par U(Z) et V(Γ) sont $\{0\}$ et $L^2(\mu)$ tout entier.

Démonstration. — Il suffit de mettre en évidence les opérateurs $U(z)$ et $V(\gamma)$. On prendra pour $U(z)$ l'opérateur multiplication par e^{izt}. C'est bien un opérateur unitaire ; Z étant discret, la représentation est bien continue.

On définit $V(\gamma)$ de la manière suivante :

$$V(\gamma)f(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + e^{i(2^k(t-\gamma)+\theta_k)}}{1 + e^{i(2^kt+\theta_k)}} f(t-\gamma) \qquad \forall f \in L^2(\mu)$$

où n est un entier quelconque tel que $2^n\gamma$ soit multiple de 2π.

On vérifie facilement que les $V(\gamma)$ forment bien une représentation de Γ et sont des opérateurs unitaires ; Γ étant discret la représentation est continue.

On vérifie également que tout f

$$U(z)V(\gamma)U(z^{-1})V(-\gamma)f(t) = e^{iz\gamma}f(t)$$

ce qui montre le point *a*).

Pour montrer le point *b*), il faut montrer que tout opérateur borné qui commute avec $U(z)$ et $V(\gamma)$ est proportionnel à l'identité. S'il commute avec les $U(z)$, ce ne peut être que la multiplication par une fonction bornée $h(t)$. S'il commute avec les $V(\gamma)$, $h(t)$ vérifie alors :

$$\left(h(t-\gamma) - h(t)\right)\prod_{k=0}^{n-1}(1 + e^{i(2^k(t-\gamma)+\theta_k)}) = 0 \qquad \text{pour tous } \gamma.$$

L'ensemble des t où pour un γ et un k, $e^{i(2^k(t-\gamma)+\theta_k)}$ vaut -1 étant de mesure nulle, on a $h(t-\gamma) = h(t)$ μ-presque sûrement. Comme μ est extrêmale, $h(t)$ est presque sûrement constante. La multiplication par une constante est bien un opérateur proportionnel à l'identité.

Remarque. — Le dual de Γ, qu'on appellera G, est un compactifié de Z. Si la représentation U était continue pour la topologie induite sur Z par celle de G, on pourrait alors la prolonger à G en gardant les propriétés *a*) et *b*) de la proposition 2. D'après le théorème de Stone-Von Neumann ([*1*], p. 295), $L^2(\mu)$ serait isomorphe à $L^2(G)$ et les représentations U et V équivalentes respectivement à U' et V' :

$$U'(g)f(g') = f(g' + g) \qquad V'(\gamma)f(g) = (\gamma, g)f(g).$$

Ceci montre le théorème dans le cas particulier où $\theta_n = 0$ quelque soit n.

Pour des valeurs quelconques de θ_n, on se propose, en somme, de généraliser le résultat précédent.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Le théorème annoncé sera la conclusion de la suite des propositions suivantes où l'on utilise la forme de l'opérateur $V(\gamma)$ introduit ci-dessus.

PROPOSITION 3. — $L^2(\mu)$ est isomorphe à $L^2(G)$, ou G est le groupe compact dual de Γ, l'isomorphisme échangeant $V(\gamma)$ et la multiplication par le caractère $\gamma(g)$ identifié à γ par bidualité.

Démonstration. — Il suffit de voir que, si 1 est la fonction constante dans $L^2(\mu)$, les $V(\gamma)1$ forment une base orthonormale de $L^2(\mu)$. On pourra alors en effet envoyer l'élément $V(\gamma)1$ sur le caractère $\gamma(g)$ dans $L^2(G)$ pour avoir l'isomorphisme. Les relations de groupe des $V(\gamma)$ imposent alors le résultat.

Il suffit donc de vérifier que $\forall \gamma \in \Gamma \langle V(\gamma)1, 1 \rangle = \delta_{\gamma,0}$ et que le sous-espace engendré par les $V(\gamma)1$ est tout $L^2(\mu)$. Pour faire les calculs, on pose

$$c_j = e^{i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(j)\theta_k}$$

où les $\varepsilon_k(j)$ valent 0 ou 1 et vérifient :

$$\begin{cases} j = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(j) 2^k \\ \lim_k \sup \varepsilon_k(j) = 0 \qquad \text{pour tout } j \end{cases}$$

on peut alors écrire :

$$\prod_{k=0}^{n-1} 1 + e^{i(2^k u + \theta_k)} = \sum_{j=0}^{2^n - 1} c_j e^{iju}$$

En utilisant successivement les formules :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\gamma' \in \Gamma_n} e^{ik\gamma'} = 1 \qquad \text{si } k \text{ est multiple de } 2^n$$

$$= 0 \qquad \text{sinon}$$

et

$$\frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n - 1} e^{ij\gamma} = \delta_{\gamma,0} \qquad \text{dès que } \gamma \text{ est d'ordre inférieur ou égal à } n$$

On montre facilement que $\mu_{t,n}(\langle V(\gamma)1, 1 \rangle (t)) = \delta_{\gamma,0}$, ce qui montre l'orthogonalité des fonctions $V(\gamma)1$.

Pour montrer que l'espace engendré par les $V(\gamma)1$ est tout $L^2(\mu)$, il faut montrer, d'après la proposition 2 *b*) qu'il est invariant par U(Z) c'est-à-dire en particulier par $U(z_0)$, ou z_0 est l'élément unité de Z. Grâce aux relations de commutations, il suffit donc de montrer que $U(z_0)1$ appartient encore à ce sous-espace. Comme les $V(\gamma)1$ forment une base orthogonale de ce sous-espace, il suffit de vérifier :

$$\sum_{\Gamma} | \langle U(z_0)1, V(\gamma)1 \rangle |^2 = \langle U(z_0)1, U(z_0)1 \rangle = 1$$

Pour cela il faut calculer

$$\sum_{\Gamma_m} (| \mu_{t,n}(e^{it'} \overline{V(\gamma)1(t')} |^2)$$

et faire tendre n puis m vers l'infini.

Après les simplifications habituelles il reste la somme :

$$\frac{1}{2^{2n-m}} \sum_{(j,k) \in M} C_{j-1} \overline{C}_j C_{k-1} C_k$$

où M est le sous-ensemble des couples (j, k) de

$$\{ 1, \ldots, 2^n - 1 \} \times \{ 1, \ldots, 2^n - 1 \}$$

tels que $| j - k |$ soit multiple de 2^m.

Dans M il y a $(2^n - 1) \times (2^{n-m} - 1)$ éléments. Le produit $C_{j-1}\overline{C_j}\overline{C_{k-1}}C_k$ est différent de 1 dans M seulement si j et k sont multiples de 2^m.

Il n'y a que $(2^{n-m} - 1) \times (2^{n-m} - 1)$ tels éléments dans M. Quant n tend vers l'infini la somme que l'on a écrite tend donc vers $1 - \varepsilon(m)$ ou $\varepsilon(m)$ est majoré par 2^{-m}. Elle tend d'autre part vers $\sum_{\Gamma_m} |\langle U(z_0)1, V(\gamma)1 \rangle|^2$. Il suffit de faire tendre m vers l'infini pour avoir la formule cherchée.

Soit alors T l'opérateur de $L^2(G)$ induit de $U(z_0)$ dans l'isomorphisme ci-dessus. On désigne par c l'élément de G qui vérifie $(\gamma, c) = e^{i\gamma}$ et par θ la translation de c dans $L^2(G)$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 4. — Il existe une fonction λ de $L^2(G)$ telle que T puisse s'écrire $Tf = \lambda f \circ \theta$ pour toute fonction f de $L^2(G)$. On a, de plus, le module de λ constant et de valeur 1.

Démonstration. — T vérifie en effet la relation de la proposition 2 *a*) :

$$T((\gamma, .)f(.))(g) = e^{i\gamma}(\gamma, g)Tf(g)$$

$T\theta^{-1}$ vérifie alors :

$$T\theta^{-1}((\gamma, .)f(.)) = e^{-i\gamma}T((\gamma, .)\theta^{-1}f(.)) = (\gamma, g)T\theta^{-1}f(g)$$

L'opérateur $T\theta^{-1}$ commute donc avec les multiplications par les caractères. C'est donc la multiplication par une fonction λ. Comme c'est un opérateur unitaire, on a nécessairement $|\lambda(g)|^2 = 1$ presque sûrement. $T\theta^{-1}f = \lambda f$ est bien équivalent à $Tf = \lambda f \circ \theta$.

Pour montrer le théorème il n'y a plus, en rassemblant les résultats des propositions 3 et 4, qu'à vérifier que G est bien le groupe des entiers diadiques, c l'entier 1 et λ la fonction annoncée.

Le groupe des entiers diadiques peut être décrit comme l'ensemble des suites $\{ g_n, n \geqslant 0 \}$ où g_n est 0 ou 1, muni de la topologie produit de $\{ 0,1 \}^{\mathbb{N}}$ et de la loi de groupe définie par les formules :

$$\sum_{m<n} 2^m(g + g')_m = \sum_{m<n} 2^m g_m + \sum_{m<n} 2^m g'_m \qquad \text{modulo } 2^n, \qquad n \geqslant 1.$$

C'est un groupe abélien compact dont le dual s'identifie à Γ par la formule

$$(g, \gamma)_{G,\hat{G}} = e^{i\gamma \sum_{m<n} 2^m g_m}$$

si n est l'ordre de γ.

L'entier 1 est l'élément $\{ g_n, n \geqslant 0 \}$ avec $g_0 = 1$ $g_n = 0$, $n \geqslant 1$. On a bien $(1, \gamma) = e^{i\gamma}$ pour tout γ de Γ.

Pour vérifier que la fonction λ est bien la fonction annoncée λ_0, il suffit de calculer les coefficients de Fourier des deux fonctions et de vérifier qu'ils sont égaux.

C'est le but des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 5. — Les coefficients de Fourier de λ sont donnés par :

$$\hat{\lambda}(\gamma) = \frac{e^{i(\theta_0 + \ldots + \theta_{k-2})}}{2^k e^{i\theta_{k-1}}} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{e^{i(\theta_0 + \ldots + \theta_{m-2})}}{2^m e^{i\theta_{m-1}}}$$

si $k \geqslant 2$ est l'ordre de γ.

$$\hat{\lambda}(\gamma) = \frac{e^{i\gamma}}{2e^{i\theta_0}} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{e^{i(\theta_0 + \ldots + \theta_{m-2})}}{2^m e^{i\theta_{m-1}}} \qquad \text{si} \quad \gamma = 0 \quad \text{ou} \quad \pi$$

Démonstration. — On a à calculer $\hat{\lambda}(\gamma)$.

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(\gamma) = \langle \lambda, \gamma \rangle &= \langle \mathrm{T}(1)(g), \gamma(g) \rangle \\ &= \langle \mathrm{U}(z_0)1, \mathrm{V}(\gamma)1 \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_{t,n}(e^{it'}\overline{\mathrm{V}(\gamma)1(t')}). \end{aligned}$$

En développant et simplifiant on trouve :

$$\hat{\lambda}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2n-1} \mathrm{C}_{j-1}\overline{\mathrm{C}}_j e^{ij\gamma}$$

On obtient la formule annoncée en remarquant que :

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_{j-1}\overline{\mathrm{C}}_j = e^{-i\theta_0} && \text{si } j \text{ est de la forme } 2q+1, && q \text{ entier.} \\ &\mathrm{C}_{j-1}\overline{\mathrm{C}}_j = e^{i(\theta_0 - \theta_1)} && \text{si } j \text{ est de la forme } 4q+2, && q \text{ entier.} \end{aligned}$$

En général :

$$\mathrm{C}_{j-1}\overline{\mathrm{C}}_j = \frac{e^{i(\theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_{p-2})}}{e^{i\theta_{p-1}}}$$

si j est de la forme $2^p q + 2^{p-1}$, q entier.

PROPOSITION 6. — Les coefficients de Fourier de λ_0 sont donnés par les mêmes formules.

Démonstration :

$$\hat{\lambda}_0(\gamma) = \int \lambda_0(g)\overline{\gamma(g)}dg.$$

Comme $\hat{\lambda}_0$ est constant sur les ensembles A_m

$$A_m = \{ g \,;\, g_i = 0 \ i < m, \ g_m = 1 \}$$

et vaut justement le coefficient $e^{i(\theta_0 + \dots + \theta_{m-1} - \theta_m)}$ qui intervient dans la formule cherchée, il suffit de calculer

$$\int_{A_m} \overline{\gamma(g)}dg.$$

On aura

$$\lambda_0(\gamma) = e^{-i\theta_0} \int_{A_0} \overline{\gamma(g)}dg + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{i(\theta_1 + \dots + \theta_{m-1})}}{e^{i\theta_m}} \int_{A_m} \overline{\gamma(g)}dg.$$

Or

$$\int_{A_m} \overline{\gamma(g)}dg = \int_{A_m} e^{-i\gamma \sum_{j=0}^{k-1} g_j 2^j} dg \text{ où } k \text{ est l'ordre de } \gamma.$$

Si $m < k - 1$ $\displaystyle\int_{A_m} \overline{\gamma(g)}dg = e^{-i\gamma 2^m} \int_{A_m} e^{-i\gamma 2^m \left(\sum_{j=1}^{k-m-1} g_{m+j} 2^j \right)} dg = 0$

Si $m = k - 1$ $\displaystyle\int_{A_m} \overline{\gamma(g)}dg = e^{-i\gamma 2^{k-1}} \int_{A_{k-1}} dg = -\, dg(A_{k-1}) = -\frac{1}{2^k}$

Si $m > k - 1$ ou $\forall m$ si $k = 0$

$$\int_{A_m} \overline{\gamma(g)}dg = \int_{A_m} dg = dg(A_m) = \frac{1}{2^{m+1}}$$

En reportant on trouve bien la formule annoncée.
Ceci achève la démonstration du théorème.

3. REMARQUES

Réciproquement, les mesures spectrales de tous les opérateurs de $L^2(G)$ de la forme $Tf = \lambda f \circ \theta$ sont quasi-invariantes par Γ et ergodiques pour cette propriété. Mais on ne sait pas caractériser les mesures qui, à une équivalence près, sont les mesures spectrales d'un tel opérateur.

Si on veut généraliser les calculs ci-dessus à un groupe Γ engendré par des $\frac{1}{t_n}$ $n \geqslant 0$ avec $t_{n+1} = q_n t_n$ q_n entier supérieur à 2, il faut prendre un produit de la forme

$$\mu(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \cos(t_{n+1} t + q_n \theta_n)}{1 - \cos(t_n t + \theta_n)}.$$

Si θ_n est un multiple de π pour tout n, on a étudié la partie non discrète du spectre du système dynamique étudié par S. Kakutani [*2*].

On peut, pour le voir, ou bien montrer que la mesure spectrale qui intervient est bien la mesure $\mu(t)$, ou bien établir, d'une façon analogue à J. Neveu [*3*] un isomorphisme entre l'espace hilbertien qui intervient et $L^2(G)$ et retrouver ainsi l'opérateur T.

La réunion de ces deux démonstrations fournirait d'ailleurs une autre démonstration du théorème dans le cas où θ_n est un multiple de π.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] I. E. SEGAL et R. A. KUNZE, *Integrals and operators*, McGraw Hill.

[*2*] S. KAKUTANI, Ergodic theory of shift transformations. Proc. Vth Berkeley. *Symposium Math. Statis. Proba.*, vol. II, **2**, 1967, p. 405-414.

[*3*] J. NEVEU, Sur les suites de Toeplitz. *Z. Wahscheinlichkeitstheorie verw. Cjeb.*, t. **13**, 1969, p. 132-134.

(Manuscrit reçu le 26 juin 1970).