

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HERVÉ REINHARD

BERNARD ROYNETTE

Recollement de deux processus de Markov et fonctionnelles additives

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, n° 1 (1970), p. 27-40

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_1_27_0

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Recollement de deux processus de Markov et fonctionnelles additives

par

Hervé REINHARD

(Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications »
dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités »
associée au C. N. R. S.,
11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris-5^e).

et

Bernard ROYNETTE

(Département de Mathématiques
Faculté des Sciences d'Orsay, 91-Orsay).

RÉSUMÉ. — Soient $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{F}_t^i, X_t^i, \theta_t^i, P_t^i)$ ($i = 1, 2$) deux processus de Markov à valeurs dans E^i ($i = 1, 2$). E^i est un espace localement compact à base dénombrable, δ_i son point de compactification, \mathcal{B}_i est la tribu borélienne et \mathcal{E}^i est la tribu des universellement mesurables. Nous supposons que les limites $X_{\zeta^1(\omega_1)-}^1(\omega_1)$ existent presque-sûrement dans $E_1 \cup \delta_1$ (où $\zeta^1(\omega_1)$ est le temps de mort du premier processus). Nous supposons de plus que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. D'autre part, soit $\varphi(x, A)$ une probabilité de transition de $(E^1 \cup \delta^1, \mathcal{E}'^1)$ dans (E^2, \mathcal{E}^2) , où \mathcal{E}'^1 est la tribu universellement mesurable de $E^1 \cup \delta_1$. Les tribus \mathcal{F}_t^i sont continues à droite et les trajectoires sont continues à droite, limitées à gauche presque sûrement.

Quand la trajectoire ω_1 du premier processus meurt, nous recollons à sa suite une trajectoire du second processus. La loi du saut de E^1 dans E^2 au temps $\zeta^1(\omega_1)$ est régie par la probabilité de transition $\varphi(x, A)$. Nous montrons que le processus ainsi recollé est de Markov et qu'il possède la propriété de Markov forte dès que les processus initiaux la possèdent. Enfin, nous décrivons les fonctionnelles additives du processus recollé.

Nous remercions M. REVUZ de l'aide qu'il nous a apportée pour ce travail.

SUMMARY. — Let M_1, M_2 be two Markov process on E_1 and E_2 respectively, such that $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. A Markov process M is constructed which extends both M_1 and M_2 . We show that M satisfies the strong Markov property if both M_1 and M_2 satisfy it. We finally describe all the additive functionals of the process M .

I. — LE PROCESSUS RECOLLÉ

Le lemme suivant nous sera utile pour la construction de la probabilité sur le processus recollé.

LEMME 1. — L'application $H: (\Omega^1 \times \mathcal{F}^2) \rightarrow (0,1)$ définie par :

$$H(\omega_1, A) = \int_{E^2} \varphi(X_{\zeta^-(\omega_1)}^1(\omega_1), dy) P_y^2(A)$$

est une probabilité de transition.

α) L'application $X_t^1(\Omega^1, \mathcal{F}_t^1) \rightarrow (E^1, \mathcal{B}^1)$ est mesurable et l'application $t: X_t^1(\omega_1)$ est continue à droite, donc :

$$(t, \omega_1) \rightarrow X_t^1(\omega_1) \text{ est progressivement mesurable.}$$

Si M est une variable aléatoire de Ω^1 dans \mathbb{R} , \mathcal{F}^1 -mesurable, l'application

$$\omega_1 \rightarrow X_{M(\omega_1)}^1(\omega_1)$$

est mesurable de (Ω^1, \mathcal{F}) dans (E^1, \mathcal{B}^1) .

β) Soit ν une loi initiale et $\mu(\Gamma) = P_\nu^1(X_M^1 \in \Gamma)$ si $\Gamma \in \mathcal{B}^1$. Si $\Gamma \in \mathcal{E}^1$, il existe Γ_1 et Γ_2 , ($\Gamma_i \in \mathcal{B}^1$), $\Gamma_1 \subset \Gamma \subset \Gamma_2$ tels que :

$$\mu(\Gamma_1) = \mu(\Gamma) = \mu(\Gamma_2)$$

D'où :

$$P_\nu^1(X_M^1 \in \Gamma_1) = P_\nu^1(X_M^1 \in \Gamma_2)$$

donc

$$(X_M^1 \in \Gamma) \in \mathcal{F}^1$$

et l'application :

$$\omega_1 \rightarrow X_{H(\omega_1)}^1(\omega_1)$$

est mesurable de $(\Omega^1, \mathcal{F}^1)$ dans (E^1, \mathcal{E}^1) .

γ) L'application $\omega_1 \rightarrow X_{\zeta^1(\omega_1)-}(\omega_1)$ est mesurable de $(\Omega^1, \mathcal{F}^1)$ dans (E^1, \mathcal{E}^1) car :

$$X_{\zeta^1(\omega_1)-}(\omega_1) = \lim_{n \uparrow \infty} X_{\zeta^1(\omega_1) - \frac{1}{n}}(\omega_1)$$

et l'application

$$\omega_1 \rightarrow \zeta^1(\omega_1) - \frac{1}{n}$$

est \mathcal{F}^1 -mesurable.

En conséquence, l'application

$$\omega_1 \rightarrow \varphi(X_{\zeta^1(\omega_1)-}(\omega_1), B)$$

est \mathcal{F}_1 -mesurable pour tout $B \in \mathcal{E}^2$.

δ) Nous savons que pour tout $B \in \mathcal{E}^2$ l'application :

$$y \rightarrow E_y(B)$$

est \mathcal{E}^2 -mesurable ; le lemme en résulte donc d'après le théorème de Fubini.

Nous allons maintenant construire le processus recollé. Nous le noterons $(\Phi, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, Q_x)$. Nous appellerons ζ son temps de mort.

1) Soit

$$\Phi = \Phi^1 + \Phi^2 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \Phi^1 &= \Omega^1 \times \Omega^2 \\ \Phi^2 &= \Omega^2. \end{aligned}$$

Si $\omega \in \Phi^1$,

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= X_t(\omega_1, \omega_2) = X_t^1(\omega_1) & \text{si} & \quad t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= X_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) & \text{si} & \quad t \geq \zeta^1(\omega_1). \end{aligned}$$

$$\zeta(\omega) = \zeta^1(\omega_1) + \zeta^2(\omega_2)$$

Si $\omega \in \Phi^2$,

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= X_t^2(\omega) \\ \zeta(\omega) &= \zeta^2(\omega_2). \end{aligned}$$

2) Les translations : nous définissons θ_t par :

Si $\omega \in \Phi^1$,

$$\begin{aligned} \theta_t(\omega) &= \theta_t(\omega_1, \omega_2) = (\theta_t^1 \omega_1, \omega_2) & \text{si} & \quad t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= (\theta_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2 \omega_2) & \text{si} & \quad t \geq \zeta^1(\omega_1). \end{aligned}$$

Si $\omega \in \Phi^2$,

$$\theta_t(\omega) = \theta_t^2(\omega).$$

3) Les tribus : nous dirons que $A \in \mathcal{G}$ si

$$A \cap \Phi^1 \in \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2 \quad \text{et} \quad A \cap \Phi^2 \in \mathcal{F}^2.$$

Si $A \subset \Phi^1 = \Omega^1 \times \Omega^2$, nous dirons que $A \in \mathcal{G}_t$ si

$$\begin{array}{ll} 1) A \in \mathcal{G}. & 1) A \in \mathcal{G}. \\ 2) A_{\omega_1} = \emptyset & \text{ou} \quad \Omega^2 \quad \text{si} \quad t < \zeta^1(\omega_1) \\ & \in \mathcal{F}_{t-\zeta^1(\omega_1)} \quad \text{si} \quad t \geq \zeta^1(\omega_1) \end{array}$$

où A_{ω_1} est la section de A par ω_1 .

$$3) \text{proj}_{\Omega^1}(A) \cap (t < \zeta^1(\omega_1)) \in \mathcal{F}_t^1.$$

Si $A \subset \Phi^2$; $A \in \mathcal{G}_t$ si $A \in \mathcal{F}_t^2$.

Il est évident que les tribus \mathcal{G}_t sont croissantes, continues à droite et que les X_t sont adaptées aux \mathcal{G}_t .

4) Les probabilités Q_x :

Si $x \in E^2$, Q_x ne charge que Φ^2 , et

$$Q_x(A) = P_x^2(A) \quad (A \subset \Phi^2).$$

Si $x \in E^1$, Q_x ne charge que Φ^1 , et est égal au produit de la probabilité P_x^1 par la probabilité de transition $H(\omega_1, A)$. Soit :

$$Q_x(A) = \int_{\Omega^1} dP_x^1(\omega_1) H(\omega_1, A_{\omega_1}) \quad (A \subset \Phi^1).$$

Ceci est bien défini d'après le lemme 1.

THÉORÈME 1. — Le processus $(\Phi, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, Q_x)$ est de Markov. Nous allons montrer que

$$\int 1_A \cdot 1_{B^1 \cup B^2}(X_{t+s}) dQ_x = \int 1_A E_{X_t} 1_{B^1 \cup B^2}(X_s) dQ_x$$

où $B^1 \in \mathcal{B}_1$, $B^2 \in \mathcal{B}_2$, $A \in \mathcal{G}_t$.

Appelons (1) et (2) les deux termes de l'égalité à démontrer, et distinguons plusieurs cas :

1) $A \subset \Phi^2$.

a) $x \in E^2$. Alors X_{t+s} , X_t appartiennent à E^2 , Q_x ps. L'égalité (1) = (2) résulte du fait que le processus 2 est de Markov.

b) $x \in E^1$. Q_x ne chargeant pas A , (1) = (2) = 0.

2) $A \subset \Phi^1$

a) $x \in E^2$. Q_x ne chargeant pas A , (1) = (2) = 0.

b) $x \in E^1$ et $A \subset \{t < \zeta^1(\omega_1)\}$.

$$(1) = \int_A 1_{B^1}(X_{t+s}^1(\omega_1)) dP_x^1(\omega_1) \\ + \int_{A\{t+s \geq \zeta^1(\omega_1)\}} dP_x^1(\omega_1) H(\omega_1, 1_{B^2}(X_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2)))$$

Soit un (ω_1, ω_2) tel que $t < \zeta^1(\omega_1)$ et calculons :

$$E_{X_t(\omega_1, \omega_2)}(1_{B^1 \cup B^2}(X_s)) = E_{X_t^1(\omega_1)}(1_{B^1}(X_s^1(\omega_1))) \\ + \int_{\zeta^1(\omega_1) \leq s} dP_{X_t^1(\omega_1)}(\omega_1) H(\omega_1, 1_{B^2}(X_{s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2)))$$

D'où :

$$(2) = \int_A E_{X_t^1(\omega_1)} 1_{B^1}(X_s^1(\omega_1)) dP_x^1(\omega_1) + \int_A dP_x^1(\omega_1) E_{X_t^1(\omega_1)}(1_{\zeta^1(\omega_1) \leq s} f(\omega_1))$$

où

$$f(\omega_1) = H(\omega_1, 1_{B^2}(X_{s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2))) \\ = \int_A 1_{B^1}(X_{t+s}^1(\omega_1)) dP_x^1(\omega_1) \\ + \int_{A\{\zeta^1(\omega_1) \leq t+s\}} dP_x^1(\omega_1) H(\theta_t \omega_1, 1_{B^2}(X_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2)))$$

car A est un cylindre à base dans \mathcal{F}_t^1 ce qui prouve que (1) = (2) car pour tout $B \in \mathcal{F}_t^2$,

$$H(\omega_1, B) = H(\theta_t \omega_1, B) \quad \text{sur} \quad t < \zeta^1(\omega_1)$$

c) $x \in E^1$ et $A \subset \{t \geq \zeta^1(\omega_1)\}$.

$$(1) = \int_A 1_{B^1 \cup B^2}(X_{t+s}) dQ_x = \int dP_x^1(\omega_1) H(\omega_1, d\omega_2) 1_{A_{\omega_1}}(\omega_2) (1_{B^2}(X_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2)))$$

D'autre part, si (ω_1, ω_2) est tel que $t \geq \zeta^1(\omega_1)$, on a :

$$E_{X_t(\omega_1, \omega_2)} 1_{B^1 \cup B^2}(X_s) = E_{X_t^1 - \zeta^1(\omega_1)(\omega_2)}^2 (1_{B^2}(X_s^2(\omega_2)))$$

D'où :

$$(2) = \int_A dQ_x(\omega_1, \omega_2) E_{X_t^1 - \zeta^1(\omega_1)(\omega_2)}^2 (1_{B^2}(X_s^2(\omega_2))) \\ = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} dP_x^1(\omega_1) H(\omega_1, d\omega_2) 1_{A_{\omega_1}}(\omega_2) E_{X_t^1 - \zeta^1(\omega_1)(\omega_2)}^2 (1_{B^2}(X_s^2(\omega_2)))$$

Or A_{ω_1} appartient à $\mathcal{F}_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2$ pour $t \geq \zeta(\omega_1)$

$$= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} dP_x^1(\omega_1) H(\omega_1, d\omega_2) 1_{A_{\omega_1(\omega_2)}} 1_{B^2}(X_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2)) = (1).$$

II. — LA PROPRIÉTÉ DE MARKOV FORTE

Nous allons d'abord étudier les temps d'arrêt de la famille \mathcal{G}_T , puis les tribus \mathcal{G}_T , où T est un temps d'arrêt de \mathcal{G}_t . Nous pourrions alors établir la propriété de Markov forte pour le processus prolongé.

LEMME 2. — Soit T^1 un \mathcal{F}_t temps d'arrêt, soit $T^2(\omega_1, \omega_2)$ une variable définie sur Φ^1 et \mathcal{G} mesurable telle que pour tout ω_1 satisfaisant à

$$T^1(\omega_1) \geq \zeta^1(\omega_1),$$

la section $T_{\omega_1}^2(\omega_2)$ soit un \mathcal{F}_t^2 -temps d'arrêt. Alors T défini sur Φ^1 par :

$$\begin{aligned} T(\omega_1, \omega_2) &= T^1(\omega_1) & \text{si } T^1(\omega_1) < \zeta^1(\omega_1) \\ &= \zeta^1(\omega_1) + T^2(\omega_1, \omega_2) & \text{si } T^1(\omega_1) \geq \zeta^1(\omega_1) \end{aligned}$$

est un temps d'arrêt de la famille \mathcal{G}_t .

En effet :

$$\begin{aligned} \{T(\omega_1, \omega_2) \leq u\} &= \{\omega_1, \omega_2; T^1(\omega_1) < \zeta^1(\omega_1); T^1(\omega_1) \leq u\} \\ &\cup \{\omega_1, \omega_2; T^1(\omega_1) \geq \zeta^1(\omega_1); \zeta^1(\omega_1) + T^2(\omega_1, \omega_2) \leq u\} \end{aligned}$$

Le premier des termes de la réunion est un cylindre; or

$$\{T^1(\omega_1) < \zeta^1(\omega_1)\}$$

appartient à \mathcal{F}_T^1 et l'intersection avec $T^1 \leq u$ appartient à \mathcal{F}_u^1 .

La section du second terme de la réunion par un ω_1 tel que $u < \zeta^1(\omega_1)$ est vide, et cette section par un ω_1 tel que $u \geq \zeta^1(\omega_1)$ appartient à $\mathcal{F}_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2$. Ceci prouve que $\{T(\omega_1, \omega_2) \leq u\} \in \mathcal{G}_u$ et démontre le lemme.

Nous allons établir une réciproque de ce lemme.

LEMME 3. — Tous les temps d'arrêt de la famille \mathcal{G}_t ont la forme de ceux décrits au lemme 2.

1) Soit T un temps d'arrêt de la famille \mathcal{G}_t . Montrons que :

$$T^1(\omega_1, \omega_2) = T(\omega_1, \omega_2) \wedge \zeta^1(\omega_1)$$

ne dépend que de ω_1 et est un \mathcal{F}_t^1 temps d'arrêt.

$$\{\omega_1, \omega_2; T(\omega_1, \omega_2) \wedge \zeta^1(\omega_1) \leq s\} = A \cup B$$

où :

$$A = \{\omega_1; \zeta^1(\omega_1) \leq s\}; \quad B = \{\omega_1, \omega_2; T(\omega_1, \omega_2) \leq s; \zeta^1(\omega_1) > s\}$$

Il est clair que A est un cylindre. Quant à B, sa section B_{ω_1} par ω_1 est vide si $s \geq \zeta^1(\omega_1)$ et elle est soit vide, soit égale à Ω^2 si $s < \zeta^1(\omega_1)$.

Donc $A \cup B$ est un cylindre, ce qui prouve que T^1 ne dépend que de ω_1 . Pour voir que $T^1(\omega_1)$ est un temps d'arrêt de la famille \mathcal{F}_t^1 , il suffit de remarquer que la base du cylindre $A \cup B$ appartient à \mathcal{F}_s^1 .

2) Soit

$$T^2(\omega_1, \omega_2) = T(\omega_1, \omega_2) - \zeta^1(\omega_1).$$

Si nous montrons que $T_{\omega_1}^2(\omega_2)$ est un temps d'arrêt de la famille \mathcal{F}_t^2 si

$$T^1(\omega_1) \geq \zeta^1(\omega_1)$$

le lemme sera démontré.

Soit donc un ω'_1 tel que $T^1(\omega'_1) \geq \zeta^1(\omega'_1)$. Soit $s = u - \zeta^1(\omega'_1)$, avec $u = T^1(\omega'_1)$. Soit $R(\omega_1, \omega_2) = s + \zeta^1(\omega_1)$. R est un \mathcal{G}_t temps d'arrêt.

L'ensemble

$$A = \{T(\omega_1, \omega_2) \geq \zeta^1(\omega_1); T(\omega_1, \omega_2) \leq s + \zeta^1(\omega_1)\} \in \mathcal{G}_R.$$

D'où, pour tout u :

$$B = \{T(\omega_1, \omega_2) \geq \zeta^1(\omega_1); T(\omega_1, \omega_2) \leq s + \zeta^1(\omega_1)\} \{s + \zeta^1(\omega_1) \leq u\} \in \mathcal{G}_u.$$

Donc, la section de B par ω'_1 appartient à $\mathcal{F}_{u - \zeta^1(\omega'_1)}^2 = \mathcal{F}_s^2$ et cette section $B_{\omega'_1}$ est égale à :

$$\{\omega_2; T(\omega'_1, \omega_2) - \zeta^1(\omega'_1) \leq s\} = \{\omega_2; T^2(\omega'_1, \omega_2) \leq s\}$$

ce qui prouve le lemme.

Nous allons montrer que les σ -algèbres \mathcal{G}_T possèdent des propriétés analogues à celles des σ -algèbres \mathcal{G}_t .

LEMME 4. — Si $A \in \mathcal{G}_T$, où T est un temps d'arrêt de la famille \mathcal{G}_t , alors $A \cap (T < \zeta^1(\omega_1))$ est un cylindre de base dans $\mathcal{F}_{T^1}^1$. Si un ω_1 est tel que $T(\omega_1, \omega_2) \geq \zeta^1(\omega_1)$, alors $A_{\omega_1} \in \mathcal{F}_{T - \zeta^1}^2$.

Soit un ω'_1 tel que $T(\omega'_1, \omega_2) < \zeta^1(\omega'_1)$.

Alors

$$T(\omega'_1, \omega_2) = T^1(\omega'_1) = s.$$

Soit

$$A \in \mathcal{G}_T \quad \{A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leq s\} \in \mathcal{G}_s.$$

Donc

$$\{A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leq s\}_{\omega_i} = \emptyset \text{ ou } \Omega^2.$$

ce qui prouve que $\{A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leq \zeta^1(\omega_1)\}$ est un cylindre. Soit un ω'_1 tel que $T(\omega'_1, \omega_2) \geq \zeta^1(\omega'_1)$ et soit $u = \zeta^1(\omega'_1) + s$

$$\{A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leq u\}_{\omega_i} \in \mathcal{F}_s^2$$

Or :

$$\{A \cap T(\omega_1, \omega_2) \leq u\}_{\omega_i} = A_{\omega_i} \cap \{\omega_2; T_{\omega_i}^2(\omega_2) \leq s\}$$

ce qui prouve la dernière phrase du lemme.

Pour prouver que la base du cylindre $\{A \cap (T(\omega_1, \omega_2) < \zeta^1(\omega_1))\}$ appartient à \mathcal{F}_T^1 remarquons que :

$$\begin{aligned} \{A \cap (T < \zeta^1)\} \cap (T^1 < u) &= \bigcup_{\substack{q < u \\ q \in \mathbb{Q}}} \{A \cap (T^1 < q < \zeta^1)\} \cap \{T^1 < u\} \\ &= \bigcup_{\substack{q < u \\ q \in \mathbb{Q}}} A \cap (T^1 < q) \cap (q < \zeta^1) \end{aligned}$$

et que $A \cap (T^1 > q) \cap (q < \zeta^1)$ a une projection qui appartient à \mathcal{F}_q^1 car $T^1 = T$ sur $T < \zeta^1$ et $A \cap (T^1 < q) \in \mathcal{G}_q$.

Le théorème suivant en résulte immédiatement :

THÉORÈME 2. — Si les deux processus initiaux ont la propriété de Markov forte, il en est de même du processus recollé.

En effet, il résulte du lemme 4, que l'on peut remplacer dans la démonstration du théorème 1 le temps fixe t par un temps d'arrêt T quelconque.

Remarques.

1) Soit T_n une suite de temps d'arrêt de la famille \mathcal{G}_t , $T_n \uparrow T$. Calculons

$$Q_x(X_{T_n} \leftrightarrow X_T; T < \zeta) = (1) + (2) + (3)$$

avec

$$\begin{aligned} (1) &= Q_x(X_{T_n} \leftrightarrow X_T; T < \zeta^1(\omega_1)); \quad (2) = Q_x(X_{T_n} \leftrightarrow X_T; T > \zeta^1(\omega_1)) \\ (3) &= Q_x(X_{T_n} \leftrightarrow X_T; T = \zeta^1(\omega_1); T_n < T \quad \blacktriangledown n). \end{aligned}$$

Il résulte du lemme 3 que (1) et (2) sont nuls dès que les processus initiaux ont la propriété de Blumenthal. Il est donc nécessaire et suffisant pour que le processus recollé ait la propriété de Blumenthal que ζ_1 soit totalement inaccessible c'est-à-dire qu'il n'existe pas de temps d'arrêt T_n^1 tels que

$$P^1(T_n^1(\omega_1) \uparrow \zeta^1(\omega_1); T_n^1 < \zeta^1 < \infty \quad \blacktriangledown n) > 0.$$

2) Si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, on peut remplacer E_1 et E_2 par $E'_1 = E_1 \times \{1\}$ et $E'_2 = E_2 \times \{2\}$.

L'hypothèse $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ est essentielle : on peut trouver facilement des exemples où le processus recollé n'est pas de Markov si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ (par exemple : le processus 1 est la translation vers la droite sur (01) et le processus 2 la translation vers la gauche).

3) Si $x \in E^1$, on a, avec $B^1 \in \mathcal{E}^1$, $B^2 \in \mathcal{E}^2$:

$$Q_t(1_{B^1 \cup B^2})(x) = P_t^1 1_{B^1}(x) + \int_0^t \int_{E_2} \psi(x, ds, dy) \varphi(y, dz) P_{t-s}^2 1_{B^2}(z)$$

où

$$\psi(x, ds, dy) = P_x^1(\zeta^1(\omega_1) \in ds; X_{\zeta^1(\omega_1)-}^1 \in dy)$$

III. — LES FONCTIONNELLES ADDITIVES DU PROCESSUS RECOLLÉ

Nous nous proposons de construire toutes les fonctionnelles additives du processus recollé. Soit A_i^i ($i = 1, 2$) une f. a. du processus i . Définissons, pour $\omega \in \Phi^1$:

$$A_t(\omega) = A_t(\omega_1, \omega_2) = \begin{matrix} A_t^1(\omega_1) & \text{si } t < \zeta^1(\omega_1) \\ = A_{\zeta^1(\omega_1)}^1(\omega_1) + A_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) & \text{si } t \geq \zeta^1(\omega_1). \end{matrix}$$

Si $\omega \in \Phi^2$

$$A_t(\omega) = A_t^2(\omega).$$

LEMME 5. — La fonctionnelle A_t est une f. a. du processus recollé. Nous l'appellerons la fonctionnelle obtenue par recollement de A^1 et A^2 . Soient t et s . Nous allons montrer qu'il existe un ensemble Λ , dépendant de s et t , tel que $Q_x(\Lambda) = 1$ pour tout x , et tel que si $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$,

$$A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + A_s \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2).$$

α) Il existe $\Lambda^1 \subset \Omega^1$, tel que $P_s^1(\Lambda^1) = 1$ et tel que pour tout $\omega_1 \in \Lambda^1$ on ait :

$$(1) \quad A_{t+s}^1(\omega_1) = A_t^1(\omega_1) + A_s^1 \circ \theta_t^1(\omega_1).$$

β) Soit $R(\omega_1) = (\zeta^1(\omega_1) - t) 1_{\{\zeta^1(\omega_1) \geq t\}}$. Il existe $\Lambda'^1 \subset \Omega^1$ tel que pour tout x , $P_x^1(\Lambda'^1) = 1$, et pour tout $\omega'_1 \in \Lambda'^1$: on ait :

$$(2) \quad A_{R+t}^1(\omega'_1) = A_t^1(\omega'_1) + A_R^1 \circ \theta_t^1(\omega'_1).$$

Soit

$$\Lambda = \Lambda^1 \cap \Lambda'^1 \quad (\forall x, P_x^1(\Lambda) = 1).$$

γ) Soit

$$\begin{aligned} A &= \{ \Lambda \cap t + s < \zeta^1(\omega_1) \}, & B &= \{ \Lambda \cap t < \zeta^1(\omega_1) \leq t + s \} \\ C &= \{ \Lambda \cap \zeta^1(\omega_1) \leq t \}. \end{aligned}$$

Soit $\omega_1 \in C$, et considérons les nombres $t - \zeta^1(\omega_1)$, s . Il existe $\Lambda_{\omega_1}^2$ tel que $P_x^2(\Lambda_{\omega_1}^2) = 1$ pour tout x et tel que si $\omega_2 \in \Lambda_{\omega_1}^2$, on ait :

$$(3) \quad A_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) = A_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) + A_s^2 \circ \theta_{t-\zeta^1(\omega_1)}(\omega_2).$$

δ) Définissons :

$$\Lambda = (A \cup B) \times \Omega^2 + \bigcup_{\omega_1 \in C} \{ \omega_1 \times \Lambda_{\omega_1}^2 \}.$$

Il est clair que pour tout x , $Q_x(\Lambda) = 1$.

Si $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$, montrons que

$$A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1) + A_s \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2).$$

1) Si $\omega_1 \in A$, cela résulte de (1).

2) Si $\omega_1 \in B$, on a

$$\begin{aligned} A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) &= A_{\zeta^1(\omega_1)}^1(\omega_1) + A_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) \\ A_t(\omega_1, \omega_2) &= A_t^1(\omega_1) \\ A_s \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2) &= A_s(\theta_t^1 \omega_1, \omega_2) = A_{\zeta^1(\omega_1)}^1(\theta_t^1 \omega_1) + A_{s-\zeta^1(\theta_t^1 \omega_1)}^2(\omega_2) \\ &= A_{\zeta^1(\omega_1)-t}^1(\theta_t^1 \omega_1) + A_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) \end{aligned}$$

et l'égalité recherchée résulte de (2).

3) Si $\omega_1 \in C$, on a :

$$\begin{aligned} A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) &= A_{\zeta^1(\omega_1)}^1(\omega_1) + A_{t+s-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) \\ A_t(\omega_1, \omega_2) &= A_{\zeta^1(\omega_1)}^1(\omega_1) + A_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) \\ A_s \theta_t(\omega_1, \omega_2) &= A_s^2(\theta_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2)) \end{aligned}$$

et l'égalité recherchée résulte de (3).

Il nous reste encore à prouver que $A_t \in \mathcal{G}_t$ pour tout t . Or :

$$\{ A_t(\omega_1, \omega_2) < u \} \cap \{ t < \zeta^1(\omega_1) \} = \{ A_t^1(\omega_1) < u \} :$$

c'est bien un cylindre à base dans \mathcal{F}_t^1 ; si

$$t \geq \zeta^1(\omega_1), \{ \omega_2 ; A_t(\omega_1, \omega_2) < u \} = \{ \omega_2 ; A_{\zeta^1(\omega_1)}^1(\omega_1) + A_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2) < u \},$$

cet ensemble appartient à $\mathcal{F}_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2$.

Remarque. — La fonctionnelle ainsi construite est Q_x p. s. continue au point $\zeta^1(\omega_1)$. Il est donc inutile d'espérer obtenir toutes les f. a. de cette façon.

Exemple. — Le premier processus est la translation sur $] - \infty, 0]$ avec temps exponentiel en 0, et saut en $+\infty$. Le second processus est la translation sur $[1, \infty[$. Le processus recollé est la translation jusqu'en 0, arrêt exponentiel en 0, et redémarrage ou translation à droite de 1. Soit :

$$T(\omega) = \inf \{ t; |X_t - X_{t-}| > 0 \}.$$

T est un temps terminal, et soit $A_t(\omega) = 1$ si $t \geq T(\omega)$, 0 sinon, A_t est une fonctionnelle additive discontinue en $\zeta^1(\omega_1)$ et ne peut être obtenu par la construction précédente.

Nous sommes ainsi amenés à étudier les fonctionnelles de la forme :

Si $\omega \in \Phi^1$,

$$\begin{aligned} A_t(\omega_1, \omega_2) &= 0 & \text{si } t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= h(\omega_1, \omega_2) & \text{si } t \geq \zeta^1(\omega_1) \end{aligned}$$

Si $\omega \in \Phi^2$,

$$A_t(\omega) = 0.$$

Nous pouvons supposer que $h(\omega_1, \omega_2) = 0$ si $\zeta^1(\omega_1) = \infty$.
Définissons sur $\Omega^1 \times \Omega^2$ la tribu $\widehat{\mathcal{F}}_0^1$ par :

$$\begin{aligned} A \in \widehat{\mathcal{F}}_0^1 \quad \text{si} \quad & 1) A \in \mathcal{G} \\ & 2) \forall u, \text{ p. s. } \{ \theta_u^{-1}(A) \} \cap \{ u < \zeta^1(\omega_1) \} = A \cap \{ u < \zeta^1(\omega_1) \}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 3. — Pour que la fonctionnelle A soit une f. a. il faut et il suffit que :

- 1) h soit $\widehat{\mathcal{F}}_0^1$ mesurable et positive.
- 2) $\omega_2 \rightarrow h(\omega_1, \omega_2)$ soit \mathcal{F}_0^2 mesurable.

Montrons d'abord que ces conditions sont nécessaires :

- 1) Soit t fixé et r un rationnel. Il existe $\Lambda^{t,r}$ tel que pour tout x , $Q_x(\Lambda^{t,r}) = 1$, et pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda^{t,r}$:

$$A_{t+r}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + A_r \theta_t(\omega_1, \omega_2).$$

Soit

$$\Lambda = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} \Lambda^{t,r}.$$

Soit

$$(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda.$$

Il existe r rationnel tel que $t + r > \zeta^1(\omega_1)$. Supposons $t < \zeta^1(\omega_1)$. On a :

$$A_{t+r}(\omega_1, \omega_2) = A_r \theta_t(\omega_1, \omega_2),$$

soit

$$h(\omega_1, \omega_2) = h(\theta_t^1 \omega_1, \omega_2)$$

ce qui prouve 1.

2) Pour prouver 2, remarquons que :

$$\begin{aligned} \{ \omega_1, \omega_2 ; A_t(\omega_1, \omega_2) < u \} \\ = \{ \omega_1 ; t < \zeta^1(\omega_1) \} \cup \bigcup_{\omega_1; t \geq \zeta^1(\omega_1)} \{ \omega_1, \omega_2 ; h(\omega_1, \omega_2) < u \} \end{aligned}$$

Cet ensemble appartient à \mathcal{G}_t .

Donc sa section par un ω_1 tel que $t \geq \zeta^1(\omega_1)$ appartient à $\mathcal{F}_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2$. Or cette section est égale à $\{ \omega_2 ; h(\omega_1, \omega_2) < u \}$.

Cette relation est en particulier vraie pour $t = \zeta^1(\omega_1)$, ce qui prouve 2.

Montrons maintenant que ces conditions sont suffisantes : on a, p. s. :

$$\theta_u^{-1}(h(\omega_1, \omega_2) < q) \cap (u < \zeta^1(\omega_1)) = (h(\omega_1, \omega_2) < q) \cap (u < \zeta^1(\omega_1))$$

Soit, p. s. :

$$(h(\theta_u^1 \omega_1, \omega_2) < q) \cap (u < \zeta^1(\omega_1)) = (h(\omega_1, \omega_2) < q) \cap (u < \zeta^1(\omega_1))$$

Ce qui prouve que $h(\theta_u^1 \omega_1, \omega_2) = h(\omega_1, \omega_2)$ p. s. sur $u < \zeta^1(\omega_1)$.

Soit Λ^u l'ensemble tel que $Q_x(\Lambda^u) = 1$ et tel que la relation précédente soit vraie si $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda^u$. Alors la relation :

$$A_{t+u}(\omega_1, \omega_2) = A_u(\omega_1, \omega_2) + A_t \circ \theta_u(\omega_1, \omega_2)$$

est évidente si $t + u < \zeta^1(\omega_1)$ et si $u \geq \zeta^1(\omega_1)$.

Pour $u < \zeta^1(\omega_1)$ et $u + t \geq \zeta^1(\omega_1)$, elle résulte du choix de Λ^u .

2) Il reste à prouver que A_t est \mathcal{G}_t mesurable. Or :

$$\begin{aligned} \{ A_t(\omega_1, \omega_2) < u \} \\ = \{ \omega_1 ; t < \zeta^1(\omega_1) \} \cup \bigcup_{\omega_1; \zeta^1(\omega_1) \leq t} \{ \omega_1, \omega_2 ; h(\omega_1, \omega_2) < u \} \end{aligned}$$

Cet ensemble appartient à \mathcal{G} d'après 1. Sa section par un ω_1 tel que $t \geq \zeta^1(\omega_1)$ appartient à \mathcal{F}_0^2 donc à $\mathcal{F}_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2$, ce qui prouve le théorème.

Nous allons maintenant étudier les fonctionnelles du processus recollé.

LEMME 6. — Soit $A_t(\omega_1, \omega_2)$ une f. a. du processus recollé. Définissons :

$$\begin{aligned} A_t^1(\omega_1, \omega_2) &= A_t(\omega_1, \omega_2) & \text{si } t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= \lim_{s \uparrow \zeta^1(\omega_1)} A_s(\omega_1, \omega_2) & \text{si } t \geq \zeta^1(\omega_1) \end{aligned}$$

$A_t^1(\omega_2) = 0$. Alors $A_t^1(\omega_1, \omega_2)$ ne dépend que de ω_1 et est une f. a. du processus initial.

Soit

$$B = \{A_t^1(\omega_1, \omega_2) < u\} = \bigcup_{\substack{q \leq t \\ q \in \mathbb{Q}}} \{A_q(\omega_1, \omega_2) < u\} \cap \{q < \zeta^1(\omega_1)\}$$

Or $\{A_q < u\} \cap \{q < \zeta^1(\omega_1)\}$ est un cylindre de base dans \mathcal{F}_t^1 ce qui prouve que $A_t^1(\omega_1, \omega_2)$ ne dépend que de ω_1 et est \mathcal{F}_t^1 mesurable. Montrons maintenant qu'il s'agit d'une f. a. :

Soient t et s fixés, et

$$\Lambda = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\Lambda^{t,q}) \cap \Lambda^{t,s}.$$

Soient $(\omega_1, \omega_2) \in \Lambda$.

1) Supposons $t + s < \zeta^1(\omega_1)$. On a :

$$A_{t+s}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + A_s \theta_t(\omega_1, \omega_2)$$

d'où

$$A_{t+s}^1(\omega_1) = A_t^1(\omega_1) + A_s^1(\theta_t^1 \omega_1).$$

2) Supposons $t < \zeta^1(\omega_1)$, $t + s \geq \zeta^1(\omega_1)$. Alors :

$$A_{t+q}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + A_q \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2) \quad (\forall q \in \mathbb{Q})$$

D'où

$$\lim_{q_n \uparrow \zeta^1(\omega_1) - t} A_{t+q_n}(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_1, \omega_2) + \lim_{q_n \uparrow \zeta^1(\omega_1) - t} A_{q_n} \circ \theta_t(\omega_1, \omega_2)$$

Soit :

$$A_{t+s}^1(\omega_1, \omega_2) = A_t^1(\omega_1) + A_s^1(\theta_t^1 \omega_1).$$

3) Supposons que $t \geq \zeta^1(\omega_1)$. Alors :

$$A_{t+s}^1(\omega_1) = \lim_{q_n \uparrow \zeta^1(\omega_1)} A_{q_n}(\omega_1, \omega_2)$$

$$A_t^1(\omega_1) = \lim_{q_n \uparrow \zeta^1(\omega_1)} A_{q_n}(\omega_1, \omega_2)$$

$$A_s^1(\theta_t(\omega_1, \omega_2)) = A_s^1(\theta_{t-\zeta^1(\omega_1)}^2(\omega_2)) = 0,$$

d'où la relation cherchée. On voit que la relation

$$A_{t+s}^1(\omega_1) = A_t^1(\omega_1) + A_s^1(\theta_t^1 \omega_1)$$

est vraie dès que ω_1 appartient à la projection de Λ , ce qui prouve le lemme.

Remarques.

1) Soit A_t une f. a. du processus recollé. Soit :

$$A_t^2(\omega_1, \omega_2) = A_{\zeta^1(\omega_1)+t}(\omega_1, \omega_2) - A_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2).$$

Pour tout t , $A_t^2(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_2)$ p. s., et est donc une f. a. du processus n° 2.

En effet, t étant fixé, et $\zeta^1(\omega_1)$ étant un temps d'arrêt de la famille \mathcal{G}_t , on a :

$$A_{\zeta^1(\omega_1)+t}(\omega_1, \omega_2) = A_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2) + A_t \circ \theta_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2) \text{ p. s.}$$

soit

$$A_t^2(\omega_1, \omega_2) = A_t(\omega_2) \text{ p. s.}$$

2) Si A_t est une f. a. du processus recollé, définissons :

$$\begin{aligned} B_t(\omega_1, \omega_2) &= 0 \quad \text{si } t < \zeta^1(\omega_1) \\ &= A_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2) - A_{\zeta^1(\omega_1)-}(\omega_1, \omega_2) \quad \text{si } t \geq \zeta^1(\omega_1) \end{aligned}$$

Alors $B_t(\omega_1, \omega_2)$ est une f. a. du processus recollé.

Il nous suffit de voir que la fonction

$$h(\omega_1, \omega_2) = A_{\zeta^1(\omega_1)}(\omega_1, \omega_2) - A_{\zeta^1(\omega_1)-}(\omega_1, \omega_2)$$

satisfait aux hypothèses du théorème 3.

L'hypothèse 1 est facile à vérifier, et pour l'hypothèse 2 remarquons que la fonction :

$$(\omega_1, \omega_2) \rightarrow A_{\zeta^1(\omega_1)-u}(\omega_1, \omega_2)$$

est \mathcal{G}_{ζ^1} mesurable pour tout $u \geq 0$ et donc que la section par ω_1 de :

$$\{ A_{\zeta^1(\omega_1)-u}(\omega_1, \omega_2) < a \}$$

appartient à \mathcal{F}_0^2 d'après le lemme 4.

Nous pouvons maintenant décrire toutes les f. a. du processus recollé.

THÉORÈME 4. — Soit A_t une f. a. du processus recollé. Alors A_t est la somme de 2 f. a. :

- 1) l'une B_t est de la forme de celles décrites au théorème 3 ;
- 2) l'autre C_t est obtenue par recollement de 2 f. a. à des processus initiaux et est continue au temps $\zeta^1(\omega_1)$.

Soit $C_t = A_t - B_t$; C_t est continue en $\zeta^1(\omega_1)$ et elle est la recollée de la f. a. A_t^1 du lemme 6 et de la f. a. A_t^2 de la remarque 1 précédente.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1969).